MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

59. BAND

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

59. BAND

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1953/54

Unveränderter Nachdruck 1970
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Inhalt des 59. Bandes.

Seite

BAER, R., Das Hyperzentrum einer Gruppe. III 299

BOL, G., Über die Flächen, bei denen die Diagonalen der Vierseite von Demoulin linearen Kongruenzen angehören 97

CARLITZ, L., Weighted quadratic partitions (mod p^r) 40

CARLITZ, L., Congruence properties of the polynomials of Hermite, Laguerre and Legendre 474

ELLIS, D., A Modification of the Parallelogram Law Characterization of Hilbert Spaces 94

FOSTER, A. L., Generalized "Boolean" theory of universal algebras. II 191

GROTEMEYER, K. P., Bemerkung zur Verbiegung konvexer Flächen 258

GROTEMEYER, K. P., Gleitverbiegungen und eindeutige Bestimmtheit isometrischer, ebenrandiger Mützen 278

HUCKEMANN, F., Bestimmung der Wertverteilung der Gammafunktion aus ihrer Riemannschen Fläche 375

HUCKEMANN, F., Typusänderung bei Riemannschen Flächen durch Verschiebung von Windungspunkten 383

HUPPERT, B., Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen 1

KNOCHE, H.-G., Über den Frobeniusschen Klassenbegriff in nilpotenten Gruppen. II 8

KOECHER, M., Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades. I. 399

KRUBECK, E., Über Zerfällungen in paarweis ungleiche Polynomwerte 255

KRULL, W., Über Polynomzerlegung mit endlich vielen Schritten 57

KRULL, W., Über Polynomzerlegung mit endlich vielen Schritten. II 296

LORENTZ, G. G., and M. S. MACPHAIL, Direct theorems on methods of summability. III: Absolute summability functions 231

LORENZEN, P., Über die Komplettierung in der Bewertungstheorie 84

MEINARDUS, G., Asymptotische Aussagen über Partitionen 388

MEYER-KÖNIG, W., und K. ZELLER, Inäquivalenzsätze bei Limitierungsverfahren . 200

MINAGAWA, T., and T. RADO, On the infinitesimal rigidity of surfaces of revolution 151

NAGAO, H., and T. NAKAYAMA, On the structure of (M_0)- and (M_u)-modules 164

NEUMER, W., Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. II 434

PEYERIMHOFF, A., Summierbarkeitsfaktoren für absolut Cesàro-summierbare Reihen 417

PINL, M., B-Kugelbilder reeller Minimalflächen in R_4 290

RINGEL, G., Lokal-reguläre Zerlegungen geschlossener orientierbarer Flächen 484

ROSE, A., Fragments of the m-valued propositional calculus 206

Seite

SCHÖNEBORN, H., Über gewisse Topologien in Abelschen Gruppen. I 455

SHAH, S. M., and S. K. SINGH, Borel's theorem on a-points and exceptional values of entire and meromorphic functions 88

STALLMANN, F., Konforme Abbildung gewisser Kreisbogenvierecke als Eigenwertproblem 211

STULOFF, N., Ein Beitrag zur Theorie spezieller Dirichletscher Reihen 339

TILLMANN, H.-G., Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen 61

VOLKMANN, B., Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. II 247

VOLKMANN, B., Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. III 259

VOLKMANN, B., Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. IV 425

WANG, H., The categoricity question of certain grand logics 47

WEIER, J., Fixpunkttheorie in topologischen Mannigfaltigkeiten 171

WEIER, J., Normale Abbildungsscharen 356

WENZL, F., Nullstellendichte reeller Polynome und Tschebyscheffsche Approximation 17

ZELLER, K., Über die Darstellbarkeit von Limitierungsverfahren mittels Matrixtransformationen 271

HUPPERT, B.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 1—7 (1953)

Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen.

Von

BERTRAM HUPPERT.

Die endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ sei darstellbar als Produkt von zwei Untergruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$. Aus der Auflösbarkeit von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ folgt dann noch nicht die Auflösbarkeit von $\mathfrak{G}$ (s. [*10*]). Es ist eine interessante Frage, welchen Einschränkungen man $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ zu unterwerfen hat, damit $\mathfrak{G}$ auflösbar ist. Das beste bisher bekannte Resultat in dieser Richtung, das man N. ITÔ [*3*] verdankt, lautet so: Das Produkt einer nilpotenten Gruppe mit einer abelschen Gruppe oder mit einer p-Gruppe ist auflösbar. Für eine Teilaussage dieses Satzes, nämlich die Auflösbarkeit eines Produktes von zwei abelschen Gruppen, gaben wir kürzlich einen einfachen Beweis [*2*]. Die dort durchgeführten Überlegungen lassen sich verfeinern und liefern folgende Resultate:

Satz 1. *Das Produkt einer Diedergruppe mit einer abelschen Gruppe ist auflösbar.*

Satz 2. *Das Produkt einer Diedergruppe mit einer p-Gruppe ist auflösbar.*

Satz 3. *Das Produkt von zwei Diedergruppen ist auflösbar.*

Das Ziel dieser Note ist der Beweis dieser Sätze. Sie scheinen uns von Interesse zu sein, da sie zeigen, daß man auch bei speziellen Klassen von nichtnilpotenten Gruppen zu Auflösbarkeitsaussagen gelangen kann. Man muß aber mit weiteren Verallgemeinerungen vorsichtig sein, wie die Zerlegung der einfachen Gruppe der Ordnung 168 in das Produkt einer Diedergruppe der Ordnung 8 mit einer nichtabelschen Gruppe der Ordnung 21 lehrt. (Den Hinweis auf dieses Beispiel verdanken wir Herrn N. ITÔ.)

Mit $(\mathfrak{G})$ bezeichnen wir die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$ bedeute, daß $\mathfrak{U}$ Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist. Ist $\mathfrak{U}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so schreiben wir $\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{G}$. Mit $\mathfrak{D}_{2k}$ bezeichnen wir in dieser Arbeit stets die Diedergruppe der Ordnung $2k$, mit $\mathfrak{Z}_j$ den für $j \mid k$ und $k \neq 2$ eindeutig bestimmten zyklischen Normalteiler der Ordnung j von $\mathfrak{D}_{2k}$. $\mathfrak{A}_t$ sei die alternierende Gruppe vom Grad t. Ist p^α die höchste Potenz der Primzahl p, welche m noch teilt, so schreiben wir $p^\alpha \top m$. $\mathfrak{E}$ sei die Einheitsgruppe.

Hilfssatz 1. *Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{E}$. Ist die Untergruppe $\mathfrak{K}$ ihr eigener Normalisator in $\mathfrak{G}$ und hat sie mit jeder ihrer Konjugierten $\mathfrak{K}^S$ den Durchschnitt $\mathfrak{E}$, so ist $\mathfrak{H}$ invariant in $\mathfrak{G}$.*

Dieser Hilfssatz folgt sofort aus einem bekannten Satz von FROBENIUS (s. [*6*] S. 202, Satz 180). Jedoch läßt er sich auch elementar beweisen: Wir stellen $\mathfrak{G}$ dar als transitive Permutationsgruppe der Nebenklassen nach $\mathfrak{K}$. Dabei wird $\mathfrak{H}$ auf eine reguläre Permutationsgruppe abgebildet. Die Elemente

in $\mathfrak{H}$ und in den zu $\mathfrak{N}$ konjugierten Gruppen erschöpfen schon ganz $\mathfrak{G}$, denn dies sind

$$(\mathfrak{H}) + (\mathfrak{H})\,[(\mathfrak{N}) - 1)] = (\mathfrak{H})\,(\mathfrak{N}) = (\mathfrak{G})$$

Elemente. Somit besteht $\mathfrak{H}$, abgesehen von dem Einheitselement E, aus genau den Permutationen von $\mathfrak{G}$, welche kein Symbol fest lassen. $\mathfrak{H}$ ist daher invariant in $\mathfrak{G}$.

Hilfssatz 2. *Ist* $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{E}$ *eine Untergruppe der Diedergruppe* $\mathfrak{D}_{2k}$, *und enthält* $\mathfrak{U}$ *keinen Normalteiler von* $\mathfrak{D}_{2k}$, *so gilt* $(\mathfrak{U}) = 2$ *und* $\mathfrak{D}_{2k} = \mathfrak{Z}_k \cdot \mathfrak{U}$.

Beweis. $\mathfrak{Z}_k \cap \mathfrak{U}$ ist ein Normalteiler von $\mathfrak{D}_{2k}$. Enthält also $\mathfrak{U}$ keinen Normalteiler von $\mathfrak{D}_{2k}$, so ist $\mathfrak{Z}_k \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{Z}_k \cdot \mathfrak{U} = \mathfrak{D}_{2k}$, also $(\mathfrak{U}) = 2$.

Beweis von Satz 1. Sei also $\mathfrak{G} = \mathfrak{D}_{2k} \cdot \mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}_{2k}$ die Diedergruppe der Ordnung $2k$ und $\mathfrak{H}$ eine abelsche Gruppe, $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{D}_{2k}$, $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{H}$.

Der Beweis wird durch Induktion nach der Gruppenordnung geführt und zerfällt in mehrere Teile. Offenbar genügt der Nachweis eines auflösbaren Normalteilers, der von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ verschieden ist.

a) Sei zunächst $\mathfrak{D}_{2k} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{D} \neq \mathfrak{E}$. Dann ist $\mathfrak{D} \lhd \mathfrak{H}$. Nach [4], S. 436–437 oder [7], Satz 2 gibt es dann einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$, der $\mathfrak{D}$ enthält und in $\mathfrak{D}_{2k}$ liegt, also auflösbar ist.

Weiterhin dürfen wir $\mathfrak{D}_{2k} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{E}$ annehmen.

b) Sei $\mathfrak{H}$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{H})$ der Normalisator von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$ oder $\mathfrak{N}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{G}$. Im zweiten Falle sind wir fertig. Sei also $\mathfrak{N}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$. Hat $\mathfrak{H}$ mit jeder Konjugierten von $\mathfrak{H}$ den Durchschnitt $\mathfrak{E}$, so ist $\mathfrak{D}_{2k}$ nach Hilfssatz 1 ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Andernfalls gibt es ein $S \in \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{H}^S \neq \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{H}^S = \mathfrak{F} \neq \mathfrak{E}$. Dann ist $\mathfrak{F}$ invariant in $\mathfrak{H}$ und in $\mathfrak{H}^S$, also auch in der von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}^S$ erzeugten Gruppe $\{\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^S\} = \mathfrak{G}$.

c) Sei $\mathfrak{H}$ nicht maximal in $\mathfrak{G}$; dann gibt es zwischen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}$ eine echte Zwischengruppe $\mathfrak{U} = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{L} \neq \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{L} = \mathfrak{D}_{2k} \cap \mathfrak{U}$. Nun gilt $\mathfrak{G} = \mathfrak{D}_{2k}\,\mathfrak{U}$. Enthält $\mathfrak{L}$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{D}_{2k}$, so enthält $\mathfrak{U}$ einen Normalteiler $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$ (s. wieder [4] oder [7]). $\mathfrak{U}$ ist Produkt der abelschen Gruppe $\mathfrak{H}$ mit der Gruppe $\mathfrak{L}$, welche zyklisch oder eine Diedergruppe ist. Nach ITÔ [3] oder gemäß der Induktionsannahme ist $\mathfrak{U}$ auflösbar, $\mathfrak{M}$ als Untergruppe von $\mathfrak{U}$ daher ebenfalls.

Enthält jedoch $\mathfrak{L}$ keinen Normalteiler von $\mathfrak{D}_{2k}$, so liefert Hilfssatz 2 die Aussagen $\mathfrak{D}_{2k} = \mathfrak{Z}_k \cdot \mathfrak{L}$ und $(\mathfrak{L}) = 2$. Dann gilt $\mathfrak{G} = [\mathfrak{Z}_k\,\mathfrak{L}]\,\mathfrak{H} = \mathfrak{Z}_k[\mathfrak{L}\,\mathfrak{H}]$; der Faktor $\mathfrak{L}$ darf also von $\mathfrak{Z}_k$ zu $\mathfrak{H}$ geschoben werden, was später von Nutzen sein wird.

d) Sei $\mathfrak{D}_{2k}$ nicht maximal in $\mathfrak{G}$. Dann gibt es eine echte Untergruppe $\mathfrak{V} \neq \mathfrak{D}_{2k}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{D}_{2k} < \mathfrak{V} = \mathfrak{D}_{2k}\,\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N} = \mathfrak{V} \cap \mathfrak{H} \lhd \mathfrak{H}$. Es folgt nun $\mathfrak{G} = \mathfrak{V} \cdot \mathfrak{H}$. Nach [4] oder [7] existiert dann ein Normalteiler $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G}$, der in $\mathfrak{V}$ liegt. $\mathfrak{V}$ ist nach Induktionsannahme auflösbar, daher auch $\mathfrak{N}$.

Weiterhin darf also angenommen werden, daß $\mathfrak{D}_{2k}$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist. Der Normalisator $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}_k)$ von $\mathfrak{Z}_k$ umfaßt $\mathfrak{D}_{2k}$. Sehen wir von dem trivialen Fall $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}_k) = \mathfrak{G}$ ab, so können wir $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}_k) = \mathfrak{D}_{2k}$ annehmen.

e) Ist k ungerade, so stellen wir $\mathfrak{G}$ dar als transitive Permutationsgruppe in $2k$ Symbolen, den Nebenklassen nach $\mathfrak{H}$. Dabei wird $\mathfrak{D}_{2k}$ regulär dargestellt. Abgesehen von der Bezeichnung der Symbole hat die reguläre Darstellung von $\mathfrak{D}_{2k}$ die Gestalt

$$Z = (1, 2, \ldots, k-1, k)\,(k+1, k+2, \ldots, 2k-1, 2k)$$

$$L = (1, k+1)\,(2, 2k)\,(3, 2k-1) \ldots (i, 2k-i+2) \ldots (k, k+2),$$

wobei Z und L erzeugende Elemente von $\mathfrak{D}_{2k}$ mit den Relationen

$$Z^k = L^2 = E, \quad L Z L^{-1} = Z^{-1}$$

sind. L ist wegen $2 \nmid k$ eine ungerade Permutation. Daher ist der Durchschnitt von $\mathfrak{G}$ mit der alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_{2k}$ ein eigentlicher Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ vom Index 2. Z liegt in $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{A}_{2k} = \mathfrak{N}$. Aus $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}_k \{\mathfrak{L}\mathfrak{H}\}$ folgt nun wegen $\mathfrak{Z}_k < \mathfrak{N}$ die Gleichung $\mathfrak{N} = \mathfrak{Z}_k \cdot \mathfrak{R}$ mit geeignetem $\mathfrak{R} < \mathfrak{L}\mathfrak{H}$. $\mathfrak{Z}_k$ ist eigener Normalisator in $\mathfrak{N}$; denn der Normalisator von $\mathfrak{Z}_k$ in $\mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{D}_{2k}$ und $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{D}_{2k} = \mathfrak{Z}_k$.

Hat $\mathfrak{Z}_k$ mit jeder Konjugierten den Durchschnitt $\mathfrak{E}$, so ist nach Hilfssatz 2 $\mathfrak{R} \lhd \mathfrak{N}$. $\mathfrak{R}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{L}\mathfrak{H}$; wegen $(\mathfrak{L}) = 2$ ist $\mathfrak{H}$ invariant in $\mathfrak{L}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}\mathfrak{H}$ also auflösbar und $\mathfrak{R}$ daher ebenfalls. Dann ist aber auch $\mathfrak{N}$ auflösbar, womit ein auflösbarer Normalteiler von $\mathfrak{G}$ nachgewiesen ist.

Ist jedoch für ein geeignetes $S \in \mathfrak{G}$ $\mathfrak{Z}_k \neq \mathfrak{Z}_k^S$ und $\mathfrak{Z}_k \cap \mathfrak{Z}_k^S = \mathfrak{D} \neq \mathfrak{E}$, so ist $\mathfrak{D}$ eine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{Z}_k$ und $\mathfrak{Z}_k^S$, daher invariant in $\mathfrak{D}_{2k}$ und in $\mathfrak{D}_{2k}^S$, also auch invariant in $\{\mathfrak{D}_{2k}, \mathfrak{D}_{2k}^S\} = \mathfrak{G}$. ($\mathfrak{D}_{2k}^S \neq \mathfrak{D}_{2k}$ folgt aus $\mathfrak{Z}_k^S \neq \mathfrak{Z}_k$ wegen $k \neq 2$.)

Weiter sei k gerade.

f) Nun sei $(\mathfrak{H})$ ungerade. Wir stellen $\mathfrak{G}$ dar als transitive Permutationsgruppe in k Symbolen, den Nebenklassen nach $\mathfrak{L}\mathfrak{H}$. Z wird dabei als k-Zyklus dargestellt, ist also eine ungerade Permutation. $\mathfrak{N} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{A}_k$ ist daher ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ vom Index 2. Wegen $2 \nmid (\mathfrak{H})$ folgt $\mathfrak{H} < \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{J} < \mathfrak{D}_{2k}$. $\mathfrak{N}$ ist nach unserer Induktionsannahme auflösbar.

g) Zu behandeln bleibt noch der Fall, daß k und $(\mathfrak{H})$ gerade sind. Sei also $2^\alpha \mid k$, $\alpha > 0$. Nach WIELANDT [*10*] hat eine geeignete 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ die Gestalt $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G}) = \mathfrak{D}_{2 \cdot 2^\alpha} \mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})$, wobei $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})$ die 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{D}_{2 \cdot 2^\alpha}$ eine geeignete 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{D}_{2k}$ ist. (Offenbar ist $\mathfrak{D}_{2 \cdot 2^\alpha}$ wieder eine Diedergruppe.) Sei C ein von E verschiedenes Element aus dem Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G}))$ von $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G})$. Nun sind drei Fälle möglich:

Fall 1. Wenn C in $\mathfrak{H}$ liegt, so umfaßt der Normalisator $\mathfrak{N}(C)$ von C die Gruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{D}_{2 \cdot 2^\alpha}$. Der Index von $\mathfrak{H}$ unter $\mathfrak{N}(C)$ ist daher mindestens 4. Nach c) ist dann $\mathfrak{N}(C) = \mathfrak{G}$, also $\{C\}$ ein zyklischer Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

Fall 2. Sei $C = D\,H$ mit $D \in \mathfrak{D}_{2k}$ und $H \in \mathfrak{H}$, $D \neq E$ und $H \neq E$. Für alle $H' \in \mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})$ ist dann

$$D\,H = C = C^{H'} = D^{H'}\,H^{H'} = D^{H'}\,H,$$

somit $D^{H'} = D$. Also liegt D im Zentralisator $\mathfrak{C}(\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H}))$ von $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})$. Daher folgt $\mathfrak{C}(\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})) > \{\mathfrak{H}, D\} \neq \mathfrak{H}$. Ist nun $\mathfrak{C}(\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})) = \mathfrak{G}$, so sind wir fertig. Andernfalls ist nach c) notwendig $\mathfrak{C}(\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})) = \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{H}$, wobei $\mathfrak{L}$ aus genau zwei Elementen E, L besteht; somit ist $D \in \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{H}$, $D \in \mathfrak{L}$, $D = L$, $C = LH$. Für $D' \in \mathfrak{Z}_{2^\alpha} < \mathfrak{Z}_k$ ergibt sich nun

$$L H = C = C^{D'} = L^{D'} H^{D'}$$

und weiter ist

$$L^{D'} = D' L D'^{-1} = D' L D'^{-1} L^{-1} L = D'^2 L$$

wegen der in $\mathfrak{D}_{2k}$ gültigen Relation $L D' L^{-1} = D'^{-1}$. Schließlich wird daher $LH = D'^2 L H^{D'} = L D'^{-2} H^{D'}$, also $H = D'^{-2} H^{D'} = D'^{-1} H D'^{-1}$. Hieraus folgt $H D' H^{-1} = D'^{-1}$. Der Normalisator $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}_{2^\alpha})$ von $\mathfrak{Z}_{2^\alpha}$ umfaßt daher $\{\mathfrak{D}_{2k}, H\}$, ist also wegen $H \neq E$ eine echte Obergruppe von $\mathfrak{D}_{2k}$. Nach d) ist dann $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}_{2^\alpha}) = \mathfrak{G}$, womit auch in diesem Falle ein auflösbarer Normalteiler aufgezeigt ist.

Fall 3. Nun sei $C = D \in \mathfrak{D}_{2k}$. Falls $C \in \mathfrak{Z}_k$, so umfaßt der Normalisator der Gruppe $\{C\}$ sowohl $\mathfrak{D}_{2k}$ als auch $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})$; dann ist $\{C\}$ invariant in $\mathfrak{G}$. Im anderen Falle haben wir $\mathfrak{D}_{2k} = \mathfrak{Z}_k \cdot \{C\}$. Dann ist $\mathfrak{D}_{2 \cdot 2^\alpha} = \mathfrak{Z}_{2^\alpha} \cdot \{C\}$ abelsch wegen $C \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G}))$. Daraus folgt $4 \top 2k$, $2 \top k$. Die betrachtete 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ hat also die Gestalt $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G}) = \mathfrak{D}_{2 \cdot 2} \cdot \mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})$. Wir dürfen annehmen, daß $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})$ kein Zentrumselement von $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G})$ enthält; sonst würde nämlich Fall 1 eintreten. Dann enthält $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})$ auch keinen Normalteiler von $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G})$. Stellen wir $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G})$ dar als transitive Permutationsgruppe der Nebenklassen nach $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})$, so entsteht daher eine treue Darstellung von $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G})$ vom Grad 4. Daraus folgt $(\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G})) \mid 8$, $2 \top (\mathfrak{H})$. Die 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ ist demnach isomorph zu einer 2-Sylowgruppe der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_4$, also zu einer Diedergruppe der Ordnung 8. Nur dieser Fall ist jetzt noch zu behandeln.

Der Normalisator $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H}))$ von $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})$ umfaßt $\mathfrak{H}$ und C, ist also von $\mathfrak{H}$ verschieden. Ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})) \neq \mathfrak{G}$, so gilt nach c) $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H})) = \mathfrak{H}\{C\}$. Nun stellen wir $\mathfrak{G}$ dar als transitive Permutationsgruppe der Nebenklassen nach $\mathfrak{H} \cdot \{C\}$. Diese Darstellung hat den Grad k. Wie wir unter c) sahen, läßt $\mathfrak{G}$ die Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}_k \cdot [\mathfrak{H} \cdot \{C\}]$ zu. Daher wird $\mathfrak{Z}_k$ bei der betrachteten Darstellung regulär wiedergegeben. Wegen $2 \mid k$ ist die Z zugeordnete Permutation ungerade. Somit besitzt $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler vom Index 2, nämlich den Durchschnitt von $\mathfrak{G}$ mit der alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_k$. Wir können annehmen, daß die Darstellung treu ist; im anderen Falle würde $\mathfrak{H}\{C\}$ einen eigentlichen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ enthalten. Dieser wäre auflösbar, denn $\mathfrak{H}\{C\}$ ist auflösbar, da $\mathfrak{H}$ als Untergruppe vom Index 2 in $\mathfrak{H}\{C\}$ invariant ist.

Der Normalteiler $\mathfrak{N} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{A}_k$ umfaßt die in $\mathfrak{Z}_k$ liegende zyklische Untergruppe $\mathfrak{Z}_l$ der Ordnung $l = k/2$ und das 2-Sylowkomplement $\mathfrak{O}_2(\mathfrak{H})$ von $\mathfrak{H}$. Der Durchschnitt von $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G})$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G})$ vom Index 2. Ist $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H}) \prec \mathfrak{N}$, so haben wir $\mathfrak{H} < \mathfrak{N}$, und $\mathfrak{N} = \mathfrak{H} \cdot \{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{D}_{2k}\}$ ist nach Induktionsannahme auflösbar. Sei daher $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H}) \not\prec \mathfrak{N}$. Wegen $2 \top (\mathfrak{H})$ können wir setzen $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{H}) = \{K\}$ mit $K^2 = E$, $K \notin \mathfrak{N}$.

$\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G}) = \{Z^l, C, K\}$ ist isomorph zu $\mathfrak{D}_{2\cdot 4}$. Die Elemente Z^l, C und K haben alle die Ordnung 2. C liegt im Zentrum von $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G})$. Z^l und K sind nicht vertauschbar, da sonst $\mathfrak{P}_2(\mathfrak{G})$ abelsch wäre. Z^l liegt nicht in $\mathfrak{N}$; denn sonst hätten wir $Z^l \in \mathfrak{N}$ und $Z^2 \in \mathfrak{N}$, also auch $Z \in \mathfrak{N}$, was nicht stimmt. Wegen $K \notin \mathfrak{N}$ liegt $Z^l K$ sicher in $\mathfrak{N}$. Wie leicht zu kontrollieren ist, hat das Produkt von zwei nicht vertauschbaren Elementen der Ordnung 2 in der Gruppe $\mathfrak{D}_{2\cdot 4}$ stets die Ordnung 4. Die 2-Sylowgruppe von $\mathfrak{N}$ ist also die von $Z^l K$ erzeugte zyklische Gruppe der Ordnung 4. Nach einem bekannten Satz von Burnside (s. [6] S. 141) besitzt daher $\mathfrak{N}$ einen Normalteiler $\mathfrak{M}$ vom Index 4. Dieser läßt sich zerlegen in $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}_l \cdot \mathfrak{Q}_2(\mathfrak{H})$, ist also nach Itô [3] auflösbar. Somit ist $\mathfrak{N}$ auflösbar und dann $\mathfrak{G}$ ebenfalls.

Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Beweis von Satz 2. Sei nun $\mathfrak{G}$ das Produkt der Diedergruppe $\mathfrak{D}_{2k}$ mit der p-Gruppe $\mathfrak{P}$. Wieder schließen wir mittels Induktion nach der Gruppenordnung.

a) Sei zunächst $(\mathfrak{P}) = p^n$ mit $p \neq 2$ und $p \mid k$. Wir können uns auf den Fall $\mathfrak{Z}_k \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{E}$ beschränken. Dann ist der Index von $\mathfrak{P}$ im Normalisator $\mathfrak{N}(\mathfrak{P})$ sicher durch p teilbar. Ist $\mathfrak{P}$ nicht maximal in $\mathfrak{G}$, so können wir wie bei Satz 1, c) annehmen, daß eine maximale Obergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{P}$ die Ordnung $2(\mathfrak{P})$ hat. Daher folgt $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{P} \lhd \mathfrak{G}$.

b) Sei $p \neq 2$, $p \nmid k$ und $2 \nmid k$. Eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ als Permutationsgruppe der Nebenklassen nach $\mathfrak{P}$ gibt $\mathfrak{D}_{2k}$ regulär wieder. Da die reguläre Darstellung von $\mathfrak{D}_{2k}$ nicht in $\mathfrak{A}_{2k}$ liegt [s. Satz 1, e)], ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{A}_{2k}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ vom Index 2. Wegen $p \neq 2$ liegt $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{N}$. Daher ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{P}\{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{D}_{2k}\}$; gemäß der Induktionsannahme oder nach Itô [3] ist $\mathfrak{N}$ auflösbar.

c) Sei nun $p \neq 2$, $p \nmid k$, aber $2 \mid k$. Das Zentrum von $\mathfrak{D}_{2k}$ enthält dann nicht nur das Einheitselement. Die Anzahl der Konjugierten eines von E verschiedenen Elementes aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{D}_{2k})$ ist daher eine Potenz von p. Nach einem bekannten Satz von Burnside (s. [6], S. 193) ist dann $\mathfrak{G}$ nicht einfach, sondern besitzt einen eigentlichen Normalteiler $\mathfrak{N}$. Ist $\mathfrak{N}\mathfrak{P} \neq \mathfrak{G}$, so haben wir $\mathfrak{N}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{D}_{2k}\}$, und diese Gruppe ist nach Induktionsannahme oder nach Itô [3] auflösbar, daher auch $\mathfrak{N}$. Ist aber $\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{P} = \mathfrak{G}$, so gilt $(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) = p^\beta$. Wegen $p \neq 2$ und $p \nmid k$ liegt dann $\mathfrak{D}_{2k}$ in $\mathfrak{N}$. Somit erlaubt $\mathfrak{N}$ die Zerlegung $\mathfrak{N} = \mathfrak{D}_{2k} \cdot \{\mathfrak{P} \cap \mathfrak{N}\}$ und ist nach Induktionsannahme auflösbar.

d) Sei schließlich $p = 2$ und $k = 2^\alpha l$. Dann ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}_l \cdot \mathfrak{P}_2(\mathfrak{G})$ das Produkt einer abelschen (sogar zyklischen) Gruppe mit einer p-Gruppe, ist daher nach Itô [3] auflösbar.

(Die Schlußweise unter c) ist dem Beweis von Itô in [3] entnommen.)

Beweis von Satz 3. Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{D}_{2j}$ das Produkt der beiden Diedergruppen $\mathfrak{D}_{2k}$ und $\mathfrak{D}_{2j}$. Der Nachweis der Auflösbarkeit wird abermals durch Induktion nach der Gruppenordnung erbracht.

a) Sei $\mathfrak{D}_{2k} \cap \mathfrak{D}_{2j} = \mathfrak{D} \neq \mathfrak{E}$. Ist $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D} \cap \mathfrak{Z}_j \neq \mathfrak{E}$, so gilt $\mathfrak{D}^* \lhd \mathfrak{D}_{2j}$. Nach [4] oder [7] existiert dann ein Normalteiler $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G}$, der in $\mathfrak{D}_{2k}$ liegt, also

auflösbar ist. Ist aber $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{Z}_j = \mathfrak{E}$, so hat $\mathfrak{D}$ nach Hilfssatz 2 die Ordnung 2, und es ist $\mathfrak{D}_{2j} = \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{Z}_j$. Damit folgt nun $\mathfrak{G} = \mathfrak{D}_{2k}\{\mathfrak{D}\mathfrak{Z}_j\} = \{\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{D}\}\mathfrak{Z}_j = \mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{Z}_j$, und $\mathfrak{G}$ ist auflösbar nach Satz 1 dieser Arbeit.

b) Seien $\mathfrak{D}_{2k}$ und $\mathfrak{D}_{2j}$ maximale Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Stellen wir $\mathfrak{G}$ dar als transitive Permutationsgruppe der Nebenklassen nach $\mathfrak{D}_{2k}$, so wird $\mathfrak{D}_{2j}$ dabei regulär dargestellt. Wir dürfen wieder annehmen, daß diese Darstellung treu ist, da sonst $\mathfrak{D}_{2k}$ einen eigentlichen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ enthalten würde. Die Darstellung von $\mathfrak{G}$ ist primitiv, da $\mathfrak{D}_{2k}$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist. Nach einem Satz von WIELANDT [9] ist eine primitive Permutationsgruppe, welche eine reguläre Diedergruppe enthält, zweifach transitiv. Die Gruppe $\mathfrak{D}_{2k}$ ist daher noch transitiv in $2j-1$ Symbolen dargestellt, woraus $2j-1 \mid 2k$ und dann $j \leq k$ folgt. In der gleichen Weise können wir aber $\mathfrak{G}$ auch darstellen als Permutationsgruppe der Nebenklassen nach $\mathfrak{D}_{2j}$, und wie eben ergibt sich dann $k \leq j$. Somit ist $k = j$. Wegen $2j-1 = 2k-1 \mid 2k$ folgt $k = j = 1$, $(\mathfrak{G}) \leq 4$ und $\mathfrak{G}$ ist auflösbar.

c) Sei nun $\mathfrak{D}_{2k}$ maximal in $\mathfrak{G}$, aber $\mathfrak{D}_{2j}$ nicht maximal in $\mathfrak{G}$. Wir dürfen wieder annehmen, daß eine maximale Obergruppe von $\mathfrak{D}_{2j}$ die Gestalt $\mathfrak{D}_{2j} \cdot \mathfrak{L}$ hat mit $(\mathfrak{L}) = 2$ und $\mathfrak{D}_{2k} = \mathfrak{Z}_k \cdot \mathfrak{L}$. Nun stellen wir $\mathfrak{G}$ wieder dar als transitive Permutationsgruppe der Nebenklassen nach $\mathfrak{D}_{2k}$. Wie eben ist diese Darstellung zweifach transitiv. Daher wird die Gruppe $\mathfrak{D}_{2k}$ noch transitiv und treu in $2j-1$ Symbolen dargestellt, ist aber gewiß keine reguläre Permutationsgruppe wegen $2k \neq 2j-1$. Diejenige Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{D}_{2k}$, welche noch ein weiteres der $2j-1$ Symbole fest läßt, ist somit von $\mathfrak{E}$ verschieden. $\mathfrak{U}$ enthält keinen Normalteiler von $\mathfrak{D}_{2k}$, da $\mathfrak{D}_{2k}$ in den $2j-1$ Symbolen transitiv ist. Nach Hilfssatz 2 hat $\mathfrak{U}$ die Ordnung 2. Daraus folgt nun $(\mathfrak{D}_{2k}) = 2k = (\mathfrak{U})(2j-1) = 2(2j-1)$, also $k = 2j-1 \not\equiv 0\ (2)$. $\mathfrak{G}$ erlaubt in den noch zu untersuchenden Fällen eine Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}_k\{\mathfrak{L}\,\mathfrak{D}_{2j}\}$. Nun stellen wir $\mathfrak{G}$ dar als Permutationsgruppe vom Grad $2k$ der Nebenklassen nach $\mathfrak{D}_{2j}$, wobei $\mathfrak{D}_{2k}$ als reguläre Permutationsgruppe erscheint. Wegen $2 \nmid k$ enthält $\mathfrak{D}_{2k}$ auch ungerade Permutationen [s. Beweis zu Satz 1, e)]. $\mathfrak{N} = \mathfrak{G} \cap \mathfrak{A}_{2k}$ ist daher ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ vom Index 2. $\mathfrak{Z}_k$ liegt in $\mathfrak{N}$, wie man der Zyklenzerlegung von Z entnimmt. Aus der Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}_k\{\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{D}_{2j}\}$ für $\mathfrak{G}$ folgt daher eine Zerlegung $\mathfrak{N} = \mathfrak{Z}_k\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{R} < \mathfrak{L}\,\mathfrak{D}_{2j}$. Da $\mathfrak{D}_{2k}$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist, können wir annehmen, daß $\mathfrak{D}_{2k}$ der Normalisator von $\mathfrak{Z}_k$ in $\mathfrak{G}$ ist. Der Normalisator von $\mathfrak{Z}_k$ in $\mathfrak{N}$ ist dann $\mathfrak{Z}_k$ selbst. Ist für ein geeignetes S $\mathfrak{Z}_k \neq \mathfrak{Z}_k^S$ und $\mathfrak{Z}_k \cap \mathfrak{Z}_k^S = \mathfrak{D} \neq \mathfrak{E}$, so ist $\mathfrak{D}$ charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{Z}_k^S$ und $\mathfrak{Z}_k$, also $\mathfrak{D} \lhd \mathfrak{D}_{2k}$ und $\mathfrak{D} \lhd \mathfrak{D}_{2k}^S$ und dann auch $\mathfrak{D} \lhd \{\mathfrak{D}_{2k}, \mathfrak{D}_{2k}^S\} = \mathfrak{G}$; denn wegen $\mathfrak{Z}_k^S \neq \mathfrak{Z}_k$ gilt auch $\mathfrak{D}_{2k}^S \neq \mathfrak{D}_{2k}$ und daher $\{\mathfrak{D}_{2k}^S, \mathfrak{D}_{2k}\} = \mathfrak{G}$, da $\mathfrak{D}_{2k}$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist. Ist aber stets $\mathfrak{Z}_k^S \cap \mathfrak{Z}_k = \mathfrak{E}$ für $\mathfrak{Z}_k^S \neq \mathfrak{Z}_k$, so folgt nach Hilfssatz 1, daß $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{N}$ invariant ist. $\mathfrak{R}$ ist als Untergruppe von $\mathfrak{L}\,\mathfrak{D}_{2j}$ auflösbar, denn $\mathfrak{L}\,\mathfrak{D}_{2j}$ ist auflösbar wegen $(\mathfrak{L}) = 2$. $\mathfrak{N}/\mathfrak{R} \cong \mathfrak{Z}_k$ ist ebenfalls auflösbar. Also ist auch $\mathfrak{N}$ auflösbar.

d) Zu behandeln ist nun noch der Fall, daß $\mathfrak{D}_{2k}$ und $\mathfrak{D}_{2j}$ beide nicht maximal in $\mathfrak{G}$ sind. Wir dürfen dann wieder annehmen, daß $\mathfrak{D}_{2k}$ und $\mathfrak{D}_{2j}$ in maximalen Untergruppen $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{D}_{2j}\mathfrak{K}$ enthalten sind und daß $(\mathfrak{L}) = (\mathfrak{K}) = 2$ ist. Wieder

gilt $\mathfrak{D}_{2k} = \mathfrak{Z}_k \cdot \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{D}_{2j} = \mathfrak{Z}_j \cdot \mathfrak{L}$. Stellen wir $\mathfrak{G}$ dar als Permutationsgruppe der Nebenklassen nach $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$, so wird wegen der Zerlegung $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}\} \cdot \mathfrak{Z}_j$ von $\mathfrak{G}$ die Untergruppe $\mathfrak{Z}_j$ regulär dargestellt, und diese Darstellung von $\mathfrak{G}$ ist primitiv. Wieder können wir annehmen, daß die Darstellung treu ist, da sonst $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$ einen auflösbaren Normalteiler von $\mathfrak{G}$ enthalten würde. Nach einem Satz von I. SCHUR ist eine primitive Permutationsgruppe von zusammengesetztem Grad, welche eine reguläre zyklische Gruppe enthält, zweifach transitiv (s. [5]; einen einfachen Beweis gab WIELANDT in [8]). Dies tritt also ein, falls j keine Primzahl ist. Ist aber j eine Primzahl, so ist nach einem Satz von BURNSIDE (s. [1] S. 341) die Gruppe $\mathfrak{G}$ auflösbar oder die eben angegebene Darstellung ist zweifach transitiv. Wir dürfen das letztere annehmen, so daß in jedem Falle die Darstellung zweifach transitiv ist. Diejenige Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$, welche noch eines der $j-1$ von $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$ transitiv permutierten Symbole fest läßt, enthält keinen Normalteiler von $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$, da $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$ in den $j-1$ Symbolen noch transitiv ist. Nun betrachten wir die Gruppe $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$ etwas genauer: $\mathfrak{D}_{2k}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$, da $\mathfrak{D}_{2k}$ wegen $(\mathfrak{L}) = 2$ in $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$ den Index 2 hat. Ist $k \neq 2$, so ist $\mathfrak{Z}_k$ eine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{D}_{2k}$, ist daher auch in $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$ invariant. (Der Fall $k = 2$ wurde schon in Satz 2 erledigt.) Ähnlich wie bei Hilfssatz 2 schließen wir nun, daß wegen $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{Z}_k = \mathfrak{E}$ die Ordnung von $\mathfrak{B}$ ein Teiler von 4 ist. Der Index von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{D}_{2k}\mathfrak{L}$, welcher $j-1$ ist, ist daher noch durch k teilbar. Daraus folgt $k < j$. Ebenso ist wegen der Symmetrie unserer Annahme auch $j < k$, was ein Widerspruch ist.

Literatur.

[1] BURNSIDE, W.: Theory of groups of finite order. Sec. edit. 1911. — [2] HUPPERT, B. Über das Produkt von paarweise vertauschbaren zyklischen Gruppen. Math. Z. **58**, 243—264 (1953). — [3] ITÔ, NOBORU: Remarks on factorisable groups. Acta Sci. Math. Szeged **14**, 83—84 (1951). — [4] ORE, O.: Contributions to the theory of groups of finite order. Duke Math. J. **5**, 431—460 (1938). — [5] SCHUR, I.: Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. Sitzgsber. Berl. Akad. **1933**, 598—623. — [6] SPEISER, A.: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl. 1937. — [7] SZÉP, J., u. L. RÉDEI: On factorisable groups. Acta Sci. Math. Szeged **13**, 235—238 (1950). — [8] WIELANDT, H.: Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. Math. Z. **40**, 582—587 (1936). — [9] WIELANDT, H.: Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. II. Math. Z. **52**, 384—393 (1950). — [10] WIELANDT, H.: Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen. Math. Z. **55**, 1—7 (1951).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 11. März 1953)

KNOCHE, H.-G.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 8—16 (1953)

Über den Frobeniusschen Klassenbegriff in nilpotenten Gruppen II[1]).

Von
HANS-GEORG KNOCHE.

Einleitung.

Um die Struktur von p-Gruppen zu untersuchen, ist es zweckmäßig, ein Maß für die Abweichung der Eigenschaften einer p-Gruppe von denen einer Abelschen Gruppe derselben Ordnung zu schaffen. So kann etwa die Länge der Zentralreihen oder die Länge der Reihe der Ableitungen als ein solches Maß angesehen werden. Wir führen im folgenden ein anderes ein, und zwar die *Breite* β einer p-Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn p^β die größtmögliche Anzahl von Elementen aus $\mathfrak{G}$ ist, die in einer Klasse konjugierter Elemente enthalten sind. Gruppen der Breite 0 sind genau die Abelschen, solche der Breite 1 sind früher bereits behandelt worden[1]).

Im 1. Abschnitt werden einige Eigenschaften von p-Gruppen beliebiger Breite angegeben. Dabei ergibt sich, daß Gruppen der Breite 2 höchstens die Klasse 3 (Satz 2) und Gruppen der Breite 3 höchstens die Klasse 4 haben können (Satz 3). Im 2. Abschnitt werden die Gruppen der Breite 2 näher untersucht. Es wird gezeigt, daß die FRATTINI-Gruppe dieser Gruppen Abelsch ist (Satz 4) und die Kommutatorgruppe höchstens die Ordnung p^3 haben kann (Satz 5 und 6), wodurch man einen Einblick in die Struktur dieser Gruppen gewinnt. Am Schluß werden Beispiele für Gruppen der Breite 2 angeführt.

Ich möchte Herrn Professor WIELANDT für die Ratschläge danken, die er mir bei der Abfassung dieser Arbeit erteilt hat.

1.1. Bezeichnungen.

Große Frakturbuchstaben bezeichnen endliche p-Gruppen, d.h. Gruppen mit einer Ordnung p^n, große lateinische Buchstaben Elemente dieser Gruppen. Die Glieder der aufsteigenden Zentralreihe einer Gruppe $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{Z}_i(\mathfrak{G}) = \mathfrak{Z}_i (i = 0, 1, \ldots, c)$, die der absteigenden Zentralreihe mit $\mathfrak{H}_j(\mathfrak{G}) = \mathfrak{H}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, c+1)$, wobei $c(\mathfrak{G}) = c$ die Klasse von $\mathfrak{G}$ ist[2]). $\Phi(\mathfrak{G}) = \Phi$ bezeichne die FRATTINI-Gruppe von $\mathfrak{G}$[3]). $(A, B) = A^{-1}B^{-1}AB$ ist der Kommutator von A und B, $(A, B, C) = \big((A, B), C\big)$ der Kommutator von (A, B) und C. Sind $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ beliebige Gruppen, so verstehen wir unter $(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ die

[1]) Der erste Teil dieser Arbeit erschien in Math. Z. **55**, 71—82 (1951); er wird im folgenden mit „I" zitiert.

[2]) ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie, S. 104 u. 118. 1937.

[3]) a. a. O. [2]), S. 44.

von allen Kommutatoren (H_1, H_2) erzeugte Gruppe, mit $H_i \in \mathfrak{H}_i$. Entsprechend soll unter $(\mathfrak{H}, A)$ die von allen Kommutatoren (H, A) mit $H \in \mathfrak{H}$ erzeugte Gruppe verstanden werden. Sind $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ Komplexe von Elementen einer Gruppe, so bezeichnet $\{\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2\}$ die von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ erzeugte Gruppe. $\mathfrak{N}_0(A)$ ist der Normalisator eines Elementes $A \in \mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}_1(A)$ der Normalisator erster Stufe (I, S. 72ff.) von A, d. i. die Gesamtheit der Elemente $X \in \mathfrak{G}$, für die der Kommutator (X, A) in $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G})$ liegt. Die Gruppe $(\mathfrak{N}_1(A), A)$ wird mit $\mathfrak{Z}^*(A)$ bezeichnet. Unter $(\mathfrak{H})$ verstehen wir die Ordnung von $\mathfrak{H}$. Ist $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so bezeichnet $\mathfrak{G} - \mathfrak{H}$ die zu $\mathfrak{H}$ komplementäre Menge der Elemente von $\mathfrak{G}$.

1.2. Einige bekannte Eigenschaften von p-Gruppen.

a) $\mathfrak{G}$ ist auflösbar und jede Untergruppe von $\mathfrak{G}$ kommt in einer Kompositionsreihe von $\mathfrak{G}$ vor[4]). b) Der Normalisator einer echten Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist von ihr verschieden[4]). Daher ist jede Untergruppe vom Index p unter $\mathfrak{G}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$. c) Der Durchschnitt zweier Normalteiler vom Index p unter $\mathfrak{G}$ hat den Index p^2 unter $\mathfrak{G}$[5]). d) Es gelten die Formeln[6]) $(A, BC) = (A, C)\,(A, B)\,(A, B, C)$, $(AB, C) = (A, C)\,(A, C; B)\,(B, C)$. Ist der Kommutator (A, B) mit C vertauschbar, so wird $(A, B, C) = E$ und $(A, BC) = (A, C)\,(A, B)$. e) Ist $\mathfrak{N}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}_{i+1}(\mathfrak{G}) \leqq \mathfrak{N}$, jedoch $\mathfrak{H}_i \not\leqq \mathfrak{N}$, so ist $c(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) = i$ und umgekehrt[7]). f) Eine Gruppe der Ordnung $\leq p^2$ ist Abelsch; daher enthält ein Normalteiler vom Index $\leq p^2$ unter $\mathfrak{G}$ die Kommutatorgruppe $\mathfrak{H}_2(\mathfrak{G})$. Eine Gruppe der Ordnung p^3 hat die Klasse ≤ 2[8]). g) Ist $\mathfrak{H}$ eine echte Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so gilt $\{\mathfrak{G} - \mathfrak{H}\} = \mathfrak{G}$.

1.3. Über den Begriff der Breite in p-Gruppen.

Definition 1. Die Anzahl der mit $A \in \mathfrak{G}$ konjugierten Elemente $H^{-1}AH$, die bei Transformation von A mit allen Elementen der Untergruppe $\mathfrak{H} \leqq \mathfrak{G}$ entstehen, sei p^a; dann heiße *a die Breite von A unter $\mathfrak{H}$*. Wir schreiben dafür $a = \beta(A^{\mathfrak{H}})$.

Insbesondere nennen wir $\beta(A^{\mathfrak{G}}) = \beta(A)$ kürzer die *Breite von A* oder auch die *Breite der Klasse von A*. Ist $\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{G}$ Normalteiler von $\mathfrak{N}\mathfrak{H}$, so gibt es unter den Breiten der Elemente $N \in \mathfrak{N}$ unter $\mathfrak{H}$ eine größte. Sie heiße die Breite von $\mathfrak{N}$ unter $\mathfrak{H}$. Wir schreiben dafür $\beta(\mathfrak{N}^{\mathfrak{H}})$. Die Breite einer Untergruppe $\mathfrak{H} \leqq \mathfrak{G}$ unter $\mathfrak{H}$, d. i. die größte Breite, die ein Element $H \in \mathfrak{H}$ unter $\mathfrak{H}$ haben kann, nennen wir kürzer die Breite von $\mathfrak{H}$ und schreiben dafür $\beta(\mathfrak{H})$.

Sind $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}^*$ beliebige Untergruppen von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}$ Normalteiler von $\mathfrak{H}$, $A \in \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H} \leqq \mathfrak{H}^*$, so bestehen folgende Beziehungen: a) $\beta(A^{\mathfrak{H}}) \leq \beta(A^{\mathfrak{H}^*})$.

[4]) SPEISER, A.: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 2. Aufl., S. 69. 1927.
[5]) a. a. O. [4]), Satz 24.
[6]) HALL, P.: A contribution to the theory of groups of prime-power order. Proc London Math. Soc. (2) **36**, 43 (1934).
[7]) a. a. O. [5]), p. 52.
[8]) a. a. O. [3]), S. 105.

b) $\beta(A\,\mathfrak{N}^{\mathfrak{H}/\mathfrak{N}}) \leq \beta(A^{\mathfrak{H}})$. c) Die umfassendste Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die der Gleichung $\beta(\mathfrak{N}^{\tilde{\mathfrak{H}}}) = 0$ genügt, ist der Zentralisator $\tilde{\mathfrak{H}}$ von $\mathfrak{N}$. d) Genau dann gilt $\beta(\mathfrak{H}) = 0$, wenn $\mathfrak{H}$ Abelsch ist.

Satz 1. *Die Breite eines direkten Produktes von p-Gruppen ist gleich der Summe der Breiten der direkten Faktoren.*

Beweis. Es genügt, den Satz für direkte Produkte $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$ von zwei Faktoren zu beweisen.

Sei $A \in \mathfrak{G}_1$ ein Element der Breite a und $B \in \mathfrak{G}_2$ von der Breite b. Der Normalisator von A umfaßt $\mathfrak{G}_2$, der von B umfaßt $\mathfrak{G}_1$. Dann wird $\mathfrak{G}_1$ AB in p^a konjugierte Elemente der Gestalt ABK transformieren, wo $K \in (\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1)$. Jedes dieser Elemente wird aber durch Transformation mit Elementen von $\mathfrak{G}_2$ in p^b Elemente der Gestalt $ABKK'$ transformiert, mit $K' \in (\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_2)$. Diese Elemente sind alle verschieden, so daß AB die Breite $a+b$ hat.

1.4. Einige Sätze über p-Gruppen.

Hilfssatz 1. *Es sei $A \in \mathfrak{G}$, $\beta(A) = 2$ und $\mathfrak{N}_0(A)$ nicht Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Gibt es dann ein Element $B \in \mathfrak{G}$ mit $\beta(B) \leq 2$, welches nicht in dem Normalisator $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{N}_0(A)$ liegt, so hat $\bigcap_{X \in \mathfrak{G}} X^{-1}\mathfrak{N}_0(A)\,X$ den Index p^3 unter $\mathfrak{G}$.*

Beweis. $\mathfrak{N}$ ist eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, also Normalteiler (1.2, b); denn $\mathfrak{N}_0(A)$ ist von $\mathfrak{N}$ verschieden (1.2, b) und wäre $\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$, so wäre $\mathfrak{N}_0(A)$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

Der Durchschnitt $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{N}_0(A) \cap B^{-1}\mathfrak{N}_0(A)\,B$ zentralisiert A und $B^{-1}AB = A(A, B)$ und damit auch $(A, B) = K$; es gilt $\mathfrak{D}_1 \subseteq \mathfrak{N}_0(K)$. Als Durchschnitt zweier verschiedener maximaler Untergruppen von $\mathfrak{N}$ ist $\mathfrak{D}_1$ Normalteiler von $\mathfrak{N}$ mit dem Index p^2 unter $\mathfrak{N}$ (1.2, c), also mit dem Index p^3 unter $\mathfrak{G}$. Die Behauptung von Hilfssatz 1 läuft also darauf hinaus, daß $\bigcap_{X \in \mathfrak{G}} X^{-1}\mathfrak{N}_0(A)\,X = \mathfrak{D}_1$.

Der Durchschnitt $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{N}_0(B) \cap A^{-1}\mathfrak{N}_0(B)\,A$ zentralisiert B und $A^{-1}BA = B(B, A)$, also auch $(B, A) = K^{-1}$; es gilt $\mathfrak{D}_2 \subseteq \mathfrak{N}_0(K)$. Wenn $\mathfrak{D}_2$ von $\mathfrak{N}_0(B)$ verschieden ist, ist $\mathfrak{N}_0(B)$ nicht Normalteiler, und man findet wie bei $\mathfrak{D}_1$, daß $\mathfrak{D}_2$ den Index p^3 unter $\mathfrak{G}$ hat. Der Index von $\mathfrak{D}_2$ unter $\mathfrak{G}$ ist höchstens p^3.

Da $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{N}$ und B erzeugt wird, ist $\bigcap_i B^{-i}\mathfrak{N}_0(A)\,B^i = \bigcap_{X \in \mathfrak{G}} X^{-1}\mathfrak{N}_0(A)\,X$, $(i = 0, 1, \ldots, p-1)$.

Ist $\mathfrak{D}_1$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so gilt $\mathfrak{D}_1 \subseteq \bigcap_{X \in \mathfrak{G}} X^{-1}\mathfrak{N}_0(A)\,X$. Andererseits ist aber $\bigcap_{X \in \mathfrak{G}} X^{-1}\mathfrak{N}_0(A)\,X \subseteq \mathfrak{D}_1$, folglich $\mathfrak{D}_1 = \bigcap_{X \in \mathfrak{G}} X^{-1}\mathfrak{N}_0(A)\,X$.

1. Ist $\mathfrak{N}_0(K)$ Normalteiler oder $(K, B) \in \mathfrak{Z}_1$, so wird $\mathfrak{N}_0(B^{-i}KB^i) = B^{-i}\mathfrak{N}_0(K)\,B^i = \mathfrak{N}_0(K)$ $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$, so daß $\mathfrak{N}_0(K)$ auch $B^{-i}KB^i = K(K, B^i)$, also (K, B^i) zentralisiert. Nun gilt (1.2, d) $(A, B^{i+1}) = (A, B^i)\,(A, B)\,(A, B, B^i)$. Für $i = 1$ zentralisiert $\mathfrak{N}_0(K)$ alle Elemente der rechten Seite dieser Gleichung, also auch (A, B^2), ebenso (A, B^3), ... und (A, B^{p-1}). Daher zentralisiert $\mathfrak{D}_1 \subseteq \mathfrak{N}_0(K)$ $A(A, B^i) = B^{-i}AB^i$ für $i = 1, \ldots, p-1$. Das bedeutet, daß $\mathfrak{D}_1$ in jedem Normalisator $\mathfrak{N}_0(B^{-i}AB^i) = B^{-i}\mathfrak{N}_0(A)\,B^i$ für $i = 0, \ldots, p-1$ enthalten ist, also auch in deren Durchschnitt $\bigcap_i B^{-i}\mathfrak{N}_0(A)\,B^i$.

Und da andererseits dieser Durchschnitt in $\mathfrak{T}_1$ liegt, wird $\mathfrak{T}_1 = \bigcap_i B^{-i}\mathfrak{N}_0(A)B^i = \bigcap_{X\in\mathfrak{G}} X^{-1}\mathfrak{N}_0(A)X$.

2. Wir unterscheiden nun die Fälle a) $\mathfrak{N}_0(K) \not\subseteq \mathfrak{N}$ und b) $\mathfrak{N}_0(K) \subseteq \mathfrak{N}$.

a) Wir können wegen 1. annehmen, daß $\mathfrak{N}_0(K)$ nicht Normalteiler ist. Dann ist $\mathfrak{N}_0(K)$ in einer maximalen Untergruppe $\mathfrak{N}' \neq \mathfrak{N}$ enthalten (1.2, b), und $\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{N}_0(K)$ liegt in $\mathfrak{T} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}'$. $\mathfrak{T}$ ist ein Normalteiler des Index p^2 unter $\mathfrak{G}$ (1.2, c) und von $\mathfrak{N}_0(A)$ verschieden, da $\mathfrak{N}_0(A)$ nicht Normalteiler sein sollte, ebenso von $B^{-1}\mathfrak{N}_0(A)B$ verschieden. Somit liegt $\mathfrak{T}_1$ im Durchschnitt zweier verschiedener maximaler Untergruppen von $\mathfrak{N}$ und muß wegen der Ordnung von $\mathfrak{T}_1$ mit diesem Durchschnitt übereinstimmen (1.2, c), $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T} \cap \mathfrak{N}_0(A)$ und entsprechend $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T} \cap B^{-1}\mathfrak{N}_0(A)B$. Damit wird $B^{-1}\mathfrak{T}_1 B = B^{-1}\mathfrak{T}B \cap B^{-1}\mathfrak{N}_0(A)B = \mathfrak{T} \cap B^{-1}\mathfrak{N}_0(A)B = \mathfrak{T}_1$ und weiter $B^{-2}\mathfrak{T}_1 B^2 = B^{-1}\mathfrak{T}_1 B = \mathfrak{T}_1$, usw. $\mathfrak{T}_1$ ist Normalteiler, woraus dann unsere Behauptung folgt, wie wir oben gezeigt haben.

b) Wir setzen in diesem Falle $(K, B) \notin \mathfrak{Z}_1$ voraus, was wegen 1. keine Einschränkung bedeutet.

Da $\mathfrak{T}_2 \subseteq \mathfrak{N}_0(K)$ liegt $\{K, \mathfrak{T}_2\}$ in $\mathfrak{N}_0(K) \subseteq \mathfrak{N}$. Andererseits ist $\mathfrak{T}_2$ in einer maximalen Untergruppe $\mathfrak{N}''$ von $\mathfrak{G}$ enthalten, die $\mathfrak{N}_0(B)$ enthält [1.2, b, und da $\mathfrak{N}_0(B) = \mathfrak{G}$ $B \in \mathfrak{Z}_1 < \mathfrak{N}_0(A) < \mathfrak{N}$ bedeuten würde]. $\mathfrak{N}''$ ist von $\mathfrak{N}$ verschieden, da $B \notin \mathfrak{N}$. $\mathfrak{N}''$ enthält auch K (1.2, f), mithin $\{K, \mathfrak{T}_2\}$. Also ist $\{K, \mathfrak{T}_2\} \subseteq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}''$. Nun hat $\mathfrak{T}_2$ höchstens den Index p^3 unter $\mathfrak{G}$, und wegen $(K, B) \notin \mathfrak{Z}_1$ ist $K \notin \mathfrak{T}_2$, so daß $\{K, \mathfrak{T}_2\}$ höchstens den Index p^2 unter $\mathfrak{G}$ hat. Folglich ist $\{K, \mathfrak{T}_2\} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}''$ (1.2, c) Normalteiler von $\mathfrak{G}$, also auch $\mathfrak{N}_0(K)$, womit dieser Fall auf 1. zurückgeführt ist.

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{L}$ ein Komplex von Elementen $L_i \in \mathfrak{G}$ mit $\beta(L_i) \leq 2$. Dann gilt $c(\{\mathfrak{L}\}) \leq 3$.*

Beweis. Die Elemente $L_i \in \mathfrak{L}$ mögen die Untergruppe $\mathfrak{B}$ erzeugen, $\{\mathfrak{L}\} = \mathfrak{B}$. Dann gilt $\beta(L_i^{\mathfrak{B}}) \leq \beta(L_i) \leq 2$ (1.3, a).

1. Gibt es ein $L_1 \in \mathfrak{L}$ mit $\beta(L_1^{\mathfrak{B}}) \leq 1$, so enthält $\mathfrak{N}_0(L_1)$*) die Kommutatorgruppe $\mathfrak{H}_2(\mathfrak{B})$ (1.2, b und f).

2. Gibt es ein $L_2 \in \mathfrak{L}$ mit $\beta(L_2^{\mathfrak{B}}) = 2$ und ist a) $\mathfrak{N}_0(L_2)$ Normalteiler von $\mathfrak{B}$, so gilt auch $\mathfrak{N}_0(L_2) \supseteq \mathfrak{H}_2(\mathfrak{B})$ (1.2, f). b) Wenn $\mathfrak{N}_0(L_2)$ nicht Normalteiler von $\mathfrak{B}$ ist, so sei $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{B}$ der Normalisator von $\mathfrak{N}_0(L_2)$ in $\mathfrak{B}$. Dann ist $\mathfrak{L}$ nicht in $\mathfrak{N}$ enthalten, da $\{\mathfrak{L}\} = \mathfrak{B}$. Es gibt also ein $L \in \mathfrak{L}$, welches nicht in $\mathfrak{N}$ liegt. Nach Hilfssatz 1 hat dann $\mathfrak{T} = \bigcap_{X\in\mathfrak{B}} X^{-1}\mathfrak{N}_0(L_2)X$ den Index p^3 unter $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$ hat die Ordnung p^3 und (1.2, f) die Klasse ≤ 2, so daß $\mathfrak{T} \supseteq \mathfrak{H}_3(\mathfrak{B})$ gilt (1.2, e), also $\mathfrak{H}_3(\mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{N}_0(L_2)$.

Wegen $\mathfrak{H}_3(\mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{H}_2(\mathfrak{B})$ gilt somit $\mathfrak{H}_3(\mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{N}_0(L_i)$ für alle $L_i \in \mathfrak{L}$, oder $(\mathfrak{H}_3(\mathfrak{B}), \mathfrak{L}) = (\mathfrak{H}_3(\mathfrak{B}), \{\mathfrak{L}\}) = \mathfrak{E}$. Folglich ist $\mathfrak{H}_3(\mathfrak{B})$ in $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{B})$, $\mathfrak{H}_4(\mathfrak{B})$ in $\mathfrak{E}$ enthalten und $c(\mathfrak{B}) \leq 3$ (1.2, e).

Korollar. *Ist $\beta(\mathfrak{G}) = 2$, so gilt $c(\mathfrak{G}) \leq 3$.*

Satz 3. *Ist $\beta(\mathfrak{G}) = 3$, so gilt $c(\mathfrak{G}) \leq 4$.*

*) $\mathfrak{N}_0(L_i)$ bedeutet den Normalisator von L_i in $\mathfrak{B}$.

Beweis. Der Zentralisator $\mathfrak{C}(\mathfrak{Z}_2)=\mathfrak{C}$ ist von $\mathfrak{G}$ verschieden, da $\mathfrak{G}$ nicht Abelsch ist. Wenn $A\in\mathfrak{G}-\mathfrak{C}$, gilt in der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1$ $\beta(A\mathfrak{Z}_1)<\beta(A)$; denn wäre $\beta(A\mathfrak{Z}_1)=\beta(A)$, müßte (I, S. 73) $\mathfrak{N}_1(A)/\mathfrak{Z}_1=\mathfrak{N}_0(A\mathfrak{Z}_1)=\mathfrak{N}_0(A)/\mathfrak{Z}_1$, d.h. $\mathfrak{N}_1(A)=\mathfrak{N}_0(A)$ sein; und da stets $\mathfrak{Z}_2\leqq\mathfrak{N}_1(A)$ (I, Satz 1) gilt, wäre $\mathfrak{Z}_2\leqq\mathfrak{N}_0(A)$, also $A\in\mathfrak{C}$. Folglich haben alle Elemente von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1-\mathfrak{E}/\mathfrak{Z}_1$ höchstens die Breite 2. Dann hat nach Satz 2 $\{\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1-\mathfrak{C}/\mathfrak{Z}_1\}=\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1$ (1.2, g) höchstens die Klasse 3. Daher ist $c(\mathfrak{G})\leqq 4$.

2. Gruppen der Breite 2.

Im folgenden bezeichnet $\mathfrak{G}$ immer eine p-Gruppe der Breite 2 ($p>2$). Wir haben bereits in Satz 2 gesehen, daß $\mathfrak{G}$ höchstens die Klasse 3 hat. Dieses Ergebnis gestattet uns, weitere Sätze über diese Gruppen anzugeben.

Satz 4. *$\Phi(\mathfrak{G})$ ist Abelsch.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $X^p\in\mathfrak{Z}_2$, $X^{p^2}\in\mathfrak{Z}_1$ für jedes $X\in\mathfrak{G}$. Der Zentralisator $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{Z}_2$ ist von $\mathfrak{G}$ verschieden, da $\mathfrak{G}$ nicht Abelsch ist. Für $A\in\mathfrak{G}-\mathfrak{C}$ gilt $\mathfrak{N}_1(A)>\mathfrak{N}_0(A)$; denn andernfalls wäre $\mathfrak{Z}_2\leqq\mathfrak{N}_1(A)=\mathfrak{N}_0(A)$ (I, Satz 1), mithin $(\mathfrak{Z}_2,A)=\mathfrak{E}$, $A\in\mathfrak{C}$. Da $\mathfrak{N}_0(A)$ höchstens den Index p^2 unter $\mathfrak{G}$ hat, ist der Index von $\mathfrak{N}_1(A)\leqq p$. Sei $X\in\mathfrak{G}$, so wird $X^p\in\mathfrak{N}_1(A)$, also $(X^p,A)\in\mathfrak{Z}_1$. Daher wird $(X^p,\mathfrak{G}-\mathfrak{C})\leqq\mathfrak{Z}_1$, folglich auch $(X^p,\{\mathfrak{G}-\mathfrak{C}\})=(X^p,\mathfrak{G})\leqq\mathfrak{Z}_1$ (1.2, g), $X^p\in\mathfrak{Z}_2$. Ferner ist $X^{p^2}\in\mathfrak{N}_0(A)$ für alle $A\in\mathfrak{G}$, mithin $X^{p^2}\in\mathfrak{Z}_1$. Somit wird (1.2, d) $(X,Y^p)^p=(X^p,Y^p)=(X,Y^{p^2})=E$ für beliebige Elemente $X,Y\in\mathfrak{G}$. Alle p-ten Potenzen sind miteinander vertauschbar. Nun ist $\mathfrak{Z}_2$ in dem Zentralisator $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{H}_2$ enthalten[9]), und wegen $\mathfrak{H}_2\leqq\mathfrak{Z}_2$ gilt auch $\Phi\leqq\mathfrak{Z}_2\leqq\mathfrak{M}$, da Φ von allen X^p, für $X\in\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{H}_2$ erzeugt wird. Daraus ergibt sich die Behauptung.

Hilfssatz 2. *Ist $c(\mathfrak{G})=2$, so wird $\mathfrak{G}$ von allen Elementen der Breite 2 erzeugt.*

Beweis. Die Elemente der Breite 2 erzeugen den Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$. Wenn $Z\in\mathfrak{Z}_1$, ist für jedes $X\in\mathfrak{G}$ $\beta(XZ)=\beta(X)$. Für R mit $\beta(R)=2$ gilt $\beta(RZ)=2$, also $RZ=R'\in\mathfrak{N}$ und $Z\in\mathfrak{N}$; es ist $\mathfrak{Z}_1<\mathfrak{N}$. Ist $\mathfrak{N}\neq\mathfrak{G}$, so sei $A\in\mathfrak{G}$ nicht in $\mathfrak{N}$. Dann ist für $AR=B$ $\beta(B)=1$, wenn $\beta(R)=2$. Nun ist wegen $c(\mathfrak{G})=2$ $\mathfrak{N}_1(A)=\mathfrak{N}_1(B)=\mathfrak{G}$ (I, Satz 1), so daß $\mathfrak{Z}^*(A)$ wegen $\mathfrak{N}_1(A)/\mathfrak{N}_0(A)\cong\mathfrak{Z}^*(A)$ (I, S. 73) die Ordnung p hat, ebenso $\mathfrak{Z}^*(B)$. Ist $\mathfrak{Z}^*(A)\cap\mathfrak{Z}^*(B)\neq\mathfrak{E}$, muß $\mathfrak{Z}^*(A)=\mathfrak{Z}^*(B)$ sein und daher $(\mathfrak{G},A^{-1}B)=\mathfrak{Z}^*(A^{-1}B)\leqq\mathfrak{Z}^*(A)$. Folglich hätte $A^{-1}B=R$ eine Breite $\leqq 1$, was nicht sein sollte. Also ist $\mathfrak{Z}^*(A)\cap\mathfrak{Z}^*(B)=\mathfrak{E}$.

Gibt es nun ein Element $X\in\mathfrak{G}$, das mit $A^{-1}B$, jedoch nicht mit AB vertauschbar ist, so wird $(X,A^{-1}B)=(X,A^{-1})(X,B)=E$ (1.2, d), also $(X,A)=(X,B)\neq E$, was wegen $\mathfrak{Z}^*(A)\cap\mathfrak{Z}^*(B)=\mathfrak{E}$ nicht sein kann. Folglich haben $A^{-1}B$ und AB denselben Normalisator und dieselbe Breite $\beta(A^{-1}B)=\beta(AB)=2$. Es ist $A^{-1}B\in\mathfrak{N}$ und $AB\in\mathfrak{N}$, also auch $A^2\in\mathfrak{N}$ und deshalb wegen $p>2$ auch $A\in\mathfrak{N}$ gegen die Voraussetzung.

Satz 5. *Ist $c(\mathfrak{G})=2$, dann gilt: a) Wenn $\Phi\leqq\mathfrak{Z}_1$, ist $\mathfrak{H}_2$ elementar Abelsch und $(\mathfrak{H}_2)\leqq p^3$. Ist $(\mathfrak{H}_2)=p^3$, so enthält $\mathfrak{G}$ kein Element der Breite 1. b) Wenn $\Phi\not\leqq\mathfrak{Z}_1$, ist $\mathfrak{H}_2$ zyklisch, $(\mathfrak{H}_2)=p^2$, und $\mathfrak{G}$ enthält Elemente der Breite 1.*

[9]) a. a. O. [2]), S. 121.

Beweis. a) Wenn $\Phi \leqq \mathfrak{Z}_1$, liegt $X^p \in \mathfrak{Z}_1$ für $X \in \mathfrak{G}$, und es wird $(X, Y)^p = (X^p, Y) = E$ (1.2, d) für alle $Y \in \mathfrak{G}$. $\mathfrak{H}_2$ ist elementar Abelsch. Nun sei $(\mathfrak{H}_2) \geq p^3$. Wir nehmen an, es gäbe $T \in \mathfrak{G}$ mit $\beta(T) = 1$. Dann ist wegen $c(\mathfrak{G}) = 2$ $\mathfrak{N}_1(T) = \mathfrak{G}$ und $(\mathfrak{Z}^*(T)) = p$ (I, S. 73). Die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}^*(T) = \mathfrak{G}^*$ ist $\mathfrak{H}_2(\mathfrak{G}^*) = \mathfrak{H}_2(\mathfrak{G})/\mathfrak{Z}^*(T)$, da $\mathfrak{Z}^*(T) < \mathfrak{H}_2(\mathfrak{G})$. Es ist $(\mathfrak{H}_2(\mathfrak{G}^*)) \geq p^2$ und $\beta(\mathfrak{G}^*) = 2$ (1.3, b und I, Satz 2). Sei $A \in \mathfrak{G}$ und $\beta(A\,\mathfrak{Z}^*(T)) = 2$. Dann muß $\mathfrak{Z}^*(A) \cap \mathfrak{Z}^*(T) = \mathfrak{E}$ sein; denn sonst gäbe es $Y \in \mathfrak{G} = \mathfrak{N}_1(A)$ mit $(Y, A) \neq E$, $(Y, A) \in \mathfrak{Z}^*(T)$, und $A\,\mathfrak{Z}^*(T)$ würde von $\{Y, \mathfrak{N}_0(A)\}/\mathfrak{Z}^*(T)$ zentralisiert, einem Normalteiler vom Index p unter $\mathfrak{G}^*$, hätte also nicht die Breite 2. Wegen $(T, A) \in \mathfrak{Z}^*(A) \cap \mathfrak{Z}^*(T) = \mathfrak{E}$ muß $A \in \mathfrak{N}_0(T)$ gelten. Andererseits erzeugen alle $A\,\mathfrak{Z}^*(T)$ mit $\beta(A\,\mathfrak{Z}^*(T)) = 2$ nach Hilfssatz 2 schon die ganze Gruppe $\mathfrak{G}^*$, was nicht sein kann, wenn sie in $\mathfrak{N}_0(T)/\mathfrak{Z}^*(T)$ liegen. Für $(\mathfrak{H}_2) \geq p^3$ enthält $\mathfrak{G}$ kein Element der Breite 1.

Nun sei $(\mathfrak{H}_2) > p^3$, $A \in \mathfrak{G}$ mit $\beta(A) = 2$, $\mathfrak{Z}^*(A) = \{A_1, A_2\}$. Dann hat $\mathfrak{Z}^*(A\,\{A_1\}) = \mathfrak{Z}^*(A)/\{A_1\}$ in $\mathfrak{G}/\{A_1\}$ die Ordnung p, $\mathfrak{N}_0(A\,\{A_1\})$ den Index p unter $\mathfrak{G}/\{A_1\}$ (I, S. 73), also $A\,\{A_1\}$ die Breite 1. Aber die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}/\{A_1\}$ hat eine Ordnung $\geq p^3$. Wie wir oben gesehen haben, kann $\mathfrak{G}/\{A_1\}$ dann kein Element der Breite 1 enthalten. Es ist $(\mathfrak{H}_2) \leq p^3$.

b) Da $\Phi \nleqq \mathfrak{Z}_1$, gibt es ein $A \in \mathfrak{G}$ so, daß $A^p \notin \mathfrak{Z}_1$. A^p liegt sicher nicht in allen Normalisatoren. Sei $A^p \notin \mathfrak{N}_0(B)$; dann ist $\mathfrak{Z}^*(B) \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{N}_0(B)$ (I, S. 73) zyklisch von der Ordnung p^2, $(A, B) = K \neq E$ und $(A, B)^p = (A^p, B) = K^p \neq E$ (1.2, d).

Wir wählen $X \in \mathfrak{G} - \mathfrak{N}$, wobei $\mathfrak{N} = \{A^p, \mathfrak{N}_0(B)\}$. Dann liegt X in einer Nebengruppe $A^i \mathfrak{N}_0(B)$, wobei $i \not\equiv 0 (p)$. Es wird (1.2, d) $(X, B) = (A^i, B) = (A, B)^i = K^i$. Weil $K^{ip} = (X, B)^p = (X, B^p) \neq E$, muß $\beta(X) = 2$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_0(X)$ zyklisch sein; denn sonst wäre $B^p \in \mathfrak{N}_0(X)$. Ferner ist $\mathfrak{Z}^*(X) = \mathfrak{Z}^*(B) = \{K\}$. Ist $X_1 \in \mathfrak{G} - \mathfrak{N}$ von X verschieden, so wird auch $\mathfrak{Z}^*(X_1) = \{K\}$, folglich (1.2, d) $\mathfrak{Z}^*(X_1 X) \leqq \{K\}$. Daher gilt $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G} - \mathfrak{N}) = (\mathfrak{G}, \{\mathfrak{G} - \mathfrak{N}\}) = \{K\}$, also (1.2, g) $\mathfrak{H}_2 = \{K\}$.

Nun ist $(A^p, B^p) = (A, B)^{p^2} = E$, jedoch $(A, B^p) \neq E$, und daher $\mathfrak{N} = \{A^p, \mathfrak{N}_0(B)\} = \mathfrak{N}_0(B^p)$, folglich $\beta(B^p) = 1$.

Satz 6. *Ist $c(\mathfrak{G}) = 3$, so gilt: a) $\beta(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_3) = 1$. b) $\mathfrak{G}/\mathfrak{M} \cong \mathfrak{H}_3$, wobei $\mathfrak{M}$ der Zentralisator von $\mathfrak{H}_2$ ist; $(\mathfrak{H}_3) = p^h$, $(\mathfrak{H}_2) = p^{h+1}$, wenn $h = \beta(\mathfrak{H}_2^{\mathfrak{G}})$; es ist $h = 1, 2$.*

Beweis. a) Gäbe es in $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_3$ ein Element $A\,\mathfrak{H}_3$ der Breite 2, so wäre $A \in \mathfrak{M}$; denn andernfalls wäre $(\mathfrak{H}_2, A) \neq \mathfrak{E}$ und daher $\mathfrak{N}_0(A\,\mathfrak{H}_3) \geqq \{\mathfrak{H}_2, \mathfrak{N}_0(A)\}/\mathfrak{H}_3$ größer als $\mathfrak{N}_0(A)/\mathfrak{H}_3$, also $\beta(A\,\mathfrak{H}_3) < \beta(A)$. Alle Elemente der Breite 2 von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_3$ lägen in einer echten Untergruppe $\mathfrak{M}/\mathfrak{H}_3$ von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_3$. Andererseits erzeugen sie nach Hilfssatz 2 die ganze Gruppe, was dann nicht sein könnte. Also ist $\beta(\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_3) = 1$.

b) Nach einem früheren Satz hat die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_3$ die Ordnung p (I, Satz 2). $\mathfrak{H}_2$ wird also von einem Element $H_2 \in \mathfrak{H}_2$, welches nicht in $\mathfrak{H}_3$ liegt, und $\mathfrak{H}_3$ erzeugt. Folglich haben alle Elemente von $\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_3$ denselben Normalisator, der der Zentralisator $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{H}_2$ ist, da $\mathfrak{H}_3 \leqq \mathfrak{Z}_1$. Deshalb hat $\mathfrak{M}$ den Index p^h unter $\mathfrak{G}$, wobei $h = \beta(H_2) = \beta(\mathfrak{H}_2^{\mathfrak{G}})$.

Mit Hilfe des oben gewählten Elementes H_2 erzeugen wir durch die Abbildung $X \to (X, H_2)$ für $X \in \mathfrak{G}$ einen Homomorphismus von $\mathfrak{G}$, weil $(XY, H_2) = (X, H_2)(Y, H_2)$ (1.2, d). Da nun $\{H_2, \mathfrak{H}_3\} = \mathfrak{H}_2$, ist $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_2) = (\mathfrak{G}, H_2) = \mathfrak{H}_3$. Also wird $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{H}_3$ und $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{E}$ abgebildet.

Somit gilt $\mathfrak{G}/\mathfrak{M} \cong \mathfrak{H}_3$ und $(\mathfrak{H}_3) = p^k$ und wegen $(\mathfrak{H}_2/\mathfrak{H}_3) = p$ $(\mathfrak{H}_2) = p^{k+1}$.

Satz 7. *Ist* $c(\mathfrak{G}) = 3$ *und* $(\mathfrak{H}_3) = p^2$, *so gilt: a)* $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}_2$, *wenn* $\mathfrak{M}$ *der Zentralisator von* $\mathfrak{H}_2$ *ist. b) Es gibt in* $\mathfrak{G}$ *genau* $p+1$ *von* $\mathfrak{G}$ *verschiedene Normalisatoren erster Stufe. c) Jeder von* $\mathfrak{G}$ *verschiedene Normalisator erster Stufe hat die Breite 1. d)* $\mathfrak{G}$ *enthält kein Element der Breite 1. e)* $(\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1) = p^3$. *Es gibt in* $\mathfrak{G}$ *genau* $p^2 + p + 1$ *von* $\mathfrak{G}$ *verschiedene Normalisatoren von Elementen aus* $\mathfrak{G}$; *sie sind alle Abelsch.* $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1$ *ist also die nicht-Abelsche Gruppe der Ordnung* p^3, *deren Elemente alle die Ordnung* p *haben.*

Beweis. a) Nach Satz 6b ist $(\mathfrak{G}/\mathfrak{M}) = p^2$ und wegen $\Phi \leqq \mathfrak{M}$ (Satz 4) $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ nicht zyklisch.

Sei $X \in \mathfrak{G} - \mathfrak{M}$, so ist $\{X, \mathfrak{M}\} = \mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ verschieden; denn $\mathfrak{M}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ nicht zyklisch. Wir wählen dann $Y \in \mathfrak{G} - \mathfrak{N}$ derart, daß $(X, Y) \notin \mathfrak{H}_3$; dies ist immer möglich, weil sonst (1.2, d und g) $(X, \mathfrak{G} - \mathfrak{N}) = (X, \{\mathfrak{G} - \mathfrak{N}\}) = (X, \mathfrak{G}) \leqq \mathfrak{H}_3 \leqq \mathfrak{Z}_1$, d.h. $X \in \mathfrak{Z}_2 \leqq \mathfrak{M}$ [10]) gelten würde. Dann ist $\{X, Y, \mathfrak{M}\} = \mathfrak{G}$ und $\{(X, Y), \mathfrak{H}_3\} = \mathfrak{H}_2$, da $(\mathfrak{H}_2/\mathfrak{H}_3) = p$ (Satz 6b).

Der Durchschnitt $\mathfrak{D} = \mathfrak{N}_0(X) \cap Y^{-1}\mathfrak{N}_0(X)Y$ hat höchstens den Index p^3 unter $\mathfrak{G}$; denn ist $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{N}_0(X)$ verschieden, so ist $\mathfrak{N}_0(X)$ nicht Normalteiler von $\mathfrak{G}$, also der Normalisator $\mathfrak{N}'$ von $\mathfrak{N}_0(X)$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ (1.2, b), und $\mathfrak{D}$ hat als Durchschnitt zweier maximaler Untergruppen von $\mathfrak{N}'$ den Index p^2 unter $\mathfrak{N}'$ (1.2, c), mithin den Index p^3 unter $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{D}$ zentralisiert X und $Y^{-1}XY = X(X, Y)$, also auch $(X, Y) = K$.

Es ist $K \notin \mathfrak{D}$, da sonst $(K, X) = E$, also $X \in \mathfrak{M}$ wäre. $\{K, \mathfrak{D}\}$ hat also einen Index $\leq p^2$ unter $\mathfrak{G}$ und zentralisiert K, damit auch $\{K, \mathfrak{H}_3\} = \mathfrak{H}_2$. Folglich ist $\{K, \mathfrak{D}\} = \mathfrak{M}$.

Nun liegt $K \in \mathfrak{H}_2 \leqq \mathfrak{Z}_2$ (1.2, e), so daß $(\{K; \mathfrak{D}\}, X) = (\mathfrak{M}, X) \leqq \mathfrak{Z}_1$, d.h. $\mathfrak{M} \leqq \mathfrak{N}_1(X)$. Sicher ist $\mathfrak{N}_1(X) \neq \mathfrak{G}$, da andernfalls $X \in \mathfrak{Z}_2$ und wegen $\mathfrak{Z}_2 \leqq \mathfrak{M}$ [10]) $X \in \mathfrak{M}$ gelten würde. Daher ist $\mathfrak{N}_1(X) = \{X, \mathfrak{M}\}$.

Da wir X beliebig aus $\mathfrak{G} - \mathfrak{M}$ gewählt haben, gilt für alle $X' \in \mathfrak{G} - \mathfrak{M}$ $(\mathfrak{M}, X') \leqq \mathfrak{Z}_1$, $\{X', \mathfrak{M}\} = \mathfrak{N}_1(X')$. Folglich wird (1.2, d und g) $(\mathfrak{M}, \mathfrak{G} - \mathfrak{M}) = (\mathfrak{M}, \{\mathfrak{G} - \mathfrak{M}\}) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{G}) \leqq \mathfrak{Z}_1$, d.h. $\mathfrak{M} \leqq \mathfrak{Z}_2$. In Verbindung mit $\mathfrak{Z}_2 \leqq \mathfrak{M}$ [10]) ergibt das $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}_2$.

b) Der Durchschnitt $\mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{H}_2$ umfaßt $\mathfrak{H}_3$, und da $\mathfrak{Z}_1 \not\supseteq \mathfrak{H}_2$ und $(\mathfrak{H}_2/\mathfrak{H}_3) = p$ wird $\mathfrak{H}_3 = \mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{H}_2$. Daher gilt $(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}_2) \leqq \mathfrak{H}_3$, oder $\mathfrak{Z}_2/\mathfrak{H}_3 \leqq \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}^*)$, wenn $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_3 = \mathfrak{G}^*$ gesetzt wird. Da nun nach a) $(\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_2) = p^2$, wird $\mathfrak{Z}_2/\mathfrak{H}_3 = \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}^*)$; denn andernfalls wäre $\mathfrak{G}^*/\mathfrak{Z}_1^*(\mathfrak{G}^*)$ zyklisch, also $\mathfrak{G}^*$ Abelsch gegen die Voraussetzung $c(\mathfrak{G}) = 3$. Nun ist für alle $X \in \mathfrak{G} - \mathfrak{Z}_2$ $\mathfrak{N}_0(X\mathfrak{H}_3) = \mathfrak{N}_1(X)/\mathfrak{H}_3$ eine Abelsche Gruppe; denn sie enthält $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}^*)$ als Normalteiler vom Index p. Nach einem früheren Satz (I, Satz 3) gibt es dann in $\mathfrak{G}^*$ [nach Satz 6a ist $\beta(\mathfrak{G}^*) = 1$] genau $p+1$ von $\mathfrak{G}^*$ verschiedene Normalisatoren, die alle Abelsch sind. Jedem

[10]) a. a. O. [2]), S. 121.

9183-54

dieser Normalisatoren entspricht ein von $\mathfrak{G}$ verschiedener Normalisator erster Stufe in $\mathfrak{G}$, und umgekehrt ist $\mathfrak{N}_1(X')/\mathfrak{H}_3$ für $X' \in \mathfrak{G} - \mathfrak{Z}_2$ wegen $(\mathfrak{N}_1(X'), X') \leqq \mathfrak{Z}_1 \cap \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_3$ der Normalisator $\mathfrak{N}_0(X'\mathfrak{H}_3)$ in $\mathfrak{G}^*$. Es gibt also genau $p+1$ von $\mathfrak{G}$ verschiedene Normalisatoren erster Stufe in $\mathfrak{G}$.

c) Aus a) folgt, daß für $Z_2 \in \mathfrak{Z}_2$ und $X \in \mathfrak{G} - \mathfrak{Z}_2$ $\mathfrak{N}_1(X Z_2) = \mathfrak{N}_1(X) = \{X, \mathfrak{Z}_2\}$ gilt; d.h., alle Elemente von $\mathfrak{N}_1(X)$ haben denselben Normalisator erster Stufe.

Ferner ist $\beta(X) = 2$ für $X \in \mathfrak{G} - \mathfrak{Z}_2$; denn andernfalls wäre $\mathfrak{H}_2 \leqq \mathfrak{N}_0(X)$ (1.2, b und f), also $X \in \mathfrak{M} = \mathfrak{Z}_2$. Und da $\mathfrak{N}_1(X)$ den Index p unter $\mathfrak{G}$ hat, besitzt $\mathfrak{Z}^*(X) \cong \mathfrak{N}_1(X)/\mathfrak{N}_0(X)$ (I, S. 73) die Ordnung p.

Für $\tilde{Z}_2 \in \tilde{\mathfrak{Z}}_2 = \mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{N}_0(X)$ [es ist sicher $\mathfrak{N}_0(X) \neq \mathfrak{Z}_2$, da $X \notin \mathfrak{Z}_2$, $\beta(X) = 2$] ist $X\tilde{Z}_2 \in \mathfrak{G} - \mathfrak{Z}_2$, also auch $(\mathfrak{Z}^*(X\tilde{Z}_2)) = p$. Und da $(X, X\tilde{Z}_2) = (X, \tilde{Z}_2) \neq E$ (1.2, d) in $\mathfrak{Z}^*(X) \cap \mathfrak{Z}^*(X\tilde{Z}_2)$ enthalten ist, wird $\mathfrak{Z}^*(X) = \mathfrak{Z}^*(X\tilde{Z}_2)$, oder $\mathfrak{Z}^*(X\tilde{Z}_2) = (\mathfrak{N}_1(X\tilde{Z}_2), X\tilde{Z}_2) = (\mathfrak{N}_1(X), X\tilde{Z}_2) = \mathfrak{Z}^*(X)$. Folglich gilt (1.2, d) $(\mathfrak{N}_1(X), \tilde{Z}_2) \leqq \mathfrak{Z}^*(X)$, also auch $(\mathfrak{N}_1(X), \tilde{\mathfrak{Z}}_2) = (\mathfrak{N}_1(X), \{\tilde{\mathfrak{Z}}_2\}) = (\mathfrak{N}_1(X), \mathfrak{Z}_2) \leqq \mathfrak{Z}^*(X)$ (1.2, d und g). Beachtet man, daß $\mathfrak{N}_1(X) = \{X, \mathfrak{Z}_2\}$, so ergibt sich $\mathfrak{Z}^*(X) \geqq (\mathfrak{N}_1(X), \mathfrak{N}_1(X))$, und da wegen $\beta(X) = 2$ $\mathfrak{N}_1(X)$ nicht Abelsch sein kann, $(\mathfrak{N}_1(X), \mathfrak{N}_1(X)) = \mathfrak{Z}^*(X)$.

Wie wir gesehen haben, ist $(\mathfrak{Z}^*(X)) = p$ und daher (I, Satz 2) $\beta(\mathfrak{N}_1(X)) = 1$. Dies ist für alle $X \in \mathfrak{G} - \mathfrak{Z}_2$ richtig.

d) Sind nun $X, Y \in \mathfrak{G} - \mathfrak{Z}_2$ so gewählt, daß $\{X, Y, \mathfrak{Z}_2\} = \mathfrak{G}$, so gilt $\mathfrak{Z}^*(X) \cap \mathfrak{Z}^*(Y) = \mathfrak{E}$; denn andernfalls wäre wegen $\mathfrak{H}_2 \leqq \mathfrak{N}_1(X)$ und $\mathfrak{H}_2 \leqq \mathfrak{N}_1(Y)$ (1.2, f) $(\mathfrak{H}_2, X) = \mathfrak{Z}^*(X) = \mathfrak{Z}^*(Y) = (\mathfrak{H}_2, Y)$ und wegen $\mathfrak{M} = \mathfrak{Z}_2$ $\mathfrak{H}_3 = (\mathfrak{H}_2, \{X, Y, \mathfrak{Z}_2\}) = \mathfrak{Z}^*(X)$ von der Ordnung p gegen die Voraussetzung $(\mathfrak{H}_3) = p^2$ (Satz 6b). Nun ist $\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{N}_1(X) \cap \mathfrak{N}_1(Y)$, so daß $\mathfrak{H}_2(\mathfrak{Z}_2) \leqq \mathfrak{H}_2(\mathfrak{N}_1(X)) \cap \mathfrak{H}_2(\mathfrak{N}_1(Y)) = \mathfrak{Z}^*(X) \cap \mathfrak{Z}^*(Y) = \mathfrak{E}$. $\mathfrak{Z}_2$ ist Abelsch.

Gäbe es ein $T \in \mathfrak{G}$ mit $\beta(T) = 1$, so wäre $\mathfrak{H}_2 \leqq \mathfrak{N}_0(T)$ (1.2, f), also $T \in \mathfrak{M} = \mathfrak{Z}_2$. Sei $S \in \mathfrak{G} - \mathfrak{Z}_2$ mit $(S, T) = E$, also $\mathfrak{N}_0(T) = \{S, \mathfrak{Z}_2\} = \mathfrak{N}_1(S)$, ferner $R \in \mathfrak{G} - \mathfrak{N}_0(T)$, dann liegt $(T, RS) = (T, R)$ (1.2, d) in $\mathfrak{Z}^*(RS) \cap \mathfrak{Z}^*(R)$. Dieser Durchschnitt ist aber $\mathfrak{E}$, wie wir unter d) für $RS = X$ und $R = Y$ gezeigt haben. Daher wird $(T, R) = E$, mithin $T \in \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G})$ gegen die Voraussetzung $\beta(T) = 1$. $\mathfrak{G}$ enthält kein Element der Breite 1.

e) Nun ist gewiß $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}) \leqq \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{N}_1(X))$ für $X \in \mathfrak{G} - \mathfrak{Z}_2$. Wäre $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}) < \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{N}_1(X))$, so gäbe es ein $Z \in \mathfrak{G}$ mit $(\mathfrak{N}_1(X), Z) = \mathfrak{E}$ und $(\mathfrak{G}, Z) \neq \mathfrak{E}$, also $\beta(Z) = 1$, im Widerspruch zu d).

Da $\mathfrak{Z}_2$ Abelsch ist und $\mathfrak{G}$ kein Element der Breite 1 besitzt, ist $\mathfrak{Z}_2$ Normalisator aller Elemente von $\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1$. Dann enthält $\mathfrak{N}_1(X)$ als Gruppe der Breite 1 mit einem Abelschen Normalisator des Index p genau $p+1$ Normalisatoren desselben Index, und die sind alle Abelsch; ferner hat $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{N}_1(X))$ den Index p^2 unter $\mathfrak{N}_1(X)$ (I, Satz 3). Da $\mathfrak{Z}_1(\mathfrak{G}) = \mathfrak{Z}_1(\mathfrak{N}_1(X))$ und $\mathfrak{N}_1(X)$ den Index p unter $\mathfrak{G}$ besitzt, ist $(\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1) = p^3$.

Jeder Normalisator des Index p in $\mathfrak{N}_1(X)$ ist ein Normalisator des Index p^2 in $\mathfrak{G}$, und jeder Normalisator eines Elementes aus $\mathfrak{G}$ kommt in einem Normalisator erster Stufe als Normalisator des Index p vor. Ist $Y \in \mathfrak{G} - \mathfrak{N}_1(X)$,

9183-54

so ist $\mathfrak{N}_1(X) \cap \mathfrak{N}_1(Y) = \mathfrak{Z}_2$; zwei verschiedene Normalisatoren erster Stufe in $\mathfrak{G}$ haben immer den Normalisator $\mathfrak{Z}_2$ gemeinsam. In Verbindung mit b) ergibt sich daraus, daß es genau p^2+p+1 von $\mathfrak{G}$ verschiedene Normalisatoren von Elementen aus $\mathfrak{G}$ gibt, und diese sind alle Abelsch.

Beispiele. Die folgenden Beispiele zeigen, daß die in den Sätzen 5–7 angegebenen Typen von Gruppen der Breite 2 wirklich vorkommen.

1. $c=2$, $(\mathfrak{H}_2)=p^2$.

$$\mathfrak{G}: \quad S^{p^2}=E,\ R^{p^2}=E,\ (S,R)=Q,\ (Q,S)=E,\ (Q,R)=E.$$

Es ist $\mathfrak{H}_2=\{Q\}=\mathfrak{Z}_1$. Die Elemente von $\Phi=\{S^p, R^p, Q\}$ haben eine Breite ≤ 1.

2. $c=2$, $(\mathfrak{H}_2)=p^3$ [11]).

$$\mathfrak{G}: \quad P_i^p=E,\ Q_i^p=E\ (i=1,2,3),\ (P_2,P_3)=Q_1;\ (P_3,P_1)=Q_2,\ (P_1,P_2)=Q_3,$$
$$(P_i,Q_j)=E,\ (Q_i,Q_j)=E\ (i,j=1,2,3).$$

Es ist $\mathfrak{H}_2=\Phi=\mathfrak{Z}_1$. Es gibt kein Element der Breite 1.

3. $c=3$, $\beta(\mathfrak{H}_2^{\mathfrak{G}})=1$.

$$\mathfrak{G}: \quad P^{p^2}=E,\ Q^{p^2}=E,\ (P,Q)=Q^p.$$

Es ist $\mathfrak{H}_2=\{Q^p\}$, $\mathfrak{Z}_2=\Phi=\{P^p, Q^p\}$, $\mathfrak{Z}_1=\mathfrak{H}_3=\{Q^{p^2}\}$. Die Elemente von $\mathfrak{Z}_2$ haben die Breite ≤ 1.

4. $c=3$, $\beta(\mathfrak{H}_2^{\mathfrak{G}})=2$.

$$\mathfrak{G}: \quad S^p=E,\ R^p=E,\ Q^p=E,\ P_1^p=E,\ P_2^p=E,\ (S,R)=Q,\ (S,Q)=P_1,$$
$$(R,Q)=P_2,\ (P_1,P_2)=E,\ (P_i,S)=E,\ (P_i,R)=E,\ (P_i,Q)=E,$$
$$(i=1,2).$$

Es ist $\mathfrak{H}_2=\{Q,P_1,P_2\}=\mathfrak{Z}_2$, $\mathfrak{H}_3=\mathfrak{Z}_1$, $(\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1)=p^3$, und $\mathfrak{G}$ enthält kein Element der Breite 1.

---

[11]) BURNSIDE, W.: Theory of group of finite order, 2. Aufl., S. 148. 1911.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 13. März 1953.)

WENZL, F.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 17—39 (1953)

Nullstellendichte reeller Polynome und Tschebyscheffsche Approximation.

Von
F. WENZL.

I. Einleitung und Problemstellung.

Die TSCHEBYSCHEFFsche Approximation und die TSCHEBYSCHEFFschen Polynome haben bereits eine fast hundertjährige Geschichte: 1857 entstand die Abhandlung [*1*], von der sie ihren Namen haben. Die seither nach TSCHEBYSCHEFF benannten Polynome spielen dort nur die Rolle eines Beispiels für das Prinzip der TSCHEBYSCHEFFschen Approximation. Wir können dieses Prinzip folgendermaßen aussprechen:

Gegeben sei ein Bereich $\mathfrak{B}$ der unabhängigen Veränderlichen x und in diesem Bereich eine Funktion $v(x)$ sowie eine Klasse K von zulässigen Näherungsfunktionen, dargestellt etwa mittels der Parameter a_ν durch $f(x; a_1; \dots a_n)$. Nun sollen aus K durch geeignete Wahl der a_ν solche Funktionen von x ausgesucht werden, für die

$$\operatorname*{Max}_{\mathfrak{B}} |f - v| \quad \text{möglichst klein} \tag{1.1}$$

wird. Das Entscheidende ist also der durch (1.1) ausgesprochene Gesichtspunkt für die Güte der Näherung.

Im folgenden wählen wir als Approximationsbereich $\mathfrak{B}$ immer das Intervall $I(-1 \leq x \leq 1)$ der reellen Veränderlichen x. Ferner sei $v(x) \equiv 0$. Lösungen, d. h. solche Funktionen der Klasse K, die der Bedingung (1.1) genügen, werden wir mit $F(x)$ bezeichnen.

Es sei nun n eine vorgegebene natürliche Zahl. Ist dann

$$f = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \tag{1.2}$$

so erhalten wir, wie seit 1857 bekannt, als Lösung der zugehörigen Aufgabe (1.1) die TSCHEBYSCHEFFschen Polynome, darstellbar durch

$$F_n(x) = \frac{\cos n\varphi}{2^{n-1}}, \qquad \text{wobei} \quad x = \cos\varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi). \tag{1.2a}$$

Ersetzen wir (1.2) durch

$$f = \sqrt{1 - x^2} \cdot (x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n), \tag{1.3}$$

so erhalten wir, wie ebenfalls bekannt, als Lösung der Aufgabe (1.1) die mit $\sqrt{1-x^2}$ multiplizierten TSCHEBYSCHEFFschen Polynome zweiter Art, darstellbar durch

$$F_n(x) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{2^n}, \quad \text{wobei} \quad x = \cos\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \tag{1.3a}$$

Ein weiteres Beispiel ist

$$f = \sqrt{1-x}\,(x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n) \tag{1.4}$$

mit der Lösung

$$F_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{2^{n-\frac{1}{2}}} \quad \text{mit} \quad x = \cos\varphi, \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi. \tag{1.4a}$$

Die zugehörigen Beweise seien hier übergangen. Sie lassen sich mit Hilfe eines bekannten Satzes führen, den wir für unsere Zwecke hier (ebenfalls ohne Beweis) wiedergeben als

Satz 1: *I bedeute das Intervall* $(-1 \leq x \leq 1)$; $g(x)$ *sei eine in I stetige vorgegebene Funktion, die im Innern von I nirgends verschwindet. n sei eine vorgegebene natürliche Zahl. Für die (eindeutige) Lösung* $F(x)$ *der Aufgabe*

$$\begin{cases} \operatorname{Max}_{-1 \leq x \leq 1} |f| & \textit{möglichst klein mit} \\ f = g(x) \cdot (x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n) \end{cases} \tag{1.5}$$

ist dann notwendig und hinreichend, daß $F(x)$ *an* $n+1$ *der Größe nach geordneten Stellen des Intervalls I mit abwechselndem Vorzeichen den Betrag* $L = \operatorname{Max}_{-1 \leq x \leq 1} |F|$ *annimmt (und natürlich, daß* $F(x)$ *zur Klasse der Funktionen f gehört).*

Abgesehen vom Beweis für die *Notwendigkeit* der genannten Bedingungen läßt sich sowohl die Begründung von Satz 1 wie auch seine Anwendung auf die vorher genannten Einzelfälle beispielsweise aus [2], S. 55 unmittelbar entnehmen bzw. übertragen. Zur Notwendigkeit der Bedingungen vgl. etwa [1] oder [3].

Wir betrachten nun die *Verteilung der Nullstellen* bei den Funktionen (1.2a), (1.3a) und (1.4a) im Inneren des Intervalls I: Man kommt von einer Nullstelle zur nächsten, wenn man φ um $\Delta\varphi$ wachsen oder abnehmen läßt, wobei

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \dfrac{\pi}{n} & \text{im Fall (1.2a),} \\ \Delta\varphi = \dfrac{\pi}{n+1} & \text{im Fall (1.3a) und} \\ \Delta\varphi = \dfrac{\pi}{n+\frac{1}{2}} & \text{im Fall (1.4a).} \end{cases} \tag{1.6}$$

Aus $x = \cos\varphi$ folgt nun

$$\Delta x = -\sin\tilde{\varphi} \cdot \Delta\varphi \tag{1.7}$$

mit einem geeigneten Mittelwert $\tilde{\varphi}$ aus dem betrachteten Teilintervall.

Wir definieren jetzt zu jedem $F_n(x)$ [1]) zwischen seiner kleinsten und größten Nullstelle eine „Nullstellendichte" $\varrho_n(x)$ durch den reziproken Wert des Abstands $|\Delta x|$ der beiden zu x benachbarten Nullstellen von F_n bzw., falls x selbst eine Nullstelle ist, als reziproke Entfernung von der nächstgrößeren

[1]) Dabei ist natürlich zu beachten, daß F_n in (1.2a), (1.3a) und (1.4a) immer wieder anders definiert ist.

Nullstelle. Nach (1.7) folgt dann

$$\varrho_n(x) = \frac{1}{\sin\tilde{\varphi} \cdot \Delta\varphi}$$

mit $\Delta\varphi$ aus (1.6). Daraus ergibt sich unter Berücksichtigung von $x = \cos\varphi$, also von $\sqrt{1-\tilde{x}^2} = |\sin\tilde{\varphi}|$, die Gleichung

$$\frac{\varrho_n(x)}{n} = \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{x}^2}} \cdot \frac{1+\delta}{\pi} \quad \text{mit} \quad \delta = \begin{cases} 0 \text{ im Fall (1.2a)} \\ \frac{1}{n} \text{ im Fall (1.3a)} \\ \frac{1}{2n} \text{ im Fall (1.4a)} \end{cases}. \tag{1.8}$$

Man hat also in jedem der drei behandelten Fälle

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varrho_n(x)}{n} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot\pi} \quad \text{für} \quad -1 < x < 1. \tag{1.8a}$$

Das Ergebnis läßt sich in Worten folgendermaßen aussprechen: Die „relative Nullstellendichte" $\varrho_n(x)/n$ hat für die Lösungen $F_n(x)$ der Aufgaben (1.2), (1.3), (1.4) *dieselbe Grenzfunktion*, wenn man n über alle Schranken wachsen läßt; anschaulich gesprochen: *Die Nullstellenverteilung unserer Lösungen ist bei großem n „fast dieselbe" im Fall* (1.2), *im Fall* (1.3) *und im Fall* (1.4).

Es liegt nun die Vermutung nahe, daß Entsprechendes unter wesentlich allgemeineren Voraussetzungen gilt, d.h. daß es dabei auf den Faktor $g(x)$ aus (1.5) mit geringfügigen Einschränkungen überhaupt nicht ankommt. Im Fall

$$g(x) = \frac{1}{x^l + c_1 x^{l-1} \dots + c_{l-1} x + c_l} \tag{1.9}$$

ist ($n > l$ vorausgesetzt) aus den zugehörigen Lösungen F_n (vgl. [1], S. 313ff. oder auch [4], S. 13) eine positive Entscheidung unmittelbar zu entnehmen. Entsprechendes gilt für $g(x) = (x-c_1) \dots (x-c_l)$ mit gegebenen c_λ [alle c_λ außerhalb $(-1;1)$], vgl. [4], S. 16ff. Von hier aus könnte man ähnlich wie in [4], S. 24 versuchen, mit Hilfe des WEIERSTRASSschen Approximationssatzes auch zu einer Aussage für andere Funktionen $g(x)$ zu kommen. Wir wollen jedoch hier einen anderen Weg beschreiten, der zugleich auch einen Einblick erlaubt in die Verhältnisse bei weiteren Approximationsaufgaben, die nicht durch (1.5) darstellbar sind. Die Abschätzungen des folgenden zweiten Teils, die zugleich einen Hinweis für die praktische Behandlung numerischer Einzelaufgaben liefern, sind auch unabhängig von der unter I. gegebenen Einführung verfolgbar.

II. Nullstellendichte und Integralabschätzung einer Klasse reeller Polynome.

Gegeben sei ein Polynom n-ten Grades $P(x)$, von dessen Nullstellen $\xi_1; \dots \xi_n$ vorausgesetzt sei

$$-1 < \xi_1 < \dots < \xi_n < 1. \tag{2.1}$$

Der Koeffizient von x^n in $P(x)$ sei 1. Dann hat man, falls x keine Nullstelle von P bedeutet,

$$|P(x)| = \prod_{\nu=1}^{n} |x-\xi_\nu| = e^{\sum_{\nu=1}^{n} \ln|x-\xi_\nu|} \tag{2.2}$$

In Übereinstimmung mit den Betrachtungen nach (1.7) definieren wir nun die „Nullstellendichte" ϱ von $P(x)$ durch

$$\varrho(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\xi_{\nu+1}-\xi_\nu} & \text{für} \quad \xi_\nu \le \xi < \xi_{\nu+1} \\ 0 & \text{für} \quad \xi < \xi_1 \quad \text{und für} \quad \xi > \xi_n. \end{cases} \tag{2.2a}$$

Sie ist eine stückweise stetige Funktion und ermöglicht nach (2.2) die Darstellung des Betrags von P durch

$$|P(x)| = e^{\sum_{\nu=1}^{n} \ln|x-\xi_\nu| \cdot \varrho(\xi_\nu)\cdot(\xi_{\nu+1}-\xi_\nu)}\ ^{2}). \tag{2.3}$$

Der Exponent S auf der rechten Seite legt den Vergleich nahe mit

$$\begin{cases} j = \int_{-1}^{+1} \ln|x-\xi|\,\varrho(\xi)\,d\xi = \sum_{\nu=1}^{n-1} \int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \ln|x-\xi|\,\varrho(\xi)\,d\xi \\ \underset{(2.2a)}{=} \sum_{\nu=1}^{n-1} \varrho(\xi_\nu) \cdot \int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \ln|x-\xi|\,d\xi. \end{cases} \tag{2.4}$$

Es sei nun

$$\xi_m < x < \xi_{m+1}. \tag{2.4a}$$

Wir betrachten zunächst den Fall $\nu < m$, also nach (2.1) und (2.4a)

$$\xi_{\nu+1} < x. \tag{A}$$

Dann ist, wie sich durch Ausführung der Quadratur und einfache Umformung ergibt,

$$\int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \ln|x-\xi|\,d\xi = (\xi_{\nu+1}-\xi_\nu)\ln(x-\xi_\nu) + R_\nu \tag{2.5}$$

mit

$$R_\nu = \xi_\nu - \xi_{\nu+1} + (\xi_{\nu+1}-x)\cdot\ln\frac{x-\xi_{\nu+1}}{x-\xi_\nu}. \tag{2.5a}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\xi_{\nu+1}-\xi_\nu = \delta; \qquad x-\xi_{\nu+1} = u \tag{2.5b}$$

(der Index ν, von dem natürlich auch δ und u abhängen, ist der Bequemlichkeit halber rechts jeweils weggelassen), so folgt nach (2.2a)

$$\varrho(\xi_\nu)\cdot R_\nu = -1 - \frac{u}{\delta}\cdot\ln\frac{u}{u+\delta}.$$

[2]) $\varrho(\xi_n)\cdot(\xi_{n+1}-\xi_n)$ ist zunächst nicht definiert; es bedeute wie die anderen Faktoren $\varrho(\xi_\nu)\cdot(\xi_{\nu+1}-\xi_\nu)$ der Einheitlichkeit halber 1 [für das Folgende ohne besondere Bedeutung, da aus (2.3) keine weiteren Schlüsse gezogen werden].

Wir vergleichen dies mit

$$\int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \frac{d\xi}{x-\xi} = -\ln\frac{x-\xi_{\nu+1}}{x-\xi_\nu} = -\ln\frac{u}{u+\delta}$$

und erhalten

$$\varrho(\xi_\nu)\cdot R_\nu = q\cdot\int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}}\frac{d\xi}{x-\xi} \tag{2.5c}$$

mit

$$q = \frac{1}{\ln\frac{u}{u+\delta}}\left(1+\frac{u}{\delta}\ln\frac{u}{u+\delta}\right) = \frac{u}{\delta} - \frac{1}{\ln\frac{u+\delta}{u}}.$$

Es ist also

$$q = \frac{1}{z} - \frac{1}{\ln(1+z)} \qquad \text{mit} \qquad z = \frac{\delta}{u}.$$

Daraus folgt

(α) $\qquad q\to 0 \quad$ für $\quad z\to+\infty,$

(β) $\qquad q\to -\tfrac{1}{2} \quad$ für $\quad z\to +0$

wegen

$$\frac{1}{\ln(1+z)} = \frac{1}{z-\frac{z^2}{2}+\cdots} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{z}{2}+\cdots\right)$$

und

(γ) $$\frac{dq}{dz} = -\frac{1}{z^2}+\frac{1}{1+z}\cdot\frac{1}{\ln^2(1+z)} > 0 \qquad \text{für} \quad z>0,$$

wie folgendermaßen zu erkennen ist: $\frac{dq}{dz}=0$ für $z>0$ wäre gleichbedeutend mit

(δ) $$\ln(1+z) = \frac{z}{\sqrt{1+z}},$$

was für $z=0$ erfüllt ist. Die Ableitung der linken Seite von (δ) ist $\frac{1}{1+z}$, die Ableitung der rechten Seite dagegen $\frac{1}{1+z}\left[\sqrt{1+z}-\frac{z}{2\sqrt{1+z}}\right]$. Die eckige Klammer ist dabei

$$\frac{1+\frac{z}{2}}{\sqrt{1+z}} = \sqrt{\frac{1+z+\frac{z^2}{4}}{1+z}} > 1.$$

Die Ableitung der rechten Seite von (δ) ist also für $z>0$ immer größer als diejenige der linken Seite und da (δ) für $z=0$ erfüllt ist, gibt es kein $z>0$, für das (δ) ebenfalls erfüllt wäre.

dq/dz kann also für positives z sein Vorzeichen nicht wechseln. Setzt man speziell $z=1$, so folgt $\frac{dq}{dz} = -1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ln^2 2} > 0$, womit ($\gamma$) bewiesen ist.

(α), (β) und (γ) ergeben für $z=\frac{\delta}{u}>0$ zusammenfassend

$$-\tfrac{1}{2} < q < 0. \tag{2.5d}$$

Nach (2.5c), (2.5b), (2.4a) und (A) ist daher

$$(2.6)\quad 0 < -\sum_{\nu=1}^{m-1} \varrho(\xi_\nu)\, R_\nu < \frac{1}{2}\int_{\xi_1}^{\xi_m} \frac{d\xi}{x-\xi} = \frac{1}{2}\ln\frac{x-\xi_1}{x-\xi_m} < \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-\xi_m}.$$

Daraus, aus (2.5) und (2.2a) folgt

$$(2.7)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{m-1} \varrho(\xi_\nu)\cdot\int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \ln|x-\xi|\,d\xi = \sum_{\nu=1}^{m-1} \ln(x-\xi_\nu) - \delta_1 \ln\frac{x+1}{x-\xi_m} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{mit}\quad 0<\delta_1<\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Wir gehen nun über zum Fall $\nu > m$, also nach (2.1) und (2.4a) zu

$$(B)\qquad x < \xi_\nu.$$

Statt (2.5) folgt dann (mit $\nu < n$)

$$(2.8)\qquad \int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \ln|x-\xi|\,d\xi = (\xi_{\nu+1}-\xi_\nu)\cdot\ln(\xi_{\nu+1}-x) + R_\nu$$

mit

$$(2.8a)\qquad R_\nu = \xi_\nu - \xi_{\nu+1} + (x-\xi_\nu)\cdot\ln\frac{\xi_\nu - x}{\xi_{\nu+1}-x},$$

d.h., wenn man statt (2.5b) jetzt

$$(2.8b)\qquad \xi_{\nu+1}-\xi_\nu = \delta; \qquad \xi_\nu - x = u$$

setzt, wieder nach (2.2a)

$$\varrho(\xi_\nu)\, R_\nu = -1 - \frac{u}{\delta}\cdot\ln\frac{u}{u+\delta}.$$

Der Vergleich mit

$$\int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \frac{d\xi}{\xi-x} = \ln\frac{\xi_{\nu+1}-x}{\xi_\nu - x} = -\ln\frac{u}{u+\delta}$$

ergibt daher

$$(2.8c)\qquad \varrho(\xi_\nu)\cdot R_\nu = q\cdot\int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \frac{d\xi}{\xi-x},$$

wobei wie in (2.5d) wieder

$$(2.8d)\qquad -\frac{1}{2} < q < 0 \quad \text{für}\quad z = \frac{\delta}{u} > 0,$$

da q dieselbe Funktion von u und δ darstellt wie in (2.5c); daß u hier eine andere Bedeutung als in (2.5b) hat, macht dabei natürlich nichts aus.

Nach (2.8c), (2.8b), (2.4a) und (B) ist daher

$$(2.9)\quad 0 < -\sum_{\nu=m+1}^{n-1} \varrho(\xi_\nu)\, R_\nu < \frac{1}{2}\int_{\xi_{m+1}}^{\xi_n} \frac{d\xi}{\xi-x} = \frac{1}{2}\ln\frac{\xi_n - x}{\xi_{m+1}-x} < \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{\xi_{m+1}-x}.$$

Daraus, aus (2.8) und (2.2a) folgt

$$(2.10)\quad \left\{ \sum_{\nu=m+1}^{n-1} \varrho(\xi_\nu) \int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \ln|x-\xi|\,d\xi = \sum_{\nu=m+1}^{n-1} \ln(\xi_{\nu+1}-x) - \delta_2 \ln\frac{1-x}{\xi_{m+1}-x} \right.$$
$$\text{mit}\quad 0<\delta_2<\tfrac{1}{2}.$$

Es bleibt nun noch der Fall $\nu=m$, also nach (2.4a)

$$(C)\qquad \xi_\nu < x < \xi_{\nu+1}.$$

Wegen (2.4a) ist

$$\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \ln|x-\xi|\,d\xi = \int_{\xi_m}^{x} \ln(x-\xi)\,d\xi + \int_{x}^{\xi_{m+1}} \ln(\xi-x)\,d\xi$$
$$= (x-\xi_m)\ln(x-\xi_m) + (\xi_m - x) + (\xi_{m+1}-x)\ln(\xi_{m+1}-x) + (x-\xi_{m+1})$$

oder

$$(2.11)\quad \left\{ \varrho(\xi_m) \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \ln|x-\xi|\,d\xi \right.$$
$$= \frac{x-\xi_m}{\xi_{m+1}-\xi_m}\ln(x-\xi_m) + \frac{\xi_{m+1}-x}{\xi_{m+1}-\xi_m}\ln(\xi_{m+1}-x) - 1$$
$$= (1-\delta_3)\ln(x-\xi_m) + (1-\delta_4)\ln(\xi_{m+1}-x) - 1$$

mit

$$(2.11a)\qquad (0<)\,\delta_3 = \frac{\xi_{m+1}-x}{\xi_{m+1}-\xi_m} < 1; \qquad (0<)\,\delta_4 = \frac{x-\xi_m}{\xi_{m+1}-\xi_m} = 1-\delta_3 < 1.$$

Wir können nun die bisher gewonnenen Ergebnisse durch Addition von (2.7), (2.10) und (2.11) zusammenfassen und bekommen als Abschätzung des Integrals (2.4) das Ergebnis

$$j = \sum_{\nu=1}^{n} \ln|x-\xi_\nu| - \delta_1\ln(x+1) - \delta_2\ln(1-x) -$$
$$- \vartheta_1\ln(x-\xi_m) - \vartheta_2\ln(\xi_{m+1}-x) - 1$$

mit

$$(2.11b)\qquad \vartheta_1 = \delta_3 - \delta_1; \qquad \vartheta_2 = \delta_4 - \delta_2,$$

also nach (2.2) und (2.4) schließlich

$$(2.12)\quad \left\{ \ln|P(x)| = \int_{-1}^{+1} \ln|x-\xi|\,\varrho(\xi)\,d\xi + \delta_1\ln(x+1) + \delta_2\ln(1-x) + \right.$$
$$+ \vartheta_1\ln(x-\xi_m) + \vartheta_2\ln(\xi_{m+1}-x) + 1.$$

Dabei ist nach (2.7) und (2.10)

$$(2.12a)\qquad 0<\delta_{1;2}<\tfrac{1}{2}$$

und daher nach (2.11a) und (2.11b)

$$(2.12b)\qquad -\tfrac{1}{2} < \vartheta_{1;2} < 1.$$

Diese Abschätzung läßt sich sofort verschärfen, wenn man zunächst annimmt, x liege näher an ξ_m als an ξ_{m+1} [und natürlich weiterhin im Intervall

$\xi_m; \xi_{m+1}$, wie es nach (2.4a) sein muß]. Nach (2.11a) ist dann

$$\tfrac{1}{2} < \delta_3 < 1; \qquad 0 < \delta_4 < \tfrac{1}{2}.$$

Nach (2.11b) und (2.12a) folgt daraus

$$0 < \vartheta_1 < 1; \quad -\tfrac{1}{2} < \vartheta_2 < \tfrac{1}{2}. \tag{2.12c}$$

Dies gilt auch noch für $x = \frac{1}{2}(\xi_{m+1} + \xi_m)$. Es ergibt sich damit als Polynomabschätzung folgender

Satz 2: *Gegeben sei das Polynom* $P(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (x - \xi_\nu)$ *mit* $-1 < \xi_1 < \cdots < \xi_n < 1$. *Die Stelle* x *teile das Intervall* $(\xi_m; \xi_{m+1})$ *von innen im Verhältnis* $(0 <)\ \delta_4 : \delta_3 \leq 1$, *wobei* $\delta_4 + \delta_3 = 1$ *vorausgesetzt sei*[3]. *Unter Verwendung der durch* (2.2a) *definierten Nullstellendichte* ϱ *des Polynoms* $P(x)$ *gilt dann*

$$|P(x)| = e^{\int_{-1}^{+1} \ln|x-\xi|\,\varrho(\xi)\,d\xi} \cdot (x+1)^{\delta_1} (1-x)^{\delta_2} (x-\xi_m)^{\vartheta_1} (\xi_{m+1}-x)^{\vartheta_2} \cdot e, \tag{2.13}$$

wobei

$$0 < \delta_{1;2} < \tfrac{1}{2}; \qquad 0 < \vartheta_1 = \delta_3 - \delta_1 < 1; \qquad -\tfrac{1}{2} < \vartheta_2 = \delta_4 - \delta_2 < \tfrac{1}{2}. \tag{2.13a}$$

Für den Fall $\delta_4 : \delta_3 > 1$, d.h. nach (2.11a) für $\frac{1}{2}(\xi_m + \xi_{m+1}) < x < \xi_{m+1}$, wären natürlich bloß die in (2.13a) stehenden Abschätzungen für ϑ_1 und ϑ_2 sinngemäß zu vertauschen.

Für die in (2.2a) eingeführte Nullstellendichte $\varrho(\xi)$ gilt

$$\int_{-1}^{+1} \varrho(\xi)\,d\xi = \int_{\xi_1}^{\xi_n} \varrho(\xi)\,d\xi = \sum_{\nu=1}^{n-1} \int_{\xi_\nu}^{\xi_{\nu+1}} \varrho(\xi)\,d\xi = n - 1.$$

Um auch für große n ein wenigstens im Mittel beschränktes Maß für die Nullstellendichte zu haben, führen wir nun entsprechend (1.8) die „relative Nullstellendichte" $\varrho^*(\xi)$ durch

$$\varrho(\xi) = n \cdot \varrho^*(\xi); \qquad \varrho^*(\xi) = \frac{1}{n} \cdot \varrho(\xi) \tag{2.14}$$

ein. Aus Satz 2 folgt dann

$$\ln|P(x)| = n \cdot \left[\int_{-1}^{+1} \ln|x-\xi|\,\varrho^*(\xi)\,d\xi + \vartheta^* \right] \tag{2.15}$$

mit

$$\begin{cases} \vartheta^* = \dfrac{\delta_1}{n} \ln(x+1) + \dfrac{\delta_2}{n} \ln(1-x) \\ \quad + \dfrac{\vartheta_1}{n} \ln(x-\xi_m) + \dfrac{\vartheta_2}{n} \ln(\xi_{m+1}-x) + \dfrac{1}{n}. \end{cases} \tag{2.15a}$$

Der wesentliche Inhalt von (2.15a) läßt sich einfacher schreiben bei Beschränkung auf solche x, die nicht zu nahe an ± 1 und nicht zu nahe an einer Null-

[3]) Vgl. Fig. 1:

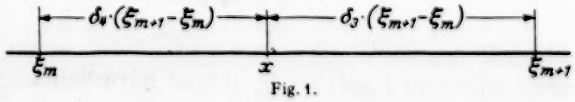

Fig. 1.

stelle des Polynoms P liegen, und zwar in folgendem Sinn: $\varepsilon_0 (<1)$ und $q_0 (>2)$ seien zwei (beliebig klein bzw. groß) vorgegebene positive Zahlen und x erfülle die Ungleichungen

$$(2.16) \qquad |x| \leq 1 - \varepsilon_0; \qquad \xi_m + \frac{\xi_{m+1} - \xi_m}{q_0} \leq x \leq \frac{1}{2}(\xi_{m+1} + \xi_m).$$

Unter Berücksichtigung von (2.2a) und (2.14), d.h. von $\xi_{m+1} - \xi_m = \frac{1}{n \cdot \varrho^*(x)}$, folgt dann aus (2.15a) schließlich

$$(2.16a) \qquad \vartheta^* = \alpha_1 \ln \varepsilon_0 + \alpha_2 \ln q_0 + \alpha_3 \ln \varrho^*(x) + \alpha_4,$$

wobei (unter Benutzung von Satz 2)

$$(2.16b) \qquad |\alpha_k| < \frac{1}{n} \quad \text{für} \quad k = 1; 2; 3, \qquad |\alpha_4| < \operatorname{Max}\left(\frac{\ln n}{n}; \frac{2}{n}\right).$$

Wir denken uns nun zu jeder natürlichen Zahl n ein Polynom $P_n(x)$ vom Grad n, das die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt, und betrachten die *Folge dieser Polynome*. Wir setzen ferner voraus, daß im vorgegebenen Intervall

$$(2.17) \qquad I^*(|x| \leq 1 - \varepsilon_0) \quad \text{mit} \quad 0 < \varepsilon_0 < 1$$

die relativen Nullstellendichten ϱ_n^* der Polynome P_n nach oben und unten gemeinsame positive Schranken besitzen: Mit festen positiven Zahlen γ und G sei also

$$(2.17a) \qquad (0 <) \gamma \leq \varrho_n^* \leq G$$

zugleich für alle n und für alle x aus I^*.

Hält man dann nicht nur ε_0, sondern auch $q_0 (>2)$ für alle n *fest*, so vereinfacht sich (2.16a) und (2.16b) zu

$$(2.17b) \qquad \vartheta^* = O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Unter Berücksichtigung von (2.15) ergibt sich also der folgende

Satz 2a: *Zu jedem $n = 2; 3; 4 \ldots$ sei ein Polynom $P_n = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots$ mit lauter einfachen, zwischen -1 und $+1$ gelegenen Nullstellen gegeben. Die relative Nullstellendichte ϱ_n^* der Polynome P_n sei durch* (2.17a) *im Intervall I^* gleichmäßig beschränkt*[4]*. Ein zu I^* gehöriger Punkt x_n habe von den beiden ihm benachbarten Nullstellen ξ_m und ξ_{m+1} des Polynoms P_n mindestens die Entfernung $\frac{1}{q_0}(\xi_{m+1} - \xi_m)$ mit für alle n gemeinsamem $q_0 (>2)$. Dann gilt*

$$(2.18) \qquad \ln |P_n(x_n)| = n \cdot \left[\int_{-1}^{+1} \ln |x_n - \xi| \, \varrho_n^*(\xi) \, d\xi + \vartheta^* \right] \quad \textit{mit} \quad \vartheta^* = O\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

d.h. mit

$$(2.18a) \qquad \vartheta^* = \mu \cdot \frac{\ln n}{n},$$

wobei $|\mu| < M$ mit einer nur von $I^*; q_0; \gamma; G$ (aber nicht von n) abhängigen Schranke M.

[4]) I^* bedeute auch im folgenden immer das in (2.17) definierte Intervall.

Die Polynomabschätzung (2.18) gilt also grob gesagt, da q_0 beliebig groß vorgegeben werden konnte, jeweils für „fast alle" x_n in dem Sinn, daß bei Betrachtung des Polynoms P_n immer nur solche x des Intervalls I^* ausgeschlossen sind, die besonders nahe an einer Nullstelle dieses Polynoms liegen.

Wir betrachten nun im besonderen solche x, an denen ein Polynom $P(x)$ das Maximum seines Betrags zwischen den benachbarten Nullstellen annimmt. Dazu brauchen wir eine genauere Abschätzung der in (2.15a) stehenden Teilsumme

$$\sigma = \frac{\vartheta_1}{n} \ln (x - \xi_m) + \frac{\vartheta_2}{n} \ln (\xi_{m+1} - x). \tag{2.19}$$

Für $x = \frac{1}{2}(\xi_{m+1} + \xi_m)$ ist nach (2.2a) $\sigma = \frac{\vartheta_1' + \vartheta_2}{n} \cdot \ln \frac{1}{2\varrho(x)}$, also nach Satz 2

$$\sigma = \frac{1 - (\delta_1 + \delta_2)}{n} \ln \frac{1}{2\varrho(x)} > -\frac{1}{n} \ln [2\varrho(x)]. \tag{2.19a}$$

Andererseits ist für *alle* x im Intervall $\xi_m < x < \frac{1}{2}(\xi_{m+1} + \xi_m)$ nach Satz 2 immer $\frac{\vartheta_1}{n} \ln (x - \xi_m) < 0$ und, falls $\varrho > 1$ [5]), $\frac{\vartheta_2}{n} \ln (\xi_{m+1} - x) < \frac{1}{2n} \ln [2\varrho(x)]$, also

$$\sigma < \frac{1}{2n} \ln [2\varrho(x)]. \tag{2.19b}$$

Dasselbe gilt natürlich auch für $\frac{1}{2}(\xi_{m+1} + \xi_m) < x < \xi_{m+1}$; aus (2.19a) und (2.19b) folgt daher [nach (2.2a) ist $\varrho(x) = \text{const}$ für $\xi_m \leq x < \xi_{m+1}$]

$$-\frac{1}{n} \ln [2\varrho(x)] < \operatorname*{Max}_{\xi_m < x < \xi_{m+1}} \sigma < \frac{1}{2n} \ln [2\varrho(x)], \qquad \xi_m < x < \xi_{m+1}. \tag{2.19c}$$

Betrachtet man nun wieder Polynom*folgen*, deren relative Nullstellendichte im festgehaltenen Intervall I^* durch (2.17a) gleichmäßig beschränkt ist, so folgt aus (2.19c) schließlich wieder

$$\operatorname*{Max}_{\xi_m < x < \xi_{m+1}} \sigma = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \tag{2.19d}$$

bei Beschränkung auf das Intervall I^*. (Die $\xi_m; \xi_{m+1}$ hängen dabei nun natürlich wie in Satz 2a wieder von dem jeweiligen Polynom P_n ab; wir verzichten aber hier und im folgenden auf n als zweiten Index.)

Damit ist zunächst die in (2.19) herausgegriffene Teilsumme σ der rechten Seite von (2.15a) abgeschätzt. Für die Teilsumme τ der übrigen drei Summanden auf der rechten Seite von (2.15a) gilt aber im festen Intervall I^*, wie unmittelbar zu sehen ist, sogar $\tau = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Aus (2.19d) folgt daher bei Beschränkung auf das Intervall I^* auch

$$\operatorname*{Max}_{\xi_m < x < \xi_{m+1}} \vartheta^* = O\left(\frac{\ln n}{n}\right). \tag{2.20}$$

[5]) (2.19d) ist von dieser Einschränkung unabhängig.

Nun ist nach (2.15) im Intervall $\xi_m < x < \xi_{m+1}$

$$\text{(2.20a)} \qquad \operatorname{Max} \frac{\ln |P_n|}{n} = \int_{-1}^{+1} \ln |x-\xi| \cdot \varrho_n^*(\xi)\, d\xi + \operatorname{Max} \vartheta^*,$$

wobei x zwar nicht notwendig die Stelle X, an der das linksstehende Maximum angenommen werde, sein muß, aber jedenfalls auch eine Stelle im Intervall $(\xi_m; \xi_{m+1})$ [6]), für die nach (2.17a) sicher $|X-x| < \frac{1}{\gamma \cdot n}$ mit festem γ für alle n. Daher ist, wieder nach (2.17a), wegen $\varrho_n^* \leq G$

$$\text{(2.20b)} \qquad \int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{X-\xi}{x-\xi} \right| \varrho_n^*(\xi)\, d\xi = O\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

wie sich z. B. durch Aufspaltung in $\int_{-1}^{x} + \int_{x}^{X} + \int_{X}^{1}$ ($X > x$ vorausgesetzt) nachprüfen läßt [7]).

---

[6]) Allgemein folgt nämlich aus $S(x) = f(x) + g(x)$, die Existenz der betrachteten Extrema vorausgesetzt, wenn

$f(x)$ sein Maximum im Intervall I an der Stelle x_0 und

$g(x)$ sein Maximum im Intervall I an der Stelle x_1 annimmt,

$$\text{einerseits } \operatorname{Max}_I S \geq S(x_1) = f(x_1) + \operatorname{Max}_I g,$$

$$\text{andererseits } \operatorname{Max}_I S \leq \left(\operatorname{Max}_I f\right) + \left(\operatorname{Max}_I g\right) = f(x_0) + \operatorname{Max}_I g,$$

$$\text{also bei stetigem } f \text{ sicher } \operatorname{Max}_I S = f(x) + \operatorname{Max}_I g$$

mit geeignetem x aus I (nach dem „Zwischenwertsatz" für stetige Funktionen).

Die Anwendung auf (2.15) und das Intervall $(\xi_m; \xi_{m+1})$ ist möglich, weil im Inneren dieses Intervalls die linke Seite und der erste Summand auf der rechten Seite, also auch der zweite Summand, stetig sind; die Randpunkte stören hier nicht, da dort die linke Seite (und der zweite Summand der rechten Seite) *negativ* ∞ wird.

[7]) Für $X > x\,(> -1+\varepsilon_0)$ ist $0 < \int_{-1}^{x} \ln\left(\frac{X-\xi}{x-\xi}\right) \varrho_n^*(\xi)\, d\xi \leq G \cdot \int_{-1}^{x} \ln\left(\frac{X-\xi}{x-\xi}\right) d\xi$

$= G \cdot \{(X+1) \cdot [\ln(X+1) - 1] - (X-x) \cdot [\ln(X-x) - 1] - (x+1) \cdot [\ln(x+1) - 1]\}$

$= O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ wegen $|X-x| < \frac{1}{\gamma \cdot n}$;

Entsprechendes gilt für $\int_{X}^{+1} \ln\left(\frac{X-\xi}{x-\xi}\right) \varrho_n^*(\xi)\, d\xi$. Außerdem ist, weil $\varrho_n^* = \text{const}$ im Intervall $(\xi_m; \xi_{m+1})$ und weil $\xi_m < x < X < \xi_{m+1}$,

$$\int_{x}^{X} \ln \left| \frac{X-\xi}{x-\xi} \right| \varrho_n^*(\xi)\, d\xi = \left(\int_{x}^{X} \ln \left| \frac{X-\xi}{x-\xi} \right| d\xi \right) \cdot \varrho_n^*(\xi_m) = 0.$$

Für $x > X$ wäre das Ergebnis dasselbe.

Aus (2.20), (2.20a) und (2.20b) folgt nun

Satz 2b: *Zu jedem $n=2;3;4\ldots$ sei ein Polynom $P_n=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots$ mit lauter einfachen, zwischen -1 und $+1$ gelegenen Nullstellen gegeben. Die relative Nullstellendichte ϱ_n^* der Polynome P_n sei im festen Intervall I^* durch* (2.17a) *gleichmäßig beschränkt. Bedeutet dann X irgendeine zu I^* gehörige Extremstelle des Polynoms P_n, so gilt die Abschätzung*

$$\ln|P_n(X)|=n\cdot\left[\int_{-1}^{+1}\ln|X-\xi|\cdot\varrho_n^*(\xi)\,d\xi+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right]^{8}). \tag{2.21}$$

Die Integralabschätzung (2.21) gibt eine Vorstellung davon, wie stark sich selbst geringfügige Änderungen der relativen Nullstellendichte ϱ_n^* auswirken können: Vergrößert man etwa durch geeignete Änderung von ϱ_n^* das rechts stehende Integral in einem gewissen X-Intervall um mindestens $\varepsilon>0$ (ε unabhängig von n), so bedeutet dies die Multiplikation der Polynomextrema in diesem Intervall mit einem Faktor, der mindestens von der Größenordnung $e^{n\cdot\varepsilon}$ ist, d.h. der mit $n\to\infty$ selbst (sogar exponentiell) nach ∞ geht.

III. Anwendung auf die TSCHEBYSCHEFFsche Approximation.

Wir betrachten nun die Lösungen der TSCHEBYSCHEFFschen Approximationsaufgaben (1.5) mit vorgegebener Funktion $g(x)$ für $n=1;2;3\ldots$; sie haben die Gestalt

$$F_n=g(x)\cdot(x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots+A_n).$$

Auf die rechts in der Klammer stehenden Polynome $P_n(x)$ wollen wir nun die Ergebnisse aus II. anwenden. Zu diesem Zweck setzen wir von den zugehörigen Nullstellendichten voraus, daß für jedes abgeschlossene Intervall

$$I^*\{|\xi|\leq 1-\varepsilon_0\}\quad\text{mit}\quad(1>)\,\varepsilon_0>0$$

$$\varrho^*(\xi)=\lim_{n\to\infty}\varrho_n^*(\xi) \tag{3.1}$$

gleichmäßig bezüglich ξ existiere sowie stetig und positiv sei. Als Zusatzvoraussetzung für $\xi\to\pm1$ verlangen wir nur

$$\varrho_n^*(\xi)<M\cdot|\xi\mp1|^{\alpha}\quad\text{mit}\quad\alpha>-1, \tag{3.1a}$$

wobei α und M zwei von n unabhängige Konstante sein sollen.

Sowohl (3.1) als auch (3.1a) ist beispielsweise in den Fällen (1.2a), (1.3a) und (1.4a) nach (1.8) erfüllt.

---

[8]) Die rechte Seite von (2.21) lautet genau so, wenn man statt der Extremstellen der Polynome P_n Extremstellen der Produkte $g\cdot P_n$ betrachtet und mit X bezeichnet, falls $g(x)$ eine von n unabhängige, stetige und im offenen Intervall $(-1;1)$ nirgends verschwindende Funktion bedeutet; die Korrekturgröße ϑ^* aus (2.15) würde nämlich dadurch nur um den Summanden $\frac{1}{n}\ln|g(x)|=O\left(\frac{1}{n}\right)$ verändert. Entsprechendes gilt auch für Satz 2a. „Extremstellen des Produkts $g\cdot P_n$" bedeuten hier Stellen absoluter Extrema in einem Intervall zwischen zwei benachbarten Nullstellen.

Nach Voraussetzung (3.1) ist mindestens von einem gewissen n an für jedes abgeschlossene Intervall I^* mit $\varepsilon_0 > 0$ die in (2.17a) ausgesprochene Bedingung erfüllt, daß die ϱ_n^* in I^* gleichmäßig (mit positiver oberer und unterer Schranke) beschränkt seien. Damit ist Satz 2b auf die Extremstellen X der hier betrachteten Polynome P_n anwendbar[9]). Nach Satz 1 muß notwendig zwischen je zwei Nullstellen von $F_n = g(x) \cdot P_n(x)$ eine Stelle liegen, an der F_n seinen (in $|x| \leq 1$) maximalen Betrag L_n annimmt. I_m bedeute das abgeschlossene Intervall zwischen den benachbarten Nullstellen ξ_m und ξ_{m+1} von P_n. Für dieses Intervall ist dann, $g(x)$ *positiv* vorausgesetzt[10]),

$$g_{\min} \cdot |P_n|_{\max} \leq |g \cdot P_n|_{\max} = L_n \leq g_{\max} \cdot |P_n|_{\max},$$

also

$$|P_n|_{\max} = \lambda_m \cdot L_n \quad \text{mit} \quad \frac{1}{g_{\max}} \leq \lambda_m \leq \frac{1}{g_{\min}}.$$

Man hat daher für eine Extremstelle X_m des Polynoms P_n

$$\frac{\ln |P_n(X_m)|}{n} = \frac{\ln L_n}{n} + \frac{\ln \lambda_m}{n}.$$

Da $g(x)$ nach Voraussetzung im *ganzen* Intervall I^* stetig und positiv ist, gilt, falls I_m zu I^* gehört,

$$\frac{1}{\operatorname{Max}_{I^*} g} \leq \lambda_m \leq \frac{1}{\operatorname{Min}_{I^*} g}.$$

$|\ln \lambda_m|$ hat daher bei Beschränkung auf ein festes Intervall I^* eine von m (und n) unabhängige obere Schranke Ω. Die Anwendung von Satz 2b ergibt infolgedessen für die sämtlichen zu I^* gehörigen Extremstellen von P_n die Abschätzung

$$\int_{-1}^{+1} \ln |X - \xi| \, \varrho_n^*(\xi) \, d\xi = \frac{\ln L_n}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{11}) \tag{3.2}$$

$\frac{1}{n} \ln L_n$ ist dabei für alle betrachteten Extremstellen X des Polynoms P_n *dieselbe Zahl*. Wir wollen beweisen, daß daher aus (3.2) durch Grenzübergang mit $n \to \infty$ schließlich

$$\int_{-1}^{+1} \ln |x - \xi| \, \varrho^*(\xi) \, d\xi = \text{const} \quad \text{für} \quad -1 < x < 1 \tag{3.3}$$

folgt. Die *Existenz* des Integrals (3.3) ist durch die Voraussetzungen (3.1a) und (3.1) gesichert. Daß es im Intervall $-1 < x < 1$ wirklich unabhängig

[9]) Die Anwendbarkeit von Satz 2b wird nicht davon berührt, daß nach (2.2a) $\varrho_n^*(x) = 0$ auch in Punkten des Intervalls I^* möglich ist [jedoch nur für endlich viele n nach (3.1)]. Die in Satz 2b geforderte Einfachheit der Nullstellen ist bei den hier betrachteten P_n für *alle* n durch Satz 1 gesichert.

[10]) Die Annahme $g(x) > 0$ für $-1 < x < 1$ ist nach den Voraussetzungen zu Satz 1 ohne Einschränkung der Allgemeinheit möglich.

[11]) Dasselbe folgt aus der Anmerkung zu Satz 2b auch für die Extremstellen des Produkts gP_n zwischen je zwei seiner Nullstellen.

von x ist, beweisen wir *indirekt* und nehmen zu diesem Zweck entgegen der Behauptung (3.3) an, es gebe zwei Stellen x_1; x_2 im offenen Intervall $(-1;+1)$, so daß

$$\text{(A)} \qquad \int_{-1}^{+1} \mu \cdot \varrho^*(\xi)\, d\xi = d > 0 \quad \text{mit} \quad \mu = \ln \left| \frac{x_2 - \xi}{x_1 - \xi} \right| .$$

Nach (3.1a) gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß zugleich für alle ϱ_n^*

$$\text{(A 1)} \qquad \left| \int_{(\mp)1}^{(\mp)(1-\varepsilon)} \mu \cdot \varrho_n^*(\xi)\, d\xi \right| < \frac{d}{10}$$

und

$$\text{(A 2)} \qquad \left| \int_{(\mp)1}^{(\mp)(1-\varepsilon)} \mu \cdot \varrho^*(\xi)\, d\xi \right| < \frac{d}{10} .$$

Zu dem hier auftretenden ε gibt es nun aber nach (3.1) ein $N(\varepsilon)$, so daß für $n > N(\varepsilon)$ immer auch

$$\text{(A 3)} \qquad \left| \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \mu \cdot (\varrho_n^* - \varrho)\, d\xi \right| < \frac{d}{5} .$$

Nun ist

$$\int_{-1}^{+1} \mu\, \varrho_n^*\, d\xi = \int_{-1}^{-1+\varepsilon} \mu\, \varrho_n^*\, d\xi + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \mu\, \varrho_n^*\, d\xi + \int_{1-\varepsilon}^{1} \mu\, \varrho_n^*\, d\xi$$

und

$$\int_{-1}^{+1} \mu\, \varrho^*\, d\xi = \int_{-1}^{-1+\varepsilon} \mu\, \varrho^*\, d\xi + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \mu\, \varrho^*\, d\xi + \int_{1-\varepsilon}^{1} \mu\, \varrho^*\, d\xi ,$$

wobei die rechts untereinanderstehenden Integrale nach (A 1) und (A 2) bzw. (bei den mittleren) nach (A 3) jeweils höchstens um $d/5$ voneinander abweichen. Nach (A) ist daher

$$\text{(A 4)} \qquad \int_{-1}^{+1} \mu\, \varrho_n^*\, d\xi = \int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{x_2 - \xi}{x_1 - \xi} \right| \varrho_n^*\, d\xi > \frac{2d}{5} \quad \text{für} \quad n > N(\varepsilon) .$$

Wegen (3.1) und (3.1a) ist aber zugleich für alle n

$$\left| \int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{X_2 - \xi}{X_1 - \xi} \right| \cdot \varrho_n^*(\xi)\, d\xi - \int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{x_2 - \xi}{x_1 - \xi} \right| \cdot \varrho_n^*(\xi)\, d\xi \right| < \frac{d}{5} ,$$

wenn nur $|X_k - x_k| < d^*$ $(k = 1; 2)$ mit einer hinreichend kleinen (von n unabhängigen) Größe d^*. [Man braucht nur wieder den Integrationsweg in zwei geeignete Randstücke und ein Mittelstück aufzuteilen, in den Randstücken (3.1a) und im Mittelstück die aus (3.1) folgende gleichmäßige Beschränktheit der ϱ_n^* zu berücksichtigen.] Damit folgt wegen (A 4)

$$\int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{X_2 - \xi}{X_1 - \xi} \right| \varrho_n^*(\xi)\, d\xi > \frac{d}{5} \quad \text{für alle} \quad n > N(\varepsilon) \quad \text{und} \quad |X_k - x_k| < d^* .$$

Für hinreichend große n sind aber in den Intervallen $|X_k - x_k| < d^*$ sicher Extremstellen des Polynoms P_n enthalten, weil der reziproke Abstand zweier Nullstellen, nämlich $\varrho_n = n \cdot \varrho_n^*$, nach (3.1) mit $n \to \infty$ im ganzen Intervall $-1 < x < 1$ gegen ∞ geht.

Wenn nur n hinreichend groß ist, folgt also aus (A) die Existenz von solchen Extremstellen X_1 und X_2 des Polynoms P_n, für die

$$\int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{X_2 - \xi}{X_1 - \xi} \right| \varrho_n^*(\xi)\, d\xi > \frac{d}{5}.$$

Dies steht aber in Widerspruch dazu, daß nach (3.2)[12]) für solche Extremstellen sicher z. B.

$$\left| \int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{X_2 - \xi}{X_1 - \xi} \right| \varrho_n^*(\xi)\, d\xi \right| < \frac{d}{10}$$

ist, wenn nur n genügend groß ist. Die Behauptung (3.3) ist damit bewiesen. Wir fassen das Ergebnis zusammen in

Satz 3: *Die Polynome $P_n(x)$ seien die in den Lösungen der* TSCHEBYSCHEFF*schen Approximationsaufgabe* (1.5) *bei vorgegebenem $g(x)$ auftretenden Faktoren $x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n$. Konvergieren die zugehörigen relativen Nullstellendichten $\varrho_n^*(\xi)$ in jedem Intervall $I^* \{|\zeta| \leq 1 - \varepsilon_0;\ \varepsilon_0 > 0\}$ gleichmäßig gegen eine stetige und positive Grenzfunktion ϱ^* und sind sie für $\xi \to \pm 1$ zugleich für alle n beschränkt durch $M \cdot |\xi \mp 1|^\alpha$ mit $\alpha > -1$, so ist für diese Grenzfunktion*

$$\int_{-1}^{+1} \ln |x - \xi|\, \varrho^*(\xi)\, d\xi = \text{const} \quad \text{für} \quad -1 < x < 1. \tag{3.4}$$

Die Voraussetzungen des Satzes 3 sind, wie bereits erwähnt, erfüllt bei den Beispielen aus I. Dort ergab sich $\varrho^* = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \frac{1}{\pi}$; also ist nach Satz 3 sicher

$$j(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{\ln |x - \xi|}{\sqrt{1-\xi^2}}\, d\xi = \text{const} \quad \text{für} \quad -1 < x < +1. \tag{3.5}$$

Dies läßt sich übrigens auch unmittelbar durch komplexe Integration zeigen: Wegen $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ ist

$$j(x) = \text{Realteil} \left\{ \int_{-1}^{+1} \frac{\ln (x - \xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\, d\xi \right\},$$

wobei wir uns die Stelle $\xi = x$ durch einen kleinen Halbkreis im Sinn der Fig. 2 umgangen denken [bei hinreichend kleinem Radius macht dies für $j(x)$ beliebig wenig aus; das Vorzeichen der Wurzel im Nenner ist hier natürlich

[12]) Wobei ε_0, d. h. das Intervall I^* so zu wählen ist, daß X_1 und X_2 zu I^* gehören [dies geht immer, weil X_1 und X_2 innere Punkte des Intervalls $(-1; +1)$ sind].

durchweg positiv zu wählen]. Wir betrachten nun statt des bisherigen Integrationswegs den aus Fig. 3 ersichtlichen geschlossenen, zur reellen ξ-Achse symmetrischen Weg $\mathfrak{C}$, beginnend bei A mit positivem Vorzeichen der Wurzel. Dann hat man im unteren Teil des Wegs nicht nur negatives $d\xi$, sondern auch negatives Vorzeichen der Wurzel (weil der Punkt $+1$ durch einen kleinen Kreis umfahren wurde). $\ln(x-\xi)$ hat an entsprechenden Punkten (mit gleichem Realteil von ξ) des oberen und unteren Teilwegs denselben

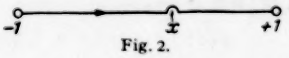

Fig. 2.

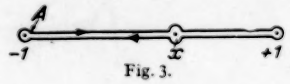

Fig. 3.

Realteil. Der Beitrag der kleinen Kreise um ± 1 zum Gesamtintegral ist bei hinreichend kleinem Radius beliebig gering. Also ist

$$j(x) = \frac{1}{2}\,\text{Realteil}\left\{\int_{\mathfrak{C}} \frac{\ln(x-\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\xi\right\}.$$

Auf dem Weg $\mathfrak{C}$ ist der Integrand durchweg regulär. Daher ist

$$\frac{dj(x)}{dx} = \frac{1}{2}\,\text{Realteil}\left\{\int_{\mathfrak{C}} \frac{d\xi}{(x-\xi)\sqrt{1-\xi^2}}\right\} = 0,$$

weil statt des geschlossenen Wegs $\mathfrak{C}$ auch ein Kreis von beliebig großem Radius $R(>1)$ um $\xi=0$ als Integrationsweg gewählt werden kann (zwischen $\mathfrak{C}$ und diesem Kreis liegen keine singulären Stellen des Integranden) und weil der Integrand für $\xi\to\infty$ wie ξ^{-2} verschwindet. Dies gilt für beliebige x im Bereich $-1<x<1$, woraus unmittelbar

$$j(x) = \text{const} \quad \text{für} \quad -1<x<1$$

als Bestätigung des Ergebnisses (3.4) folgt.

Daß die Konstante C in $\varrho^* = \frac{C}{\sqrt{1-\xi^2}}$ notwendig gleich $\frac{1}{\pi}$ ist, folgt aus

$$\int_{-1}^{+1} \varrho_n^*\,d\xi = \frac{1}{n}\int_{-1}^{+1} \varrho_n\,d\xi = \frac{n-1}{n} \to 1 \quad \text{mit} \quad n\to\infty.$$

In den hier durchgeführten Überlegungen steckt zwar noch kein Beweis dafür, daß

$$\int_{-1}^{+1} \ln|x-\xi|\,\varrho^*(\xi)\,d\xi = \text{const} \quad \text{für} \quad -1<x<1$$

nur durch $\varrho^* = \frac{\text{const}}{\sqrt{1-\xi^2}}$ erfüllt werden kann. Trotzdem [und trotz der hier offen gelassenen Frage, ob die Konvergenz- und Beschränktheitsvoraussetzungen (3.1) und (3.1a) immer erfüllt sind] legen die durchgeführten Abschätzungen folgenden Weg für die praktische Behandlung TSCHEBYSCHEFFscher Approximationsaufgaben der Gestalt (1.5) im Intervall $(-1;1)$ nahe: *Man wird das zu einer Lösung $F_n = g\cdot P_n$ gehörige $P_n(x)$ unter solchen*

Polynomen suchen, deren Nullstellenverteilung und damit auch deren Extremstellenverteilung sich (wenigstens für hinreichend große n) nur wenig von derjenigen bei den gewöhnlichen TSCHEBYSCHEFF*schen Polynomen gleichen Grades unterscheidet.*

IV. Numerisches Beispiel; Iterationsverfahren.

Zur rechnerischen Durchführung geht man zweckmäßig von den *Extremstellen* aus. Beim TSCHEBYSCHEFFschen Polynom n-ten Grades liegen sie an den Punkten $x = \cos\frac{\nu\pi}{n}$ $(\nu = 0; 1; \dots n)$. Liegt eine Approximationsaufgabe der Gestalt (1.5) vor, so verlangen wir demnach zunächst von einem Polynom $P_n^{(I)}$, daß mit wechselndem Vorzeichen

$$g(x) \cdot P_n^{(I)}(x) = \pm L^{(I)} \quad \text{für} \quad x = \cos\frac{\nu\pi}{n} \qquad (\nu = 0; 1; \dots n) \tag{4.1}$$

und daß es bei x^n den Koeffizienten 1 hat. Da $g(x)$ bekannt ist, sind dies $n+1$ lineare Gleichungen für die n unbekannten Koeffizienten von $P_n^{(I)}$ und für die unbekannte Konstante $L^{(I)}$. Die Rechnung läuft auf eine gewöhnliche Interpolationsaufgabe hinaus: Man stellt zunächst ohne Rücksicht auf den Koeffizienten bei x^n und für allgemeines L das Polynom P_n auf, das den Bedingungen

$$g(x) \cdot P_n(x) = \pm L \quad \text{für} \quad x = \cos\frac{\nu\pi}{n} \qquad (\nu = 0; 1; \dots n) \tag{4.1a}$$

genügt und bestimmt dann L so, daß der Koeffizient von x^n den Wert 1 bekommt.

Natürlich wird durch (4.1) nicht erzwungen, daß die Werte $x = \cos\frac{\nu\pi}{n}$ zugleich die Extremstellen von $g\,P_n^{(I)}$ darstellen. Aber man wird das Ergebnis in vielen Fällen bereits als recht brauchbare erste Näherungslösung der Aufgabe (1.5) erkennen.

Zu einer *zweiten Näherung* kann man dann folgendermaßen kommen: Durch die Nullstellen von $P_n^{(I)}$ wird das Approximationsintervall in $n+1$ Teile zerlegt, die der Größe nach geordnet seien. Im ν. dieser Teilintervalle nehme $g\,P_n^{(I)}$ seinen maximalen Betrag an einer Stelle $x_\nu^{(I)}$ an (entsprechend den Stellen $x = \cos\frac{\nu\pi}{n}$ bei den TSCHEBYSCHEFFschen Polynomen). Wir verlangen nun von der zweiten Näherung $g\,P_n^{(II)}$, daß

$$g(x) \cdot P_n^{(II)}(x) = \pm L^{(II)} \quad \text{für} \quad x = x_\nu^{(I)} \quad (\nu = 0; 1; \dots n) \tag{4.2}$$

mit wechselndem Vorzeichen, aber gleichem Betrag $L^{(II)}$, und können gegebenenfalls das damit angedeutete Verfahren wiederholen.

Wir betrachten folgendes Beispiel: Unter allen Funktionen von x der Gestalt

$$f = e^{-x}(x^6 + a_1 x^5 + a_2 x^4 + \cdots + a_6) \tag{4.3}$$

soll durch geeignete Wahl der a_ν diejenige ausgesucht werden, für die

$$\operatorname*{Max}_{-1 \le x \le 1} |f| \tag{4.3a}$$

möglichst klein ist. In der Bezeichnungsweise von Satz 1 ist hier also $g(x) = e^{-x}$. Entsprechend der Vorschrift (4.1) suchen wir zunächst dasjenige Polynom $P(x) = x^6 + a_1 x^5 + \cdots$ [13]), für das (mit einer geeigneten Konstanten $L^{(I)}$)

$$e^{-x} \cdot P(x) = \pm L^{(I)} \quad \text{für} \quad x = \cos \frac{\nu \pi}{6} \quad (\nu = 0; 1; \ldots 6), \tag{4.4}$$

also (mit wechselndem Vorzeichen)

$$P(x) = \pm L^{(I)} \cdot e^{x} \quad \text{für} \quad x = \pm 1;\ \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3};\ \pm \tfrac{1}{2};\ 0. \tag{4.4a}$$

Mit

$$p(x) = (x^2 - 1)\,(x^2 - \tfrac{3}{4})\,(x^2 - \tfrac{1}{4}) \cdot x \tag{4.4b}$$

ergibt sich nach der LAGRANGEschen Interpolationsformel

$$\left\{ P(x) = L^{(I)} \cdot p(x) \cdot \left[\frac{7{,}25}{x-1} + \frac{12{,}68}{x-0{,}866} + \frac{8{,}78}{x-0{,}5} + \frac{5{,}33}{x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3{,}235}{x+0{,}5} + \frac{2{,}24}{x+0{,}886} + \frac{0{,}98}{x+1} \right], \right. \tag{4.4c}$$

wobei

$$L^{(I)} = 0{,}0247. \tag{4.4d}$$

Die im Innern des Intervalls $(-1; +1)$ gelegenen (relativen) Extremstellen von $y = e^{-x} P(x)$ mit $P(x)$ aus (4.4c) sind näherungsweise aus der folgenden Zusammenstellung zu entnehmen:

$$\left\{ \begin{array}{lccccc} x & 0{,}82 & 0{,}4 & -0{,}15 & -0{,}6 & -0{,}90 \\ y & -0{,}027 & 0{,}032 & -0{,}038 & 0{,}038 & -0{,}031. \end{array} \right. \tag{4.4e}$$

Der Einfachheit halber sind dabei die x-Werte nicht genauer angegeben, als es für die weitere Rechnung nötig erschien.

Die in (4.4e) stehenden x sind zusammen mit den Werten ± 1 die in (4.2) mit $x_\nu^{(I)}$ bezeichneten Extremstellen der „ersten Näherung" $g \cdot P_n^{(I)}$. Für die zweite Näherung [in (4.2) mit $P_n^{(II)}$, im folgenden kurz mit Q bezeichnet] verlangen wir entsprechend der Vorschrift (4.2) nun

$$e^{-x} \cdot Q(x) = \pm L^{(II)} \quad \text{für} \quad x = x_\nu^{(I)}, \tag{4.5}$$

also

$$Q(x) = \pm L^{(II)} \cdot e^{x} \quad \text{für} \quad x = 1; 0{,}82; 0{,}4; -0{,}15; -0{,}6; -0{,}90; -1. \tag{4.5a}$$

Mit

$$q(x) = (x^2 - 1)\,(x - 0{,}82)\,(x - 0{,}4)\,(x + 0{,}15)\,(x + 0{,}6)\,(x + 0{,}9) \tag{4.5b}$$

ergibt sich daraus wieder nach der LAGRANGEschen Interpolationsformel

$$\left\{ Q(x) = L^{(II)} \cdot q(x) \cdot \left[\frac{3{,}60}{x-1} + \frac{6{,}97}{x-0{,}82} + \frac{5{,}92}{x-0{,}4} + \frac{4{,}89}{x+0{,}15} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4{,}48}{x+0{,}6} + \frac{4{,}26}{x+0{,}9} + \frac{2{,}125}{x+1} \right], \right. \tag{4.5c}$$

[13]) In (4.1) mit $P_n^{(I)}(x)$ bezeichnet.

wobei

$$L^{(II)} = 0{,}0310. \tag{4.5d}$$

Die im Intervall $(-1; +1)$ gelegenen (relativen) Extremstellen von $y = e^{-x}Q(x)$ mit $Q(x)$ aus (4.5c) sind dann näherungsweise aus der folgenden Zusammenstellung zu ersehen:

(4.5e)

x	0,81	0,36	$-0{,}16$	$-0{,}60$	$-0{,}90$	± 1
y	$-0{,}0310$	$0{,}031_8$	$-0{,}0310$	0,031	$-0{,}0310$	0,0310

(Unsicherheit in den x-Werten etwa 10^{-2}, in den y-Werten etwa $2 \cdot 10^{-4}$). Aus (4.5e) folgt bereits, daß der maximale Betrag der exakten Lösung $F(x) = e^{-x} P^*(x)$ unserer Aufgabe (4.3a) im Intervall $(-1; 1)$ zwischen 0,031 und 0,032 liegen muß. (Die Begründung hierfür entspricht genau derjenigen für die hinreichende Bedingung in Satz 1.)

Das hier angedeutete Iterationsverfahren entspricht einem von REMES [6] für eine andere Klasse von TSCHEBYSCHEFFschen Approximationsaufgaben beschriebenen Weg; dort handelt es sich in unserer Bezeichnungsweise darum, $\mathrm{Max}\,|P_n(x) - v(x)|$ in einem gegebenen Intervall bei gegebenem $v(x)$ und gegebenem n möglichst klein zu machen. Der dortige Konvergenzbeweis läßt sich sinngemäß auch auf unseren Fall übertragen:

Der Kürze halber verwenden wir wieder die Bezeichnungen P und Q des Zahlenbeispiels sowie die Abkürzungen x_ν für $x_\nu^{(1)}$ und

$$g = g_\nu; \qquad |g \cdot P| = \Delta_\nu; \qquad |g \cdot Q| = \lambda^{14}) \quad \text{für} \quad x = x_\nu. \tag{4.6}$$

Nach der LAGRANGEschen Interpolationsformel ist dann

$$P = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\pm \Delta_\nu}{g_\nu} \cdot \frac{\prod\limits_{k \neq \nu} (x - x_k)}{\prod\limits_{k \neq \nu} (x_\nu - x_k)}; \qquad Q = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\pm \lambda}{g_\nu} \cdot \frac{\prod\limits_{k \neq \nu} (x - x_k)}{\prod\limits_{k \neq \nu} (x_\nu - x_k)}, \tag{4.7}$$

wobei die Vorzeichen $\pm$ immer von einem ν zum nächsten wechseln. Da sowohl P als auch Q bei x^n den Koeffizienten 1 haben muß, folgt

$$(1 =) \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\Delta_\nu}{\pm g_\nu \prod\limits_{k \neq \nu} (x_\nu - x_k)} = \lambda \cdot \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\pm g_\nu \cdot \prod\limits_{k \neq \nu} (x_\nu - x_k)}, \tag{4.8}$$

und damit (weil $\prod\limits_{k \neq \nu}$ im Nenner ebenfalls mit wachsendem ν jedesmal sein Vorzeichen wechselt)

$$\lambda = \frac{\sum \Delta_\nu c_\nu}{\sum c_\nu} \quad \text{mit der Abkürzung} \quad c_\nu = \left| g_\nu \cdot \prod_{k \neq \nu} (x_\nu - x_k) \right|^{-1} \tag{4.9}$$

λ ist also (wie ϱ' bei REMES) ein „gewogenes Mittel" aus den Δ_ν; daher ist sicher

$$\alpha < \lambda < \beta \quad \text{mit den Abkürzungen} \quad \alpha = \min_{(\nu)} \cdot \Delta_\nu; \qquad \beta = \max_{(\nu)} \cdot \Delta_\nu. \tag{4.10}$$

[14]) In (4.2) und (4.5) mit $L^{(II)}$ bezeichnet.

Bei einer Wiederholung des Verfahrens, das von $P(x)$ zu $Q(x)$ geführt hat, treten an die Stelle der Größen $\Delta_\nu; \alpha; \beta$ andere, zu $Q(x)$ gehörige Werte, die wir hier durch Querstriche kennzeichnen wollen: $\bar{\Delta}_\nu; \bar{\alpha}; \bar{\beta}$.

Nun ist sicher

$$\lambda \leq \bar{\alpha} \left(= \operatorname*{Min}_{(\nu)} \bar{\Delta}_\nu\right) \tag{4.11}$$

[weil $\bar{\Delta}_\nu$ jeweils den Maximalbetrag von gQ in einem Teilintervall bedeutet und in jedem solchen Teilintervall — vgl. (4.6) — mindestens einmal $|gQ| = \lambda$ ist].

Ferner ist

$$\bar{\alpha} \leq L^*, \tag{4.12}$$

wenn L^* den Maximalbetrag der exakten Lösung gP^* im Approximationsintervall bedeutet. Sonst müßte nämlich die Differenz $P^* - Q$ mehr als $n-1$ Nullstellen haben, obwohl sie ein Polynom höchstens $n-1$-ten Grades ist, ohne (wenn $\bar{\alpha} > L^*$ wäre) identisch verschwinden zu können.

Aus (4.12), (4.11) und (4.10) folgt

$$0 \leq L^* - \bar{\alpha} \leq \vartheta \cdot (L^* - \alpha) \quad \text{mit} \quad 0 < \vartheta < 1, \tag{4.13}$$

d.h. der Unterschied zwischen den gleich hohen Maximalbeträgen L^* der exakten Lösung gP^* und dem kleinsten Maximalbetrag der Näherungslösung gP bzw. gQ hat bei der Iteration abgenommen. Das Entsprechende gilt auch bei weiteren Iterationsschritten, und zwar mit einem für alle Schritte gemeinsamen ϑ (weil die „Gewichte" c_ν *gleichmäßig* zwischen zwei festen positiven Schranken liegen, vgl. REMES [6]), wenn $g(x)$ stetig und $\neq 0$ für $-1 \leq x \leq +1$ ist.

Die der Differenz $L^* - \alpha$ entsprechenden Differenzen konvergieren daher bei dem geschilderten Iterationsverfahren gegen 0. Daraus folgt aber auch dasselbe für die der Differenz $\beta - L^*$ entsprechenden Differenzen. Wegen (4.10) ist nämlich mit einer positiven Größe $\vartheta' (< 1)$, die man wieder so wählen kann, daß sie zugleich auch für alle weiteren Iterationsschritte brauchbar ist, $\lambda - \alpha > \vartheta' (\beta - \alpha)$ und daher unter Benutzung von (4.11) und (4.12)

$$\beta - L^* \leq \beta - \alpha < \frac{\lambda - \alpha}{\vartheta'} \leq \frac{L^* - \alpha}{\vartheta'}.$$

Damit haben wir für Aufgaben der Gestalt (1.5), Satz 1, mit stetigem $g(x) \neq 1$ in $-1 \leq x \leq 1$ den folgenden

Satz 4: *Das durch* (4.2) *beschriebene und in* (4.5) *benutzte Iterationsverfahren konvergiert, wobei die Differenz zwischen den maximalen Beträgen der Näherungslösungen und dem Maximalbetrag L^* der exakten Lösung mindestens vergleichbar mit einer geometrischen Folge gegen* 0 *geht.*

V. Ausblick auf Verallgemeinerungen.

a) Zunächst eine Bemerkung zum Approximationsintervall: Sowohl die abgeleiteten Sätze wie die für die Praxis angegebenen Methoden gelten zunächst nur für das Approximationsintervall $(-1; +1)$. Sie lassen sich aber

jederzeit auch auf beliebige andere (reelle) Approximationsintervalle $(A; B)$ mittels der Transformation

$$x = \frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{2}\, y \tag{5.1}$$

übertragen, die dem Intervall $A \leq x \leq B$ umkehrbar eindeutig das Intervall $-1 \leq y \leq +1$ zuordnet.

b) Nach den grundlegenden Sätzen über TSCHEBYSCHEFFsche Approximation gilt Satz 1 sinngemäß auch für die Aufgabe, die Koeffizienten a_ν in $P_{n-1}(x) = a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ so zu bestimmen, daß bei vorgegebenen (stetigen) Funktionen $g(x)$ und $v(x)$

$$\operatorname*{Max}_{-1 \leq x \leq 1} |g(x)\, P_{n-1}(x) - v(x)| \tag{5.2}$$

möglichst klein wird, wenn nur $g(x) \neq 0$ für $-1 \leq x \leq 1$. Für die Lösung ist auch hier wieder notwendig und hinreichend, daß

$$g(x)\, P_{n-1}(x) - v(x) = \pm L \tag{5.3}$$

mit wechselnden Vorzeichen an (mindestens) $n+1$ der Größe nach geordneten Stellen des Approximationsintervalls, wenn L den maximalen Betrag der linken Seite in diesem Intervall bedeutet.

Für die Praxis könnte man das in IV. angegebene Verfahren auf den allgemeineren Fall (5.2) folgendermaßen übertragen:

Um zu einer ersten Näherung $P^{(\mathrm{I})}_{n-1}(x)$ für das gesuchte Polynom zu kommen, löst man zuerst bei allgemeinem L die Interpolationsaufgabe

$$g(x)\, P_n(x) = v(x) \pm L \quad \text{für} \quad x = \cos\frac{\nu\pi}{n}, \qquad (\nu = 0; \ldots n) \tag{5.4}$$

(mit wechselndem Vorzeichen bei L) und bestimmt nachträglich L so, daß der Koeffizient von x^n in $P_n(x)$ verschwindet (dies ist immer möglich). Das so entstandene Polynom $n-1$. Grades bezeichnen wir nun mit $P^{(\mathrm{I})}_{n-1}(x)$. Für die zweite Näherung $P^{(\mathrm{II})}_{n-1}(x)$ müßte man dann entsprechend dem in IV. angegebenen Verfahren die Stellen $x = \cos\frac{\nu\pi}{n}$ durch geeignete (und sicher in ausreichender Zahl vorhandene) Argumentwerte x_ν der Differenz $y = g\, P^{(\mathrm{I})}_{n-1} - v$ ersetzen, und zwar in unmittelbarer Anlehnung an [6] und etwas allgemeiner als in der Erläuterung vor (4.2) folgendermaßen: Die x_ν seien so ausgewählt, daß 1. die Funktionswerte $y(x_\nu)$ für benachbarte x_ν immer verschiedenes Vorzeichen haben und 2. sowohl $\alpha = \operatorname*{Min}_{(\nu)} |y(x_\nu)|$ als auch $\beta = \operatorname*{Max}_{(\nu)} |y(x_\nu)|$ so groß werden wie es auf Grund der Differenzfunktion $y(x)$ möglich ist.

Die theoretische Fundierung, die Satz 2b und Satz 3 für den *Anfangsschritt* des in IV. geschilderten Verfahrens geben, läßt sich auf (5.2) allerdings nicht ohne weiteres übertragen [es gibt jedoch mit gewissen Einschränkungen eine andere, von hinreichend kleinen Approximationsintervallen[15]) ausgehende Rechtfertigung für den in (5.4) angedeuteten Ansatz; hierauf soll bei anderer Gelegenheit näher eingegangen werden]. Der in IV. gegebene

[15]) Im Fall $g = 1$ schon von KIRCHBERGER [5], S. 35 benutzt.

Konvergenzbeweis für das Iterationsverfahren, das sich an die erste Näherung anschloß, kann dagegen unmittelbar auf den Fall (5.2) verallgemeinert werden:

Entsprechend dem Beweis in IV. verwenden wir dazu die Abkürzungen P und Q für $P_{n-1}^{(\mathrm{I})}$ und $P_{n-1}^{(\mathrm{II})}$, bezeichnen die ausgesuchten Argumentwerte, an denen $|gQ-v|$ den Betrag λ haben soll, wieder mit x_ν und nennen die Werte der Funktionen $g(x)$ und $v(x)$ an diesen Stellen kurz g_ν und v_ν. Ferner sei $|gP-v|=\Delta_\nu$ für $x=x_\nu$.

Den Gln. (4.7) entspricht dann

$$(5.5)\qquad P=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{v_\nu\pm\Delta_\nu}{g_\nu}\cdot\frac{\prod_{k\neq\nu}(x-x_k)}{\prod_{k\neq\nu}(x_\nu-x_k)};\qquad Q=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{v_\nu\pm\lambda}{g_\nu}\cdot\frac{\prod_{k\neq\nu}(x-x_k)}{\prod_{k\neq\nu}(x_\nu-x_k)}.$$

Da sowohl P als auch Q hier nur vom $n-1$-ten Grad sein sollen, folgt aus (5.5)

$$\sum\frac{\pm\Delta_\nu}{g_\nu}\cdot\frac{1}{\prod_{k\neq\nu}(x_\nu-x_k)}=\lambda\cdot\sum\frac{\pm 1}{g_\nu\cdot\prod_{k\neq\nu}(x_\nu-x_k)}$$

und damit für λ genau dasselbe wie in (4.9). Von hier ab läuft der Konvergenzbeweis sinngemäß genau wie in IV.

Sowohl die Approximationsaufgaben aus Satz 1[16]) als auch diejenigen aus [6] sind Spezialfälle der Aufgaben (5.2). (5.2) läßt übrigens nicht nur die Deutung zu, daß $v(x)$ durch eine Funktion der Gestalt $g(x)\,P_{n-1}(x)$ angenähert werden soll: Faßt man $v(x)$ als Abkürzung für das Produkt $g(x)\cdot\psi(x)$ bei gegebenem $\psi(x)$ auf, so kann man (5.2) auch deuten als die Aufgabe, $\psi(x)$ durch $P_{n-1}(x)$ mit unterschiedlicher, durch $g(x)$ angedeuteter Toleranzbreite im Approximationsintervall anzunähern — was in Anwendungen häufig vorkommen kann. Im Beispiel $g(x)=e^{-x}$, vgl. (4.3), würde dies bedeuten, daß nahe bei $x=-1$ relativ große Genauigkeit, dagegen nahe bei $x=1$ relativ geringere Genauigkeit der Annäherung durch das gesuchte Polynom verlangt wird.

c) In der Elektrotechnik (Siebschaltungen der Wechselstromtechnik, vgl. [3]) spielen unter anderem Approximationsaufgaben folgender Art eine Rolle: In

$$(5.5)\qquad f=\prod_{\nu=1}^{n}\frac{x-\xi_\nu}{1-\xi_\nu x}$$

sollen die ξ_ν so bestimmt werden, daß (mit $d<1$)

$$\operatorname*{Max}_{0\leq x\leq d}|f|$$

möglichst klein wird.

Eine allgemeinere Aufgabe — mit anderem Approximationsintervall — wäre z.B. die Forderung, in

$$(5.6)\qquad f=g(x)\cdot\prod_{\nu=1}^{n}\frac{x-\xi_\nu}{1-\psi(\xi_\nu)\cdot x}$$

die ξ_ν so zu bestimmen, daß wieder

$$\operatorname*{Max}_{-1\leq x\leq 1}|f|$$

[16]) Mit $g(x)\neq 0$ für $-1\leq x\leq 1$.

möglichst klein wird. Dabei sollen n; $g(x)$ unter der Voraussetzung $g(x) \neq 0$ im Intervall $-1 < x < 1$ und $\psi(\xi)$ unter der Voraussetzung $\frac{1}{|\psi|} \geq D > 1$ für $|\xi| \leq 1$ vorgegeben sein. In Anlehnung an II. und III. liegt es dann nahe, — ohne daß wir hier auf die Frage nach weiteren Voraussetzungen, die dazu noch nötig wären, eingehen — $|f|$ zu ersetzen durch

$$e^{n \cdot \left[\int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{x-\xi}{1-\psi(\xi)\,x} \right| \cdot \varrho_n^*(\xi)\,d\xi + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \right]}$$

mit der gleichen Bedeutung der relativen Nullstellendichte ϱ_n^* wie in II.

Für die Approximationsaufgabe (5.6) lautet dann in allen Fällen, in denen Satz 1 sinngemäß übertragbar ist — d.h. $n+1$ Extrema gleichen Betrags und wechselnden Vorzeichens der Lösung F im Intervall $(-1; 1)$ — die zu (3.3) analoge Forderung

$$\int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{x-\xi}{1-\psi(\xi)\cdot x} \right| \cdot \varrho^*(\xi) = \text{const}. \tag{5.7}$$

Sie ist wieder unabhängig von $g(x)$ und hängt nur ab von $\psi(\xi)$.

Die Frage der Zulässigkeit dieser Analogie bzw. der Voraussetzungen, die hierfür noch nötig wären, soll auch hier nicht weiter untersucht werden. Die angedeuteten Zusammenhänge geben aber trotzdem bereits einen Hinweis darauf, daß die asymptotische Nullstellenverteilung im Approximationsintervall auch unter sehr allgemeinen Voraussetzungen *nicht* vom Faktor $g(x)$, sondern entscheidend nur von $\psi(\xi)$ in (5.6) abhängen wird. Man kann daher für die Praxis bei gegebenem $\psi(\xi)$, wenn man die asymptotische Nullstellenverteilung z.B. im Fall $g(x) \equiv 1$ kennt, analog dem in IV. geschilderten Verfahren versuchen, auch für andere $g(x)$ zu Näherungslösungen zu kommen.

Literatur.

[1] Tschebyscheff: Gesammelte Werke, Bd. 1, S. 271. Petersburg 1899. (Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions; 1857.) — [2] Lense: Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik, 2. Aufl. Berlin 1947. — [3] Cauer: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Bd. 1, insbes. S. 548ff. Leipzig 1941. — [4] Bernstein: Leçons sur les Propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle. Paris 1926. — [5] Kirchberger: Über Tschebyscheffsche Annäherungsmethoden. Diss. Göttingen 1902. — [6] Remes: Sur le calcul effectif des polynomes d'approximation de Tchebichef. C. R. Acad. Sci., Paris **199**, 337 (1934).

München, Walhallastr. 5.

(Eingegangen am 14. März 1953.)

9183-59

CARLITZ, L.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 40—46 (1953)

Weighted quadratic partitions (mod p^r).

By
LEONARD CARLITZ.

1. Introduction. Let p be a prime >2. In this paper we discuss the sum

$$S = \sum_{x_1, \dots, x_t} e_r(2\lambda_1 x_1 + \cdots + 2\lambda_t x_t), \tag{1.1}$$

where

$$e_r(x) = e^{2\pi i x/p^r} \tag{1.2}$$

and the summation is over all integers (mod p^r) such that

$$a_1 x_1^2 + \cdots + a_t x_t^2 \equiv c \pmod{p^r},$$

and $\lambda_1, \dots, \lambda_t, a_1, \dots, a_t, c$ are fixed integers. The case $r=1$ has been discussed elsewhere [*1*]. To simplify the present discussion we assume that all the a_i are prime to p. We show in § 3 that S can be expressed in terms of Gauss and Kloosterman sums. To obtain simpler explicit results we make the additional assumption

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_t, p) = 1.$$

The final result is stated as a theorem at the end of § 4. In particular if we put

$$\delta = \prod_{i=1}^{t} a_i, \qquad \omega = \sum_{i=1}^{t} a_i' \lambda_i^2 \quad (a_i' a_i \equiv 1 \pmod{p^r})$$

we find that $S=0$ for $\left(\frac{c\omega}{p}\right) = -1$, while

$$S = 2\left(\frac{\delta}{p}\right)^r \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{1}{2}rt} p^{\frac{1}{2}rt - r} \cos\left(\frac{4\pi k}{p^r} + \frac{1}{8}(p^r - 1)^2 \pi\right) \quad (rt \text{ even}), \tag{1.3}$$

$$S = 2\left(\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(t-1)}\delta c}{p}\right) p^{\frac{1}{2}r(t+1)} \cos\frac{4\pi k}{p^r} \quad (rt \text{ odd}), \tag{1.4}$$

where $c\omega \equiv k^2 \pmod{p^r}$ and $r \geq 2$.

2. Preliminaries.

Lemma 1.

$$\sum_{x \,(\mathrm{mod}\, p^r)} e_r(ax) = \begin{cases} p^r & (a \equiv 0 \pmod{p^r}), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases} \tag{2.1}$$

This is an immediate consequence of (1.2).

Let $\left(\frac{a}{b}\right)$ denote the Legendre-Jacobi symbol and put

$$G(a) = G_r(a) = \sum_{x \,(\mathrm{mod}\, p^r)} e_r(ax^2). \tag{2.2}$$

Lemma 2. *For $p \nmid a$,*

$$G(a) = \left(\frac{a}{p^r}\right) G(1), \qquad G^2(a) = \left(\frac{-1}{p}\right)^r p^r, \tag{2.3}$$

and

$$G(1) = i^{((p^r-1)^2/4}\, p^{\frac{1}{2}r} \tag{2.4}$$

For proof see for example [2, p. 153].

Lemma 3. *Let $p^s \mid a$, $p^{s+1} \nmid a$, $s \leq r$; then*

$$S_r(a,b) = \sum_{x \,(\mathrm{mod}\, p^r)} e_r(a x^2 + 2b x) = \begin{cases} 0 & (p^s \nmid b) \\ p^s e_{r-s}(-a_1' b_1^2)\, G_{r-s}(a_1) & (p^s \mid b), \end{cases} \tag{2.5}$$

where $a = p^s a_1$, $b = p^s b_1$, $a_1 a_1' \equiv 1 \pmod{p^{r-s}}$.

Put $x = y\, p^{r-s} + z$; then the left member of (2.5) becomes

$$\sum_{z \,(\mathrm{mod}\, p^{r-s})} e_r(a z^2 + 2b z) \sum_{y \,(\mathrm{mod}\, p^s)} e_s(2b y).$$

By Lemma 1, the inner sum vanishes unless $p^s \mid b$. If however $p^s \mid b$, we get

$$\begin{aligned} & p^s \sum_{z \,(\mathrm{mod}\, p^{r-s})} e_{r-s}(a_1 z^2 + 2 b_1 z) \\ & \quad = p^s\, e_{r-s}(-a_1' b_1^2) \sum_{z \,(\mathrm{mod}\, p^{r-s})} e_{r-s}(a_1 z^2) \\ & \quad = p^s\, e_{r-s}(-a_1' b_1^2)\, G_{r-s}(a_1), \end{aligned}$$

which completes the proof of (2.5).

Lemma 4. *Put*

$$K_r(a,b) = \sum_{\substack{x \,(\mathrm{mod}\, p^r) \\ p \nmid x}} e_r(a x + b x') = K_r(b,a), \tag{2.6}$$

where $x\, x' \equiv 1 \pmod{p^r}$. Then for $r \geq 2$

$$K_r(a,b) = 0. \qquad (p \mid a,\ p \nmid b), \tag{2.7}$$

$$K_r(p^s a, p^s b) = p^s\, K_{r-s}(a,b) \qquad (s < r). \tag{2.8}$$

If $r \geq 2$ and $(a\,b/p) = -1$, then $K_r(a,b) = 0$, while for $(a\,b/p) = 1$.

$$K_r(a,b) = \begin{cases} 2 G_r(a) \cos \dfrac{4\pi k}{p^r} & (p^r \equiv 1 \pmod 4) \\ -2 G_r(a) \sin \dfrac{4\pi k}{p^r} & (p^r \equiv 3 \pmod 4), \end{cases} \tag{2.9}$$

where $a\,b \equiv k^2 \pmod{p^r}$.

For proof of Lemma 4, see [3, § 2].

We remark that

$$K_1(a,b) = -1 \quad (p \mid a,\ p \nmid b) \tag{2.7}'$$

$$K_1(p\,a, p\,b) = p - 1. \tag{2.8}'$$

Lemma 5. *Let* $r \geq 1$. *Put*

$$L_r(a,b) = \sum_{\substack{x \pmod{p^r} \\ p \nmid x}} \left(\frac{x}{p^r}\right) e_r(a x + b x') = L_r(b,a), \tag{2.10}$$

where $x x' \equiv 1 \pmod{p^r}$. *Then in the first place*

$$L_r(a,b) = K_r(a,b) \qquad (r \text{ even}); \tag{2.11}$$

if r *is odd and* $p \nmid a b$, *we have*

$$L_r(a,b) = 0 \qquad \left(\left(\frac{a b}{p}\right) = -1\right), \tag{2.12}$$

$$L_r(a,b) = 2\left(\frac{a}{p}\right) G(1) \cos\frac{4\pi k}{p^r} \qquad \left(\left(\frac{a b}{p}\right) = +1\right), \tag{2.13}$$

where $a b \equiv k^2 \pmod{p^r}$.

To prove (2.12) and (2.13) we take

$$\sum_{u \pmod{p^r}} e_r(-x u^2 + 2u) = e_r(x')\, G_r(-x) = G_r(-1)\left(\frac{x}{p^r}\right) e_r(x'),$$

$$G_r(-1) \sum_x \left(\frac{x}{p^r}\right) e_r(a x + x') = \sum_u \sum_x e_r\big(x(a - u^2) + 2u\big);$$

summing on the right side first with respect to x, we get

$$G_r(-1)\, L_r(a,1) = \begin{cases} 0 & \big((a/p) = -1\big) \\ 2p^r \cos\dfrac{4\pi k}{p^r} & \big(a \equiv k^2 \pmod{p^r}\big). \end{cases} \tag{2.14}$$

Since (2.10) implies

$$L_r(a,b) = \left(\frac{b}{p^r}\right) L_r(a b, 1) \qquad (p \nmid b), \tag{2.15}$$

it is clear that (2.14) yields (2.12) and (2.13).

The proof of $L_r(a,b) = L_r(b,a)$ follows from the first of (2.10) on replacing x by x'.

Lemma 6. *For* $r \geq 2$,

$$L_r(a,b) = 0 \quad (p \mid a,\ p \nmid b), \tag{2.16}$$

$$L_r(p^s a, p^s b) = p^s L_{r-s}(a,b) \quad (s < r). \tag{2.17}$$

The proof of this lemma is similar to the proof of (2.7) and (2.8). In the summation in (2.10) put $x = y p^{r-1} + z$, so that $x' \equiv -y p^{r-1} + z' \pmod{p^r}$, where $z z' \equiv 1 \pmod{p^{r-1}}$. Then

$$L_r(a,b) = \sum_{\substack{z \pmod{p^{r-1}} \\ p \nmid z}} e_r(a z + b z') \sum_{y \pmod{p}} e_1(-b y); \tag{2.18}$$

since the inner sum in the right member vanishes for $p \nmid b$, it is clear that (2.16) holds. In the next place if $p \mid a$, $p \mid b$ then (2.18) yields

$$L_r(a,b) = p \sum_{\substack{z \pmod{p^{r-1}} \\ p \nmid z}} e_r(a z + b z') = p\, L_{r-1}\left(\frac{a}{p}, \frac{b}{p}\right).$$

Repeated application of this formula gives (2.17).

Finally in the case $r=1$, we have

Lemma 7.

$$L_1(a,b)=0 \qquad (p|a,\ p|b), \tag{2.19}$$

$$L_1(a,b)=G_1(a) \qquad (p\nmid a,\ p|b). \tag{2.20}$$

Clearly (2.19) and (2.20) are immediate consequences of (2.10). The case $p\nmid a\,b$ is already covered by Lemma 5.

3. Transformation of the sum S. By Lemma 1 we have

$$p^r S=\sum_u \sum_{x_1,\ldots,x_t} e_r\left\{u\left(\sum_{i=1}^t a_i x_i^2-c\right)+2\sum_{i=1}^t \lambda_i x_i\right\}$$

$$=\sum_u e_r(-cu)\prod_{i=1}^t \sum_x e_r(u a_i x^2+2\lambda_i x),$$

where u, x, x_i range over complete residue systems (mod p^r). Using the first half of (2.5) this becomes

$$p^r S=\sum_u e_r(-cu)\prod_{i=1}^t S_r(u a_i,\lambda_i). \tag{3.1}$$

Now let p^{l_i} denote the highest power of p dividing λ_i, and put $l=\min(\lambda_1,\ldots,\lambda_t)$. Then by Lemma 3 it is clear that we need only consider those terms in the right member of (3.1) for which u is divisible by at most p^l. We accordingly write (3.1) in the following form:

$$p^r S=\sum_{s=0}^{l} T_s, \tag{3.2}$$

where

$$T_s=\sum_u{}' e_r(-cu)\prod_{i=1}^t S_r(u a_i,\lambda_i), \tag{3.3}$$

and the summation in (3.3) is over all u (mod p^r) such that $p^s|u$, $p^{s+1}\nmid u$. Put $u=p^s v$, so that for fixed s, v runs through a reduced residue system (mod p^{r-s}); also let $v v'\equiv 1\equiv a_i a_i'$ (mod p^{r-s}). Similarly put $\lambda_i=p^s\mu_i$. Thus by (2.5) we have

$$S_r(u a_i,\lambda_i)=p^s e_{r-s}(-a_i' v'\mu_i^2)\,G_{r-s}(a_i v),$$

so that by (2.3)

$$\prod_{i=1}^t S_r(u a_i,\lambda_i)=p^{st} e_{r-s}(-\omega v')\prod_{i=1}^t G_{r-s}(a_i v)$$

$$=p^{st} e_{r-s}(-\omega v')\left(\frac{\delta}{p}\right)^{r-s}\left(\frac{v}{p}\right)^{(r-s)t} G_{r-s}^t(1),$$

where for brevity we put

$$\omega=\sum_{i=1}^t a_i'\mu_i^2, \qquad \delta=\prod_{i=1}^t a_i. \tag{3.4}$$

Thus (3.3) yields

$$T_s = p^{st}\left(\frac{\delta}{p}\right)^{r-s} G_{r-s}^t(1) \sum_{\substack{v \pmod{p^{r-s}} \\ p \nmid v}} \left(\frac{v}{p}\right)^{(r-s)t} e_{r-s}(-cv - \omega v'). \tag{3.5}$$

Next using (2.6) and (2.10) we see that (3.5) becomes

$$T_s = \begin{cases} p^{st}\left(\frac{\delta}{p}\right)^{r-s} G_{r-s}^t(1)\, K_{r-s}(c,\omega) & ((r-s)t \text{ even}) \\ p^{st}\left(\frac{\delta}{p}\right)^{r-s} G_{r-s}^t(-1)\, L_{r-s}(c,\omega) & ((r-s)t \text{ odd}). \end{cases} \tag{3.6}$$

Thus by means of (3.2) and (3.6) we have expressed S in terms of $K\,K_s(c,\omega)$ and $L_s(c,\omega)$; also the G factors can be explicitly evaluated by means of Lemma 2.

4. The main result. To further simplify (3.6) we assume that

$$p \nmid (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t); \tag{4.1}$$

in other words, in the previous notation, $l = 0$. Hence (3.2) reduces to simply

$$S = p^{-r} T_0, \tag{4.2}$$

where now

$$T_0 = \begin{cases} \left(\frac{\delta}{p}\right)^r G_r^t(1)\, K_r(c,\omega) & (rt \text{ even}) \\ \left(\frac{\delta}{p}\right)^r G_r^t(-1)\, L_r(c,\omega) & (rt \text{ odd}) \end{cases} \tag{4.3}$$

and ω is determined by

$$\omega = \sum_{i=1}^{t} a_i' \lambda_i^2, \qquad a_i a_i' \equiv 1 \pmod{p^r}; \tag{4.4}$$

δ as before is determined by the second of (3.4).

If we suppose that rt is even and apply Lemma 4, we see first that

$$S = \left(\frac{\delta}{p}\right)^r \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{1}{2}rt} p^{\frac{1}{2}rt-1}(p-1) \qquad (c \equiv 0 \equiv \omega \pmod{p^r}). \tag{4.5}$$

Secondly if p^s is the highest power of p dividing c and p^w is the highest power dividing ω, where $s<r$, $w<r$, then $S=0$ unless $s=w$. When $s=w$, then by (2.8) we get

$$T_0 = \left(\frac{\delta}{p}\right)^r G_r^t(1)\, p^s K_{r-s}\left(\frac{c}{p^s}, \frac{\omega}{p^s}\right),$$

where now neither $c\,p^{-s}$ nor $\omega\,p^{-s}$ is divisible by p. There are then two possibilities according as $r-s=1$ or $r-s \geq 1$. In the first case we have

$$S = \left(\frac{\delta}{p}\right)^r \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{1}{2}rt} p^{\frac{1}{2}rt-1} K_1\left(\frac{c}{p^{r-1}}, \frac{\omega}{p^{r-1}}\right) \quad (s = r-1), \tag{4.6}$$

but in the second case we apply (2.9) to get

$$S = 2\left(\frac{\delta}{p}\right)^r \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{1}{2}rt} p^{\frac{1}{2}rt-r+s} \cos\left(\frac{4\pi k}{p^{r-s}} + \frac{1}{8}(p^{r-s}-1)^2\pi\right) \quad (s < r-1). \tag{4.7}$$

There still remains the possibility $c \equiv 0$ or $\omega \equiv 0 \pmod{p^r}$. Now if $c \equiv 0 \pmod{p^r}$ but $\omega \not\equiv 0 \pmod{p^{r-1}}$ or $\omega \equiv 0 \pmod{p^r}$ but $c \not\equiv 0 \pmod{p^{r-1}}$ then it follows from (2.7) and (2.8) that $S = 0$. The only remaining case is covered by

$$S = -\left(\frac{\delta}{p}\right)^r \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{1}{2}rt} p^{\frac{1}{2}rt-1} \tag{4.8}$$

which follows from (2.7)'; (4.8) holds when one of c, ω is divisible by p^r but the other by only p^{r-1}.

Turning now to the case rt odd we apply the second half of (4.3). Again there are several cases to consider. In the first place

$$S = 0 \qquad (c \equiv 0 \equiv \omega \pmod{p^r}). \tag{4.9}$$

Also if as above p^s is the highest power of p dividing c and p^w the highest power dividing ω, where $s < r$, $w < r$, then by Lemma 6, $S = 0$ unless $s = w$. When $s = w$ we apply (2.17) to get

$$T_0 = \left(\frac{\delta}{p}\right) G_r^t(-1)\, p^s\, L_{r-s}\left(\frac{c}{p^s}, \frac{\omega}{p^s}\right).$$

Since Lemma 5 holds for all $r \geq 1$, we use (2.9), (2.12), (2.13) to get after a little manipulation the following result.

$$S = \begin{cases} 0 & \left(\left(\frac{c\omega p^{-2s}}{p}\right) = -1\right) \\ 2\left(\frac{-\delta}{p}\right)\left(\frac{c p^{-s}}{p}\right)^{r-s} G_r^t(1)\, G_{r-s}(1) \cos\frac{4\pi k}{p^{r-s}} & \left(c\omega p^{-2s} \equiv k^2 \pmod{p^{r-s}}\right). \end{cases} \tag{4.10}$$

The case $c \equiv 0$ or $\omega \equiv 0 \pmod{p^r}$ still remains. We now find, using (2.16) and (2.19), that

$$S = 0 \quad (c \equiv 0 \quad \text{or} \quad \omega \equiv 0 \pmod{p^r}); \tag{4.11}$$

we have stated (4.11) so that (4.9) is included.

The results of this section may be summed up in the following

Theorem. *Let the λ's satisfy* (4.1). *If rt is even then S is determined by* (4.5), (4.6), (4.7), (4.8). *If rt is odd then S is determined by* (4.10) *and* (4.11).

It is easily verified that (1.3) and (1.4) are included in this theorem.

5. A generalization. (Compare [*1*, § 5].) The above results can be stated in a more general manner if in place of (1.1) we consider

$$S(c, \lambda, Q) = \sum_{Q(x)=c} e_r(2\lambda_1 x_1 + \cdots + 2\lambda_t x_t), \tag{5.1}$$

where Q denotes a quadratic form

$$Q(u) = \sum_{i,j=1}^{t} a_{ij} u_i u_j \qquad (\delta = |a_{ij}|) \tag{5.2}$$

of discriminant δ. If we assume $p \nmid \delta$, then by a linear transformation with determinant d prime to p, the quadratic form can be reduced to diagonal

form $\sum \alpha_i u_i^2$, where $\prod \alpha_i = \delta d^2$. Also the number ω is determined by means of

$$\omega = Q'(\lambda_1, \ldots, \lambda_t), \tag{5.3}$$

where $Q'(u)$ denotes the quadratic form inverse to $Q(u)$. Since the results of the present paper are stated in terms of δ and ω and the condition (4.1) for example is unchanged by linear transformations of determinant prime to p, it follows that all the results of §§ 3, 4 can be carried over to the general case. We shall not take the space to restate these results.

In the next place, with the notation of (5.2) and (5.3), define $\lambda_1', \ldots, \lambda'$ by means of

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{t} a_{ij} \lambda_j' \quad (i = 1, \ldots, t). \tag{5.4}$$

Then we have

$$Q(\lambda') = Q'(\lambda). \tag{5.5}$$

Now exactly as in (3.1)

$$p^r S(c, \lambda, Q) = \sum_u \sum_{x_1, \ldots, x_t} e\left\{-c u + u Q(x) + 2 \sum_1^t \lambda_i x_i\right\}.$$

If the x_i are subjected to the transformation

$$x_i = \sum_{j=1}^{t} a_{ij} x_j' \quad (i = 1, \ldots, t),$$

then clearly the x_i' range independently over complete residue systems (mod p^r). Thus using (5.4) and (5.5) we get

$$p^r S(c, \lambda, Q) = \sum_u \sum_{x_1', \ldots, x_t'} e\left\{-c u + u Q(x') + 2 \sum_1^t \lambda_i x_i'\right\}$$

$$= \sum_u \sum_{x_1, \ldots, x_t} e\left\{-c u + Q'(x) + 2 \sum_1^t \lambda_i' x_i\right\}.$$

We have therefore the following reciprocity formula

$$S(c, \lambda, Q) = S(c, \lambda', Q'). \tag{5.6}$$

Note that (5.6) holds for all λ_i.

References.

[1] CARLITZ, L.: Weighted quadratic partitions over a finite field. Canad. J. Math., vol. 5 (1953). — [2] LANDAU, E.: Vorlesungen über Zahlentheorie. Leipzig 1927. — [3] SALIÉ, H.: Über die KLOOSTERMANschen Summen $S(u, v, q)$. Math. Z. **34**, 91—109 (1932).

Dept. of Math., Duke University, Durham N.C. (USA.).

(Eingegangen am 16. März 1953.)

WANG, H.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 47—56 (1953)

The categoricity question of certain grand logics.

By
HAO WANG.

The search for a convenient and comprehensive formal logic in which we can develop all ordinary mathematics has led to several interesting axiom systems for set theory. With regard to these grand logics many questions, including that of consistency, remain open and are apparently difficult.

The purpose of this paper is to do the following for a special grand logic S. Within the system S a denumerable model for S itself is obtained and it is proved that we can add, without contradiction, an additional axiom by which the objects of the system are limited to that denumerable domain. The new axiom seems to make the system categorical in a certain (rather weak) sense.

The result seems of interest because it is probably the first of its kind if we do not use transfinite ordinals. It is not clear whether similar results also hold for other familiar systems of grand logics.

The system S we use is an extension of what is known as QUINE's *New Foundations* (see [1]), based on his idea of *stratification* originally obtained through an analysis of the simple theory of types. It is known that the axioms of QUINE's system can be reduced to a finite number (see [2]). Since we would want to include the axiom of infinity and the axiom of choice in a grand logic and it is not clear that either is derivable in this system, we consider the extension S of it obtained by adding these two special axioms and prove that there is a sentence $E(x, m)$ of S such that the sentence $(x)(\exists m) E(x, m)$ is consistent with the axioms of S. This, when taken as an axiom, may also be considered an axiom of limitation (cf. [3], p. 355). We shall also prove incidentally that there is a certain class of natural numbers which is expressible in S but cannot be proved to exists by the axioms of S.

Let us recall briefly the notations and principles of *New Foundations*. We need, besides the variables x, y, z, u, v w, r, f, g, h, etc. (all of the same kind), only three primitive notions: member hip, expressed by the sign $\in$; *alternative denial*, expressed by the sign $|$; and *general quantification*, expressed by prefixing a variable enclosed in parentheses. From these notions, we can define as usual the notions of conjunction (expressed by &), denial ($\sim$), alternation (v), implication ($\supset$), equivalence ($\equiv$), and particular quantification [expressed by prefixing $(\exists x)$, $(\exists y)$, etc.]. The system includes all the axioms and rules of inference of the lower predicate calculus or quantification theory. (We assume quantification theory developed in QUINE's book [4] which contains infinitely many axioms and the single rule of inference of *modus ponens*). We are of course chiefly interested in the remaining axioms, which are concerned with the special properties of $\in$. These are

given in one axiom and one axiom schema [where $(x = y)$ stands for (z) $(z \in x \equiv z \in y)$]:

A 1. $x = y \supset (x \in w \supset y \in w)$.

As 1. If $F(x)$ does not contain the variable y and is stratified (i.e., it is possible to put numerals for its variables, the same numeral for all occurrences of the same variable in such a way that $\in$ comes to be flanked always by consecutive ascending numerals), then $(\exists y)(x)(x \in y \equiv F(x))$.

Since there are infinitely many sentences $F(x)$ which satisfy the condition of As 1, As 1 includes infinitely many axioms as special cases. HAILPERIN has succeeded ([2]) in giving an equivalent formulation of the system which contains, in place of As 1, only nine special consequences of it. For our purpose, we need not exhibit these nine axioms. We shall merely refer to them as A 2—A 10 and make use of the fact that it is possible so to reformulate the system as to need ten specific stratified (as they are) sentences A 1—A 10 as the only axioms beyond quantification theory.

To develop this system, we introduce various definitions in the usual manner. (Cf. QUINE [1] and [4].) First, we introduce *descriptions*. Given a condition $F(x)$ satisfied by just one object x, the description $(\iota x) F(x)$ is meant to denote that object. A description $(\iota x) F(x)$ is introduced only as part of contexts which are defined as wholes.

1.1 $y \in (\iota x) F(x)$ for $(\exists z)(y \in z \ \& \ (x)(x = z \equiv F(x)))$.

Let a and b each be either a variable or a description.

1.2 $a = b$ for $(x)(x \in a \equiv x \in b)$.

1.3 $(\iota x) F(x) \in a$ for $(\exists y)(y = (\iota x) F(x) \ \& \ y \in a)$.

The next notion to be introduced is the operation of *abstraction*, whereby, given a condition $F(x)$ upon x, we form the class $\hat{x} F(x)$ whose members are just those objects x which satisfy the condition.

1.4 $\hat{x} F(x)$ for $(\iota y)(x)(x \in y \equiv F(x))$.

1.5 $a \subset b$ for $(x)(x \in a \supset x \in b)$.

1.6 $a - b$ for $\hat{x}(x \in a \ \& \sim x \in b)$.

1.7 $\{a\}$ for $\hat{x}(x = a)$.

1.8 $a \cup b$ for $\hat{x}(x \in a \vee x \in b)$.

1.9 V for $\hat{x}(x = x)$.

1.10 Λ for $\hat{x}(\sim x = x)$.

1.11 $\iota^{-1}(a)$ for $(\iota x)(\{x\} = a)$.

For our considerations later on, it is important that we define the ordered pair of two classes a and b (of the same type) to have the same type as a and b (i.e., we do not have to assign a different numeral to the ordered pair). A definition especially suitable for our purpose is QUINE's (see [5]).

2.1 0 for $\{\Lambda\}$.

2.2 Sv for $\hat{x}(\exists y)(y \in x \ \& \ x - \{y\} \in v)$.

2.3 Nn for $\hat{z}(x)\left((0 \in x \,\&\, (y)(y \in x > Sy \in x)) > z \in x\right)$.

2.4 $(m)F(m)$ for $(x)\left(x \in Nn > F(x)\right)$, etc.

2.5 $(\exists m)F(m)$ for $(\exists x)\left(x \in Nn \,\&\, F(x)\right)$, etc.

2.6 $\hat{m}F(m)$ for $\hat{x}\left(x \in Nn \,\&\, F(x)\right)$, etc.

2.7 θz for $\hat{u}(\exists v)\left(v \in z \,\&\, ((\sim v \in Nn \,\&\, u = v) \vee (v \in Nn \,\&\, u = Sv))\right)$.

2.8 $a;b$ for $\hat{w}(\exists z)\left((z \in a \,\&\, w = \theta z) \vee (z \in b \,\&\, w = \theta z \vee \{0\})\right)$.

Notions about relations and functions can then be introduced[1]).

3.1 $\hat{x}\hat{y}F(x,y)$ for $\hat{z}(\exists x)(\exists y)\left(z = x;y \,\&\, F(x,y)\right)$.

3.2 $\mathrm{Rel}(x)$ for $(z)\left(z \in x > (\exists u)(\exists v)(z = u;v)\right)$.

3.3 $Fcn(x)$ for $\mathrm{Rel}(x) \,\&\, (u)(v)(w)\left((v;u \in x \,\&\, w;u \in x) > v = w\right)$.

3.4 $D(x)$ for $\hat{y}(\exists z)(z;y \in x)$.

3.5 $W(x)$ for $\hat{y}(\exists z)(y;z \in x)$.

3.6 $f(y)$ for $(\imath z)(z;y \in f)$.

3.7 $\vec{r}(y)$ for $\hat{x}(x;y \in r)$.

Let S be the system obtained from *New Foundations* (with the axioms A 1—A 10) by adding the following two axioms.

A 11. Axiom of infinity. $\sim\Lambda \in Nn$.

A 12. Axiom of choice. $(x)\left(\mathrm{Rel}(x) > (\exists w)(Fcn(w) \,\&\, w < x \,\&\, D(w) = D(x))\right)$.

Since *New Foundations* is obtained from the simple theory of types by relaxing restrictions, it is easy to convince ourselves that S is at least as strong as the simple theory of types. Therefore, we can derive in S the ordinary arithmetic of natural numbers in some traditional way. In particular, we can define addition $(m+n)$, multiplication $(m \cdot n)$, power (m^n), smaller than $(m<n)$, so that the ordinary laws hold for them. The following principle of induction holds on account of A 2—A 10 (which replace As 1) and the definition 2.3 of Nn.

4.1 If $F(x)$ is stratified, then $\left(F(0) \,\&\, (m)(F(m) > F(Sm))\right) > (n)F(n)$.

The following definitions will be used later on.

4.2 $\begin{cases} \max(m,n) & \text{for } (\imath k)\left((m < n \,\&\, k = n) \vee (n < m \,\&\, k = m) \vee \right. \\ & \left. \qquad \vee (m = n \,\&\, k = n)\right). \end{cases}$

4.3 $\begin{cases} \langle m,n\rangle & \text{for } 2^m 3^n. \\ \langle m,n,k\rangle & \text{for } \langle m,\langle n,k\rangle\rangle. \end{cases}$

[1]) As a matter of fact, the definition 3.2 and the clause $\mathrm{Rel}(x)$ occurring in 3.3 and A 12 are all superfluous, because QUINE has shown (in [7]) that every class is according to 2.8 an ordered pair so that every class is a relation. However, we retain these to remind ourselves that at these places we are interested in classes as relation.

$$4.4\quad \begin{cases} Pr(\langle m,q,k\rangle,\langle i,j,p\rangle) \quad \text{for} \quad m,i<4\ \&\ \big((q=j\ \&\ k=p\ \&\ m<i)\ \vee \\ \qquad \vee \max(q,k)<\max(j,p)\ \vee\ (\max(q,k)=\max(j,p)\ \&\ k<p)\ \vee \\ \qquad \vee\ (\max(q,k)=\max(j,p)\ \&\ k=p\ \&\ q<j)\big). \end{cases}$$

In other words, we can define in S an ordering relation Pr for all the ordered triples of natural numbers with the first term smaller than 4. Then we can correlate these ordered triples with natural numbers by defining in S a function J such that[2]):

$$4.5\quad \begin{cases} J(0)=\langle 0,0,0\rangle; \\ J(Sm)=(\imath m')\,(\exists n)\,(\exists q)\,(\exists k)\,\big(n<4\ \&\ m'=\langle n,q,k\rangle\ \&\ (i)\,(j)\,(p) \\ (Pr(J(m),\langle i,j,p\rangle)\equiv(\langle n,q,k\rangle=\langle i,j,p\rangle\ \vee\ Pr(\langle n,q,k\rangle,\langle i,j,p\rangle)))\big). \end{cases}$$

Next we define in S three functions K_i $(i=1,2,3)$ such that $K_i(n)$ gives the i-th member of the triple $J(n)$.

$$4.6\quad \begin{cases} K_1(n) \quad \text{for} \quad (\imath m)\,(\exists k)\,(\exists j)\,\big(J(n)=\langle m,k,j\rangle\big). \\ K_2(n) \quad \text{for} \quad (\imath k)\,(\exists m)\,(\exists j)\,\big(J(n)=\langle m,k,j\rangle\big). \\ K_3(n) \quad \text{for} \quad (\imath j)\,(\exists m)\,(\exists k)\,\big(J(n)=\langle m,k,j\rangle\big). \end{cases}$$

Since S contains only twelve special axioms, we can write out the conjunction of the closures of these axioms (the closure of an axiom is the result obtained from it by adding at the beginning the general quantifiers for all the free variables in it), and bring the result into an equivalent prenex normal form:

$$(1)\quad \begin{cases} (x)\ldots(y)\,(\exists z)\ldots(\exists w)\,(u)\ldots(v)\,(\exists t)\ldots(\exists s)\ldots \\ \qquad\qquad \ldots U(x,\ldots,y,z,\ldots w,u,\ldots,v,t,\ldots,s,\ldots,\in,|), \end{cases}$$

in such a way that no quantifiers occur in U and at least one general quantifier occurs at the beginning (see, e.g., CHURCH [6], p. 60 and p. 84). Therefore, (1) is consistent (or, in other words, not refutable in quantification theory) if and only if S is consistent; every model of (1) is also one of S, and vice versa. In short, instead of S, we need only consider the special sentence (1) expressed in the notation of S.

[2]) If we use $f_1(j(m))$ as an abbreviation of the right-hand side of the second line of 4.5, we see more clearly the form of 4.5:

$$4.5\quad \begin{cases} J(0)=\langle 0,0,0\rangle; \\ J(Sm)=f_1(J(m)). \end{cases}$$

In order to prove 4.5, we give an explicit definition of the function J:

$$6.1\quad \begin{cases} J \quad \text{for} \quad \hat{j}\,\hat{n}\,(\exists r)\,(j;n\in r\ \&\ (m)\,((\exists x)\,x;m\in r\equiv m\leq n))\ \& \\ \qquad (k)\,\big(k\leq n>\big((k=0\ \&\ r(k)=\langle 0,0,0\rangle)\ \vee\ (\exists i)\,(k=Si\ \&\ r(k)=f_1(r(i)))\big)\big)\big). \end{cases}$$

Or, using FREGE's idea:

$$6.1'\quad J \quad \text{for} \quad \hat{y}\,(r)\,\big(\big(0;\langle 0,0,0\rangle\in r\ \&\ (m)\,(x)\,(m;x\in r>Sm;f_1(J(m))\in r)\big)>y\in r\big).$$

Then we can derive 4.5 from 6.1 or 6.1′ in known manner (compare, for example, BERNAYS [8], p. 12). Indeed, all the recursive functions such as addition, multiplication, power, etc. can be treated similarly.

To simplify our considerations, we assume that the sentence (1) is merely this:

$$(2) \qquad (x)\,(\exists\, y)\,(z)\,(\exists\, u)\,(\exists\, v)\,(w)\,H(x, y, z, u, v, w, \in, |),$$

where H contains no quantifiers. Of course (1) is actually more complex than (2), but it will be clear that exactly analogous considerations are involved in both cases. So let us confine our attention to (2).

Because the axioms of S are all stratified, it is easy to see that (1) can be assumed to be stratified. Hence, we can also assume that (2) and H are stratified. Let us suppose that one correct way of assigning integers to the variables is to associate 1, 3, 2, 2, 1, 1 respectively with x, y, z, u, v, w.

Consider the relation $R = \hat{y}\,\hat{x}'(\exists\, x)\,(x' = \{\{x\}\}\ \&\ (z)\,(\exists\, u)\,(\exists\, v)\,(w)\,H)$, whose domain is by (2) the class $\hat{x}'(\exists\, x)\,(x = \{\{x\}\})$. By the axiom of choice A 12, there is a function f which is included in R and has the same domain $D(f)$ as $D(R)$. Hence, by (2), we can prove in S that there exists a function f such that:

$$(2a) \qquad (x)\,(z)\,(\exists\, u)\,(\exists\, v)\,(w)\,H(x, f(\{\{x\}\}),\ z, u, v, w, \in, |).$$

Next consider $R' = \hat{u}\,\hat{y}'(\exists\, x)\,(\exists\, z)\,(y' = \{x\};\ z\ \&\ (\exists\, v)\,(w)\,H)$. By A 12 and (2a), we have a function g such that:

$$(2b) \qquad (x)\,(z)\,(\exists\, v)\,(w)\,H(x, f(\{\{x\}\}),\ z, g(\{x\}; z), v, w, \in, |).$$

Similarly, we can consider the relation $R'' = \hat{v}'\,\hat{z}'(\exists\, x)\,(\exists\, z)\,(\exists\, v)\,(z' = \{x\};\ z\ \&\ v' = \{v\}\ \&\ (w)\,H)$, and prove in S that there exists a function h:

$$(3) \qquad (x)\,(z)\,(w)\,H(x, f(\{\{x\}\}), z, g(\{x\}; z), \iota^{-1}(h(\{x\}; z)), w, \in, |).$$

If S is consistent (i.e., contains no contradictory theorems), then, by the completeness of quantification theory, there exists a model $M(D, I_\in)$ for (2). In other words, there is a non-empty domain D such that by giving suitable truth values to $\alpha \in \beta$ for all pairs of members α and β of D and taking D as the universal class, (2) comes out true under the ordinary interpretation of truth functions and quantifiers.

There is an object in D corresponding to (say) the class 0 (viz., $\{\Lambda\}$) of S. Let us denote it by 0^*. There is also an object f^* in D corresponding to the function f, an object $f(\{\{0\}\})^*$ corresponding to $f(\{\{0\}\})$, etc. Consider the subdomain D' of D which consists of exactly those objects of D that correspond to the following classes of S[3]: 0, $f(\{\{0\}\})$, $g(\{0\}; 0)$, $\iota^{-1}(h(\{0\}; 0))$, $f(\{\{f(\{\{0\}\})\}\})$, $f(\{\{g(\{0\}; 0)\}\})$, $g(\{0\}; f(\{\{0\}\}))$, etc., where all and only the results obtained by substituting in an arbitrary manner given members of the sequence for all the arguments in $f(\{\{x\}\})$, $g(\{x\}; z)$, or $\iota^{-1}(h(\{x\}; z))$,

[3]) Note incidentally that terms such as $\{0\}; 0, \{0\}; f(\{\{0\}\})$, etc. are all stratified because the variables in 0, $\{0\}$, $\{\{0\}\}$, etc., being bound and thus independent of outside variables, may receive any assignments of integers which fulfill the stratification requirements for the sentences inside the terms.

occur in the sequence. Then the original interpretation of $\in$ with the domain restricted to D' again determines a model $M(D', I_\in)$ for (2) and therefore also one for S. This can be seen from the way the members of D' are chosen (cf. SKOLEM [9], p. 26).

Thus, since (3), being a theorem of S, is by hypothesis true in the model $M(D, I_\in)$, it remains true if we restrict the range of the values which the variables x, z, w can take to the members of the domain D'. Moreover, by the definition of D', for each pair of members of D' corresponding to two classes x and z of S, there is a member of D' corresponding to $\iota^{-1}(h(\{x\}; z))$. Therefore, (2b) is also true when we restrict the range of the values which the variables x, z, v, w can take to the members of the domain D'. Similarly, (2a) is also true when we restrict the range of the variables x, z, u, v, w, to D', because for any x and z which correspond to members of D', there is a member of D' corresponding to $g(\{x\}; z)$. Finally, since $f(\{\{x\}\})$ corresponds to a member of D' if x does, (2) is also true when we restrict the range of values of the variables x, y, z, u, v, w to D'; in other words, (2) is true in $M(D', I_\in)$ [i.e., (2) is true if we retain the interpretation of $\in$ as in $M(D, I_\in)$ but restrict the domain of objects in the model to D' [4])].

We proceed to give in S an enumeration of the classes in S which correspond to members of D'.

In order to exhibit the enumeration of all these classes of S which correspond to members of D', we assume first the ordering of the ordered triples $\langle k, m, n\rangle$ $(k<4)$ of natural numbers as given by the function J introduced in 4.5, according to which $J(0)$ is $\langle 0, 0, 0\rangle$ and for positive j, if $J(j)$ is $\langle k, m, n\rangle$ then $j > k$, $j > m$, and $j > n$. Then we correlate these triples with the classes of S to be enumerated, in the following manner: for any m and n, an ordered triple $\langle 0, m, n\rangle$ is correlated with the class 0 of S; for any n, an ordered triple $\langle 1, m, n\rangle$ is correlated with the class $f(\{\{x\}\})$ if x is correlated with the m-th $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ ordered triple in the ordering determined by J; a triple $\langle 2, m, n\rangle$ is correlated with the class $g(\{x\}; z)$ where x and z are respectively correlated with the m-th and the n-th ordered triples; similarly $\langle 3, m, n\rangle$ is correlated with $\iota^{-1}(h(\{x\}; z))$ if x and z are correlated with the m-th and the n-th triples. Since each triple used above is by 4.5 correlated with a natural number, we can correlate a natural number with the class of S which is correlated with its corresponding triple; for instance, if x is correlated with the j-th triple, then the natural number j is correlated with x, and we can speak of x as the j-th $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ in our enumeration. Clearly, in this way each class of S corresponding to a member of D' is correlated with one or more natural numbers and each natural number is correlated with a unique such class.

---

[4]) Alternatively, we can, instead of constructing $M(D', I_\in)$ as a submodel of $M(D, I_\in)$, construct directly the model $M(D', I_\in)$ by the familiar argument of proving the completeness of quantification theory. Such a proof would require a fairly complex direct determination of the relation $\in$ in D', which is avoided here by taking for granted the known fact that every consistent system has a model.

Our problem is to define in S a function which would give us the enumeration. Equivalently, it is also sufficient to define a relation e such that $y; n \in e$ if and onl if y belongs to the n-th class in the enumeration thus described. Using the notions introduced in 4.6, we can phrase this problem as one of finding a relation e such that the following statements hold.

5.3 For each given numeral $\mathfrak{k}$, we can prove the following:

$$K_1(\mathfrak{k}) = 0 > \vec{e}(\mathfrak{k}) = 0.$$
$$K_1(\mathfrak{k}) = 1 > \vec{e}(\mathfrak{k}) = f\left(\{\vec{e}(K_2(\mathfrak{k}))\}\right).$$
$$K_1(\mathfrak{k}) = 2 > \vec{e}(\mathfrak{k}) = g\left(\{\vec{e}(K_2(\mathfrak{k}))\}; \vec{e}(K_3(\mathfrak{k}))\right).$$
$$K_1(\mathfrak{k}) = 3 > \vec{e}(\mathfrak{k}) = \iota^{-1}\left(h\left(\{\vec{e}(K_2(\mathfrak{k}))\}; \vec{e}(K_3(\mathfrak{k}))\right)\right).$$

To find a relation e which satisfies 5.3, we define a predicate $G(n, r)$ meaning that the relation r provides an enumeration of all the classes correlated with natural numbers no greater than n:

5.1
$$\left\{\begin{array}{l} G(n,r) \quad \text{for} \quad (m)\left((\exists x)\, x; m \in r > m \leq n\right) \,\&\, (k)\left[k \leq n > \left((K_1(k) = 0\right.\right. \\ \qquad \,\&\, \vec{r}(k) = 0) \vee \left(K_1(k) = 1 \,\&\, \vec{r}(k) = f(\{\vec{r}(K_2(k))\})\right) \vee \\ \qquad \left(K_1(k) = 2 \,\&\, \vec{r}(k) = g\left(\{\vec{r}(K_2(k))\}; \vec{r}(K_3(k))\right)\right) \vee \left(K_1(k) = 3\right. \\ \qquad \left.\left.\,\&\, \vec{r}(k) = \iota^{-1}\left(h\left(\{\vec{r}(K_2(k))\}; \vec{r}(K_3(k))\right)\right)\right)\right]. \end{array}\right.$$

Then e is, roughly, the sum of such relations r:

5.2
$$\left\{\begin{array}{l} e \quad \text{for} \quad \hat{x}\,\hat{n}\,(\exists r)\left(G(n,r) \,\&\, x; n \in r\right), \quad \text{or} \\ x; n \in e \equiv x \in \vec{e}(n) \equiv (\exists r)\left(G(n,r) \,\&\, x; n \in r\right). \end{array}\right.$$

We note incidentally that 5.2 is, strictly speaking, meant only as an abbreviational stipulation for introducing the symbol e in context. It is not uncommon to require, before legitimately introducing a name for a class or relation, that we first prove the existence of the class or relation. If we were to follow this requirement, our use of the phrase "the relation e" would be unjustified, since we do not know whether we can prove in S the existence theorem $(\exists y)(x)(n)\left(x; n \in y \equiv (\exists r)\left(G(n,r) \,\&\, x; n \in r\right)\right)$, the defining condition on the right being unstratified. However, we trust that, with this explanation, our usage need not cause any serious misunderstanding. Whenever we use the abbreviation $x; n \in e$, we mean nothing but the formula involving x and n, determined by 5.1 and 5.2.

Using this relation e, we can prove the statements listed under 5.3 as theorems (or rather metatheorems) of S.

6.2. For each given numeral $\mathfrak{n}$, we can prove in S: $(\exists r)\, G(\mathfrak{n}, r)$.

Proof. Case 1. $\mathfrak{n} = 0$. By As 1 (hence also by A 1—A 10), $(\exists y)(x)(m)\left(x; m \in y \equiv (m = 0 \,\&\, x \in 0)\right)$. We can easily prove for this class y: $G(0, y)$.

Case 2. Assume there exists a class z such that $G(\mathfrak{j}, z)$. By As 1 (for the question of stratification, compare footnote 3 above), $(\exists w)(x)(m)(x; m \in w \equiv)(m \leq \mathfrak{j} \;\&\; x; m \in z) \vee (m = S\,\mathfrak{j} \;\&\; ((K_1(S\,\mathfrak{j}) = 0 \;\&\; x \in 0) \vee (K_1(S\,\mathfrak{j}) = 1 \;\&\; x \in f(\{\vec{z}(K_2(S\,\mathfrak{j}))\})) \vee (K_1(S\,\mathfrak{j}) = 2 \;\&\; x \in g(\{\vec{z}(K_2(S\,\mathfrak{j}))\}; \vec{z}(K_3(S\,\mathfrak{j})))) \vee (K_1(S\,\mathfrak{j}) = 3 \;\&\; x \in \iota^{-1}(h(\{\vec{z}(K_2(S\,\mathfrak{j}))\}; \vec{z}(K_3(S\,\mathfrak{j}))))))$. We can prove for this class w: $G(S\,\mathfrak{j}, w)$.

6.3. For each given numeral $\mathfrak{n}$, we can prove in S: If $(G(\mathfrak{n}, r) \;\&\; G(\mathfrak{n}, u))$, then $(x)(m)(x; m \in r \equiv x; m \in u)$.

Proof. When $\mathfrak{n}$ is 0, this is immediate by 5.1. Assume 6.3 true for $\mathfrak{n} = \mathfrak{j}$. But if $G(S\,\mathfrak{j}, r) \;\&\; G(S\,\mathfrak{j}, u)$, then $G(\mathfrak{j}, r) \;\&\; G(\mathfrak{j}, u)$. Hence, if $G(S\,\mathfrak{j}, r) \;\&\; G(S\,\mathfrak{j}, u)$, then $(x)(m)(m \leq \mathfrak{j} > (x; m \in r \equiv x; m \in u))$. But we can prove: $K_2(S\,\mathfrak{j}) \leq \mathfrak{j}$, $K_3(S\,\mathfrak{j}) \leq \mathfrak{j}$. Therefore, $(x)(x; S\,\mathfrak{j} \in r \equiv x; S\,\mathfrak{j} \in u)$. Hence, by 5.1, $(x)(m)(x; m \in r \equiv x; m \in u)$.

Now we are ready to prove 5.3.

Proof of 5.3. By 6.3 and 5.2, if $G(\mathfrak{k}, u)$, then $(x)(x \in \vec{e}(\mathfrak{k}) \equiv x \in \vec{u}(\mathfrak{k}))$. Assume $K_1(\mathfrak{k}) = 0$. Then, by 5.1, if $G(\mathfrak{k}, u)$, $\vec{u}(\mathfrak{k}) = 0$. Therefore, by 6.2, the first case of 5.3 is proved. Assume $K_1(\mathfrak{k}) = 1$. Then, if $G(\mathfrak{k}, u)$, $\vec{u}(\mathfrak{k}) = f(\{\{\vec{u}(K_2(\mathfrak{k}))\}\})$ by 5.1. Hence, by 6.2, the second case is proved. Similarly, the third and fourth cases of 5.3 can be proved.

In more intuitive terms we can also explain the proofs of 6.2, 6.3, and 5.3 somewhat differently. Given any collection of finitely many definite set names $a, \ldots, b$, we can so assign integers to variables that $a, \ldots, b$ all receive the same number (cf. footnote 3) and thereby prove in S the existence of a set y containing exactly $a, \ldots, b$: $x \in y \equiv (x = a \vee \ldots \vee x = b)$. But for each given numeral $\mathfrak{k}$, the pairs $0; 0,\ 1; f(\{\{0\}\}), \ldots, \mathfrak{k}; c$, where c is the $\mathfrak{k}$-th set in the sequence consisting of $0, f(\{\{0\}\}), g(\{0\}; 0), \ldots$, form a collection of finitely many definite sets. Hence, for each $\mathfrak{k}$, we can, as in 6.2, find in S a set r such that $G(\mathfrak{k}, r)$. It is also easy to see, as in 6.3, that for each $\mathfrak{k}$, there is only one such set r. To prove the various cases of 5.3, we only have to find for each $\mathfrak{k}$ the set r such that $G(\mathfrak{k}, r)$ and prove that $\vec{r}(\mathfrak{k})$ is the set $\vec{e}(\mathfrak{k})$ required under the proper clause of 5.3. The latter can be expected to be provable from the way the set r is defined.

From 5.1 and 5.2, we see that $m; m \in e$ is the abbreviation of an unstratified sentence of S. Hence, we do not know whether we can prove in S the existence of a class of natural numbers m such that $m; m \in e$:

$$(\exists y)(m)(m \in y \equiv m; m \in e). \tag{5.4}$$

We proceed to prove that, if S is consistent, 5.4 is independent of the axioms of S.

For this purpose, we observe that if 5.4 is provable in S, so is obviously also the following:

$$(4) \qquad \begin{cases} (\exists y)(m)(m \in y \equiv \sim m; m \in e) & \text{or} \\ (\exists y)(m)(m \in y \equiv \sim m \in \vec{e}(m)). \end{cases}$$

But the class y thus introduced is distinct from all the classes of S which correspond to members of D'. Thus, for every class c that corresponds to a member of D', there exists, on account of 5.3, a definite number $\mathfrak{m}$ (a definite class of S) such that the sentence $c = \vec{e}(\mathfrak{m})$ is true in $M(D', I_\epsilon)$. Assume there were a number $\mathfrak{n}$ such that the sentence $\hat{m}(\sim m; m \in e) = \vec{e}(\mathfrak{n})$ is true in $M(D', I_\epsilon)$, then the following sentence would also be true in $M(D', I_\epsilon)$: $\mathfrak{n} \in \vec{e}(\mathfrak{n}) \equiv \sim \mathfrak{n} \in \vec{e}(\mathfrak{n})$. Since the last sentence cannot be true in any model of S, it follows that the class $\hat{m}(\sim m; m \in e)$ corresponds to no member of D'. That means (4) has the value falsehood in $M(D', I_\epsilon)$. But a theorem of S must be true in every model of S. Hence, neither (4) nor 5.4 is a theorem of S, unless S is inconsistent.

In other words, if $M(D', I_\epsilon)$ is a model for (2), then every class c that can be proved to exist by the axioms of S must correspond to a member of D' and, therefore, for some $\mathfrak{m}$, $c = \vec{e}(\mathfrak{m})$ must be true in $M(D', I_\epsilon)$. Hence, by the normal interpretation of quantifiers, $(y)\,(\exists n)\, y = \vec{e}(n)$ must be true in $M(D', I_\epsilon)$. But then (4) must be false in the model. Hence, neither (4) nor 5.4 is a theorem of S.

Theorem I. *If S is consistent, then 5.4 is not provable in S; in other words, if S is consistent, then the class $\hat{m}(m; m \in e)$ of natural numbers, though expressible in S, cannot be proved to exist by the axioms of S.*

This is worth remarking because, in both ZERMELO's set theory and the simple theory of types, every class of natural numbers, if expressible in the system, can be proved to exist. Notice that, this is different from CARNAP's result (see [*10*], § 60d) which asserts the possibility of giving a class of natural numbers (by talking about a given system) which cannot be defined in the given system.

Next we introduce a few definitions.

7.1 $E(x, m)$ for $(y)\,(y \in x \equiv y; m \in e)$ or $x = \vec{e}(m)$.

7.2 L for $\hat{x}(\exists m)\, E(x, m)$.

7.3 $\begin{cases} (x^*)\, F(x^*) & \text{for } (x)\,(x \in L \supset F(x)), \\ (\exists x^*)\, F(x^*) & \text{for } (\exists x)\,(x \in L \,\&\, F(x)) \quad \text{etc.} \end{cases}$

Let us call the result of replacing all the variables x, y, etc. in a sentence of S by x^*, y^*, etc. the translation of the sentence (for a more detailed discussion of the general notion of translation, see [*11*]).

Our previous considerations have established:

Theorem 2. *If S is consistent, then the translation of the sentence $V = L$ or $(x)\,(\exists m)\, E(x, m)$ is consistent with the translations of all the theorems of S; therefore, if S' is obtained from S by adding $V = L$ or $(x)\,(\exists m)\, E(x, m)$ as a new axiom, then S' is consistent, provided S is.*

Clearly there are sentences which are not known to be decidable in S yet which can be seen to be decidable in S'. For instance, both 5.4 and (4) are definitely refutable in S', but presumably not in S.

References.

[1] QUINE, W. V.: New Foundations for mathematical logic. Amer. Math. Monthly **44**, 70—80 (1937). — [2] HAILPERIN, TH.: A set of axioms for logic. J. Symb. Logic. **9**, 1—19 (1944). — [3] FRAENKEL, A.: Einleitung in die Mengenlehre, 3. Aufl. Berlin 1928. — [4] QUINE, W. V.: Mathematical logic. Revised ed. Cambridge, Mass. 1951. — [5] QUINE, W. V.: On ordered pairs. J. Symb. Logic. **10**, 95—96 (1945). — [6] CHURCH, A.: Introduction to mathematical logic, part I. Princeton 1944. — [7] QUINE, W. V.: On relations as coestensive as with classes. J. Symb. Logic. **11**, 71—72 (1946). — [8] BERNAYS, P.: A system of axiomatic set theory. II. J. Symb. Logic. **6**, 1—17 (1941). — [9] SKOLEM, TH.: Sur la portée du théorème de Löwenheim-Skolem. Les entretiens de Zürich 1938, S. 25—52. Zürich 1941. — [10] CARNAP, R.: Logical syntax of language. London 1937. — [11] WANG, H.: Arithmetic translations of axiom systems. Trans. Amer. Math. Soc. **71**, 283—293 (1951).

Dept. of Philosophy, Harvard University, Cambridge, Mass. (USA.)

(Eingegangen am 19. März 1953.)

KRULL, W.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 57—60 (1953)

Über Polynomzerlegung mit endlich vielen Schritten.

Von
WOLFGANG KRULL.

Die folgenden Bemerkungen wurden angeregt durch eine kürzlich von Herrn MARTIN KNESER in dieser Zeitschrift veröffentlichte Note[1]). — Unter einem *endlichen Körper* möge im folgenden ein Körper K verstanden werden, der aus einem Primkörper K_0 durch Körperadjunktion von endlich vielen Elementen entsteht, $K=K_0(\varrho_1, \ldots, \varrho_l)$. Der endliche Körper K möge in zwei Fällen *wohldefiniert* heißen: *1. Fall*: Es ist zu K ein Erzeugendensystem $\tau_1, \ldots, \tau_m; \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ und ein Polynomsystem $p_1(x_1), p_2(x_1, x_2), \ldots, p_n(x_1, \ldots, x_n)$ über $K_0(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ so gegeben, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: α) Die τ_i sind über K_0 algebraisch unabhängig, es ist also $K_0(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ eine rein transzendente Erweiterung von K_0. β) Es ist $p_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_i)=0$ $(i=1, \ldots, n)$. γ) $p_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}; x_i)$ ist irreduzibel über $K_0(\tau_1, \ldots, \tau_m; \sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1})$ $(i=1, \ldots, n)$. *2. Fall*: Es ist ein System $\tau_1, \ldots, \tau_m$ von über K_0 algebraisch unabhängigen Elementen und ein (nicht notwendig irreduzibles) Polynom $p(x)$ mit Koeffizienten aus $K_0(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ gegeben, und es ist K definiert als der kleinste Zerfällungskörper von $p(x)$ [also als der zu $p(x)$ gehörige Normalkörper] über $K_0(\tau_1, \ldots, \tau_m)$.

Ist K ein beliebiger Körper, $p(x_1, \ldots, x_\mu)$ ein Polynom aus $K[x_1, \ldots, x_\mu]$, so wollen wir $p(x_1, \ldots, x_\mu)$ im *engeren Sinne endlich zerlegbar* nennen, wenn unmittelbar aus den Koeffizienten von $p(x_1, \ldots, x_\mu)$ eine Schranke U berechnet werden kann, derart, daß die Zerlegung von $p(x_1, \ldots, x_\mu)$ in seine über K irreduziblen Faktoren höchstens N rationale Rechenoperationen erfordert. (Dabei wollen wir die — in komplizierteren Fällen sehr beträchtliche — Rechenarbeit vernachlässigen, die zur expliziten Bestimmung von U nötig ist.) — Von *endlicher Zerlegbarkeit in weiterem Sinne* soll gesprochen werden, wenn sich die Zerlegung von $p(x_1, \ldots, x_\mu)$ in eine von vornherein angebbare Anzahl M von Etappen so aufspalten läßt, daß die folgende Bedingung erfüllt ist: Zunächst kann unmittelbar aus den Koeffizienten von $p(x_1, \ldots, x_\mu)$ eine Schranke N_1 für die Anzahl derjenigen rationalen Rechenoperationen ermittelt werden, die zur Erreichung des Endzieles der ersten Etappe nötig sind. Am Ende der ersten Etappe läßt sich dann weiter eine entsprechende Schranke N_2 für die Anzahl der Schritte finden, die zum Ziel der zweiten Etappe führen, usw. Man überlegt sich leicht, daß bei schwierigeren Fällen, in denen die Möglichkeit der endlichen Zerlegung bewiesen wird, in der Regel nur die Zerlegbarkeit im weiteren Sinne unmittelbar evident ist. Hat man z. B. den zweiten Fall eines wohldefinierten Körpers, so muß man, um in ihm wirklich

[1]) Bemerkung über Primpolynomzerlegung in endlich vielen Schritten. Math. Z. **57**, 238—240 (1953).

rechnen zu können, zunächst eine dem ersten Fall entsprechende Basis herstellen. Außerdem ist bei Charakteristik p die eventuell gefundene Basis durch eine neue zu ersetzen, bei der das Auftreten von inseparablen Erweiterungen vermieden ist, usw. Es dürfte kaum allgemein zu zeigen sein, daß die Begriffe „endlich zerlegbar im engeren Sinne" und „endlich zerlegbar im weiteren Sinne" stets äquivalent sein müssen. Aber es gilt wenigstens ohne jede Einschränkung, insbesondere ohne zusätzliche Separabilitätsvoraussetzungen: *Über jedem wohldefinierten Körper K ist jedes Polynom $p(x_1, \ldots, x_n)$ im engeren Sinne endlich zerlegbar*[2]).

Die Resultate von Herrn KNESER widersprechen diesem Ergebnis nicht; er hat im wesentlichen folgendes gezeigt: 1. Man kann einen endlichen Körper K definieren, über dem sich jedes Polynom (zum mindesten im weiteren Sinne) endlich zerlegen läßt, obwohl es unter Umständen unmöglich ist, aus der Ausgangsdefinition eine Darstellung von K abzuleiten, die K als wohldefiniert erscheinen läßt. 2. Über einer passenden einfachen inseparablen Erweiterung L von K gibt es Polynome, die in keinem Sinne endlich zerlegbar sind, — zum mindesten so lange nicht, als man von K nur das weiß, was unmittelbar aus der allgemeinen, eine nicht näher präzisierte „Eigenschaft $E(n)$" enthaltenden Definition dieses Körpers erschlossen werden kann. — Bei 2. ist leicht zu sehen, daß man auf die Inseparabilität von L über K nicht verzichten kann. Im übrigen läßt sich 2. aus der speziellen Definition von K in wenigen Zeilen ableiten, und man kann wohl unbedenklich sagen: Die eigentliche Pointe der KNESERschen Überlegung beruht darauf, daß ein endlicher Körper nicht wohldefiniert zu sein braucht, wenn über ihm alle Polynome endlich zerlegbar sein sollen[3]). Es dürfte sich unter diesen Umständen lohnen, kurz zu zeigen, daß auch bei Charakteristik 0 über gewissen nicht wohldefinierten Körpern alle Polynome endlich zerlegbar sind.

Es seien $N_1, N_2, \ldots$ die nach wachsender Größe geordneten, durch kein Quadrat teilbaren, ganzen Zahlen >1, und es genüge der Körper K den folgenden Bedingungen: 1. Es ist entweder K gleich dem Körper K_0 der rationalen Zahlen oder gleich $K_0(\sqrt{-N_{\nu_0}})$ für passendes ν_0. 2. Für jedes feste ν kann rational mit endlich vielen Schritten entschieden werden, ob $\sqrt{-N_\nu}$ zu K

[2]) Die endliche Zerlegbarkeit im weiteren Sinne kann aus den klassischen KRONECKERschen Ergebnissen erschlossen werden, wenn man für den Fall der Charakteristik p noch den Satz hinzunimmt, daß zu jedem wohldefinierten endlichen Körper rational mit endlich vielen Schritten ein Erzeugendensystem $\tau_1, \ldots, \tau_m$; $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ berechnet werden kann, derart, daß $K_0(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ über K_0 rein transzendent, K über $K_0(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ *separabel* algebraisch ist. (Vgl. hierzu z. B. O. HAUPT, Lehrbuch der Algebra, Bd. 2, Abschn. 23.) — Wesentlich schwieriger ist der Beweis, daß sogar endliche Zerlegbarkeit in engerem Sinne vorliegt. Er wurde in allen Einzelheiten in größerem Zusammenhange von O. ENDLER durchgeführt. (Konstruktion von allgemeinen Normalkörpern in beschränkt vielen Schritten. Hausdorff-Gedächtnis-Preisarbeit der Math.-Nat.-Fakultät Bonn 1952.)

[3]) Von jetzt ab verstehen wir unter „endlicher Zerlegbarkeit" immer Zerlegbarkeit im weiteren Sinne. Auch wenn später von „rationaler Berechnung (Entscheidung) mit endlich vielen Schritten" die Rede ist, soll die Bezeichnung im weiteren Sinne aufgefaßt werden.

gehört oder nicht[4]). *Dann ist über K jedes Polynom endlich zerlegbar, — selbst wenn die Definition von K keine Handhabe liefert, um zu entscheiden, ob $K = K_0$ oder $K > K_0$.*

Zum Beweis überlegt man sich zunächst leicht, daß es genügt, über K_0 irreduzible Polynome aus $K_0[x_0, \ldots, x_\mu]$ zu betrachten, und daß jedes zu untersuchende Polynom in der Gestalt $x_0^n + \sum_{k=1}^{n} q_k(x_1, \ldots, x_\mu) \cdot x_0^{n-k}$ mit ganzzahligen Polynomen $q_k(x_1, \ldots, x_\mu)$ als Koeffizienten angenommen werden darf, da diese Normalform rational mit endlich vielen Schritten durch eine lineare homogene Variablentransformation erreicht werden kann[5]). Ist ferner $x_0^n + \sum_{k=1}^{n} q_k(x_1, \ldots, x_\mu) \cdot x_0^{n-k}$ über K_0 irreduzibel, so kann das Polynom höchstens dann über K reduzibel werden, wenn es in x_0 und allen übrigen Variablen eine geraden Grad hat. — Wir beweisen jetzt zunächst den folgenden *Hilfssatz:*

Es sei $p(x_0; x_1, \ldots, x_\mu) = x_0^{2m_0} + \sum_{k=1}^{2m_0} q_k(x_1, \ldots, x_\mu) \cdot x_0^{2m_0-k}$ *ein über* K_0 *irreduzibles, ganzzahliges Polynom, das über dem imaginär quadratischen Zahlkörper* L *mit der Diskriminante* D *reduzibel wird;* $2m_i$ *sei der Grad von* $p(x_0; x_1, \ldots, x_\mu)$ *in* x_i. *Dann gibt es ein den Bedingungen* $0 \leq l_0 < m_0$; $0 \leq l_i \leq m_i$ $(i = 1, \ldots, \mu)$ *genügendes System von ganzen Zahlen* l_i, *derart, daß* $D \leq 4 \cdot p(l_0; l_1, \ldots, l_\mu)$.

In der Tat, über L muß eine Gleichung gelten:

$$
\begin{aligned}
&p(x_0; x_1, \ldots, x_\mu) \\
&\quad = \left[\left(x_0^{m_0} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_0} r_k(x_1, \ldots, x_\mu) \cdot x_0^{m_0-k}\right) + \frac{\sqrt{-D}}{2}\sum_{k=1}^{m_0} s_k(x_1, \ldots, x_\mu) \cdot x_0^{m_0-k}\right] \cdot \\
&\qquad \left[\left(x_0^{m_0} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_0} r_k(x_1, \ldots, x_\mu) \cdot x_0^{m_0-k}\right) - \frac{\sqrt{-D}}{2}\sum_{k=1}^{m_0} s_k(x_1, \ldots, x_\mu) \cdot x_0^{m_0-k}\right] \\
&\quad = \left(x_0^{m_0} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_0} r_k(x_1, \ldots, x_\mu) \cdot x_0^{m_0-k}\right)^2 + \frac{D}{4}\left(\sum_{k=1}^{m_0} s_k(x_1, \ldots, x_\mu) \cdot x_0^{m_0-k}\right)^2,
\end{aligned}
$$

bei der die $r_k(x_1, \ldots, x_\mu)$ und $s_k(x_1, \ldots, x_\mu)$ ganzzahlige Polynome sind. [Man beachte, daß die Koeffizienten der Faktoren von $p(x_0; x_1, \ldots, x_\mu)$ ganze algebraische Zahlen sein müssen, und berücksichtige die bekannten Sätze über Basen und Diskriminanten in quadratischen Zahlkörpern.] — Da jedes

[4]) Ein Körper der gewünschten Art kann allgemein mit Hilfe einer nicht näher festgelegten Eigenschaft $E(n)$ definiert werden. Will man ein konkretes Beispiel haben, so kann man etwa festsetzen: Gibt es in der Dezimalbruchentwicklung von π eine Sequenz von 10^6 Einsen, so sei $K = K_0(\sqrt{-N_{\nu_0}})$, wobei ν_0 die kleinste Stellenzahl, mit der eine solche Sequenz beginnt. Gibt es keine solche Sequenz, so sei $K = K_0$.

[5]) Man könnte auch jedes betrachtete Polynom durch die bekannte Kroneckersche Substitution auf ein Polynom in einer Veränderlichen reduzieren. Daß wir Polynome in beliebig vielen Veränderlichen betrachten, geschieht eigentlich dem gleich folgenden Hilfssatz zuliebe.

$s_k(x_1, \ldots, x_\mu)$ in x_i höchstens den Grad μ_i besitzt, existiert weiter ein System von ganzen Zahlen l_i mit $0 \leq l_0 < m_0$; $0 \leq l_i \leq m_1$ $(i = 1, \ldots, \mu)$, derart, daß $\sum_{k=1}^{m_0} s_k(l_1, \ldots, l_\mu) \cdot l_0^{m_0-k} \neq 0$ und damit $\left| \sum_{k=1}^{m_0} s_k(l_1, \ldots, l_\mu) \cdot l_0^{m_0-k} \right| \geq 1$. Für dieses System gilt aber offenbar die gewünschte Ungleichung. Wenden wir nun den Hilfssatz auf unseren Fall an, so sehen wir sofort: Ist das über K_0 irreduzible Polynom $p(x_0; x_1, \ldots, x_\mu) = x_0^{2m_0} + \sum_{k=1}^{2m_0} q_k(x_1, \ldots, x_\mu) \cdot x_0^{2m_0-k}$ vorgelegt, so läßt sich mit endlich vielen Schritten eine Schranke ν^* finden, derart, daß $p(x_0; x_1, \ldots, x_\mu)$ höchstens dann über K reduzibel werden kann, wenn K gleich einem der Körper $K_0(\sqrt{-N_\nu})$ $(\nu = 1, \ldots, \nu^*)$ wird. Ob aber diese Bedingung erfüllt ist, kann nach Voraussetzung rational mit endlich vielen Schritten nachgeprüft werden. Ist das Ergebnis positiv, so hat man eine wohldefinierte Darstellung von K gewonnen, und die endliche Zerlegbarkeit von $p(x_0; x_1, \ldots, x_\mu)$ ist gesichert. Mit dieser Feststellung ist unser Beweis abgeschlossen. — Natürlich wird es in der Praxis nur selten vorkommen, daß ein Körper in so unhandlicher Weise definiert ist, wie in unserem Beispiel. Das eigentlich Bemerkenswerte ist aber auch nicht die Definition von K, sondern der Umstand, der es uns ermöglicht, die endliche Zerlegbarkeit über K zu beweisen.

Wir brauchen für unsere Zwecke eine unendliche Folge $K_1, K_2, \ldots$ von paarweise verschiedenen endlichen algebraischen Oberkörpern eines endlichen Grundkörpers K_0 mit der folgenden Eigenschaft: *Zu jedem über K_0 irreduziblen Polynom $p(x)$ aus $K_0[x]$ existiert eine mit endlich vielen Schritten berechenbare Schranke ν^*, derart, daß $p(x)$ über allen Körpern K_ν $(\nu > \nu^*)$ irreduzibel bleibt.*

Herr KNESER benützte die Tatsache, daß man eine derartige Körperkette erhält, wenn man von einer zweifach transzendenten Erweiterung K_0 eines Primkörpers der Charakteristik p ausgeht und $K_i = K_0(\sqrt[p]{v_i})$ mit passend gewähltem $v_i \in K_0$ setzt. Hier im Texte wurde durch den Hilfssatz gezeigt, daß man für K_0 den Körper der rationalen Zahlen, für die K_i die imaginär quadratischen Zahlkörper wählen kann. Der Vergleich der beiden Fälle legt nun eine von unserem ursprünglichen Ausgangsproblem unabhängige, an sich interessante Frage nahe, mit der unsere Betrachtungen geschlossen werden sollen:

Gibt es außer der Folge der imaginär quadratischen Zahlkörper noch weitere, wesentlich verschiedene Folgen[6]) $K_1, K_2, \ldots$ von endlichen algebraischen Zahlkörpern, für die gleichfalls der Satz gilt, daß jedes rational irreduzible, ganzzahlige Polynom $p(x)$ für $\nu > \nu^*$ $(p(x))$ stets über K_ν irreduzibel bleibt? Gesucht sind dabei natürlich solche Körperfolgen, die sich — ähnlich wie in unserem Beispiel — durch einfache arithmetische Eigenschaften auszeichnen. Man denke etwa an Folgen von Kreisteilungskörpern!

[6]) Also Folgen, die nicht aus einer unendlichen Teilfolge der Reihe aller imaginär quadratischen Körper durch Hinzunahme endlich vieler Körper entstehen.

Bonn, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 22. März 1953.)

TILLMANN, H.-G.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 61—83 (1953)

Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen.

Von
HEINZ-GÜNTHER TILLMANN.

Die vorliegende Arbeit setzt Untersuchungen von G. KÖTHE, dem ich auch die Anregung zu dieser Arbeit verdanke, fort. Es handelt sich dabei um Untersuchungen linearer Räume, deren Elemente analytische Funktionen sind.

Ist $\mathfrak{G}$ eine offene Menge in der geschlossenen Zahlenebene Ω, so sei $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ bzw. $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}\mathfrak{G})$ °) der lineare Raum der in $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{C}\mathfrak{G}$ lokalanalytischen[1]) Funktionen. G. KÖTHE[2]) führte in diesen Räumen lokalkonvexe Topologien ein, so daß die Räume $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}\mathfrak{G})$ zueinander stark dual sind. Es ist also jedem stetigen linearen Funktional $x[f]$ auf $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ umkehrbar eindeutig eine Funktion $\tilde{x}(z) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{C}\mathfrak{G})$ zugeordnet, und eine ebensolche Zuordnung besteht zwischen den stetigen linearen Funktionalen auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}\mathfrak{G})$ und den Funktionen $\tilde{u}(z) \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$.

Für den Fall, daß $\mathfrak{C}\mathfrak{G} = C$ eine endliche, einfach geschlossene JORDAN-Kurve ist, gab G. KÖTHE[3]) eine zweite Deutung der stetigen linearen Funktionale auf $\mathfrak{A}(C)$. Er zeigte, daß man sie auffassen kann als eine Verallgemeinerung der Randwerte auf C von analytischen Funktionen (Randverteilungen). Damit ist ein ähnlicher Standpunkt gewonnen wie in der Theorie der Distributionen[4]), zu der sich enge Beziehungen ergeben. Die Distributionen auf C sind spezielle Randverteilungen, nämlich solche von Funktionen, die langsam gegen C wachsen.

Bei KÖTHE war die Voraussetzung der Endlichkeit von C noch wesentlich. In der hier vorliegenden Arbeit soll auch der Fall von Kurven, die durch den unendlichfernen Punkt gehen, untersucht werden. Zugleich werden die Resultate auf Funktionen mehrerer Veränderlichen ausgedehnt. Dabei wird C als direktes Produkt von Kurven, also als Bestimmungsfläche eines Zylindergebietes vorausgesetzt.

°) Ist $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge von Ω, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{C}\mathfrak{M}$ das Komplement $\Omega - \mathfrak{M}$ von $\mathfrak{M}$.

[1]) Eine Funktion $f(z)$ soll in einer Menge $\mathfrak{M}$ lokalanalytisch heißen, wenn sie in jedem Punkte einer offenen Menge $\mathfrak{U} > \mathfrak{M}$ eindeutig definiert und analytisch ist, und wenn $f(z)$ in allen unendlichen Punkten von $\mathfrak{U}$ verschwindet. (Zwei Funktionselemente in verschiedenen Komponenten von $\mathfrak{U}$ brauchen also nicht durch analytische Fortsetzung auseinander hervorgehen.) Zwei auf $\mathfrak{M}$ lokalanalytische Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ werden dabei als identisch angesehen, wenn sie in einer Umgebung von $\mathfrak{M}$ übereinstimmen.

[2]) KÖTHE, G. [4] (Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit).

[3]) KÖTHE, G. [5].

[4]) SCHWARTZ, L. [8].

Im § 1 wird die Topologie der Räume $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$ eingeführt, und in § 2 werden die dualen Räume bestimmt für den Fall, daß $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \cdots \times \mathfrak{G}_n$ bzw. $\overline{\mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{M}}_1 \times \cdots \times \overline{\mathfrak{M}}_n$ eine offene bzw. abgeschlossene Zylindermenge im Raume von n komplexen Veränderlichen ist.

Die Räume $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}\mathfrak{G}_1 \times \cdots \times \mathfrak{C}\mathfrak{G}_n)$ [5]) sind zueinander stark dual, und die duale Paarung lautet

$$(1) \qquad \begin{cases} \langle \tilde{x}, \tilde{u} \rangle = x[\tilde{u}] = \dfrac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C^*} \cdots \int \tilde{x}(z) \cdot \tilde{u}(z)\, dz; \\ \tilde{u}(z) \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G}), \qquad \tilde{x}(z) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{C}\mathfrak{G}_1 \times \cdots \times \mathfrak{C}\mathfrak{G}_n). \end{cases}$$

C^* ist dabei die Bestimmungsfläche eines Teilbereiches $\mathfrak{G}^*$ von $\mathfrak{G}$, auf der $\tilde{x}(z)$ noch regulär ist.

Es folgt die Deutung der stetigen linearen Funktionale auf dem Raume $\mathfrak{A}(C) = \mathfrak{A}(C_1 \times \cdots \times C_n)$ als „Randverteilungen", also als Größen, die auf C selbst definiert sind (§ 3). Zunächst wird gezeigt, daß jedes stetige lineare Funktional $u[x]$ starker Limes von Funktionalen $u_\nu[x]$ ist, denen Funktionen $\tilde{u}_\nu(z)$ zugeordnet sind, deren Randwerte auf C stetige Funktionen definieren. Die Funktionale $u_\nu[x]$ sind durch diese Randwerte vollständig bestimmt. Dadurch ist die Bezeichnung „Randverteilung" gerechtfertigt (Satz 4).

Insbesondere definieren die Funktionen aus $\mathfrak{A}(C)$ selbst Randverteilungen, so daß man $\mathfrak{A}(C)$ als Teilraum seines dualen Raumes $\mathfrak{A}'(C)$ auffassen kann. Unter der Voraussetzung, daß die C_j analytisch im weiteren Sinne sind (d.h. C_j soll durch lineare Transformation aus einer endlichen analytischen Kurve hervorgehen), wird Satz 4 dahingehend verschärft, daß die Approximation bereits durch analytische und im Unendlichen verschwindende Funktionen möglich ist.

Jede Distribution auf C mit kompaktem Träger [6]) ist Randverteilung auf C. Die Funktionen, die solche Distributionen als Randverteilungen haben, sind gerade die langsam wachsenden Funktionen, die im Unendlichen noch analytisch sind und dort verschwinden (Satz 9 und 10). Es wird für diese stetigen linearen Funktionale eine Darstellung durch Integrale auf C selbst gewonnen, aus der unmittelbar der Wert des Funktionals für beliebige, unbeschränkt differenzierbare Funktionen berechnet werden kann, ohne daß noch eine Approximation der differenzierbaren durch analytische Funktionen zu Hilfe genommen werden muß.

Auf Grund dieser Darstellung der Distributionen mit kompaktem Träger kann dann eine unmittelbare funktionentheoretische Definition der starken Topologie im Distributionenraum $\mathfrak{E}'(C)$ gegeben werden.

---

[5]) Ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \cdots \times \mathfrak{G}_n$ so wird $\mathfrak{C}\mathfrak{G}_1 \times \cdots \times \mathfrak{C}\mathfrak{G}_n$ im folgenden vielfach mit $\mathfrak{G}^{\mathfrak{C}}$ bezeichnet.

[6]) Vgl. a. a. O. [4]).

1. Die Räume $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$.

Ist $\mathfrak{G}$ eine offene Punktmenge im OSGOODschen Raum $\Omega^n = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ ($\Omega_j =$ RIEMANNsche Zahlenkugel), so sei $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ der lineare Raum aller in $\mathfrak{G}$ lokalanalytischen Funktionen, in dem auf die folgende Weise eine Topologie $\mathfrak{T}_0$ eingeführt wird: $\{\overline{\mathfrak{G}}_k\}$ sei eine Ausschöpfung des Bereiches $\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{G}}_k)$ sei der BANACH-Raum aller Funktionen, die im Innern von $\overline{\mathfrak{G}}_k$ lokalanalytisch und auf dem Rande noch stetig sind, mit der Norm

$$(2) \qquad \|f\|_k = \sup_{z \in \overline{\mathfrak{G}}_k} |f(z)| .$$

Nun ist offenbar $\mathfrak{D}(\mathfrak{G}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{G}}_k)$, und die Umgebungen

$$(3) \qquad \mathfrak{U}_{k,\varepsilon} = \{f : \|f\|_k \leq \varepsilon\}, \qquad k = 1, 2, \ldots; \quad \varepsilon > 0,$$

definieren eine Topologie $\mathfrak{T}_0$ in $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$. $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ ist dann lokalkonvex, metrisierbar und vollständig, also ein Raum vom Typus F[7]). Aus dem Satz von MONTEL folgt, daß in $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ jede beschränkte Menge[8]) relativ kompakt, also $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ sogar ein M-Raum[9]) ist. Da jede abgeschlossene Menge aus $\mathfrak{G}$ in einem $\overline{\mathfrak{G}}_k$ enthalten ist, sieht man, daß die Topologie $\mathfrak{T}_0$ von der Wahl der Ausschöpfungsfolge unabhängig ist.

Eine Folge $f_m \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ ist offenbar genau dann konvergent bei $\mathfrak{T}_0$, wenn die f_m auf jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergieren.

Für eine abgeschlossene Teilmenge $\overline{\mathfrak{M}} < \Omega^n$ werde der lineare Raum der in $\overline{\mathfrak{M}}$ lokalanalytischen Funktionen mit $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$ bezeichnet. Ist nun $\{\overline{\mathfrak{M}}_k\}$ eine monotone Folge von Umgebungen von $\overline{\mathfrak{M}}$ mit $\overline{\mathfrak{M}} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{M}}_k$, so gilt $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{M}}_k)$. Die Topologie $\mathfrak{T}_1$ von $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$ werde nun definiert als die Topologie der lokalkonvexen Hülle der BANACH-Räume $\mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{M}}_k)$. $\mathfrak{T}_1$ ist also die feinste lokalkonvexe Topologie in $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$, die gröber ist als die Topologie in den Räumen $\mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{M}}_k)$ und wird definiert durch die Umgebungen:

$$(4) \qquad \mathfrak{U}_{(\varepsilon_k)} = \left\{ f : f = \sum \alpha_j f_j \wedge \sum |\alpha_j| \leq 1 \wedge \sup_{z \in \overline{\mathfrak{M}}_j} |f_j(z)| = \|f_j\|_j \leq \varepsilon_j \right\} = \Gamma_{k=1}^{\infty} \mathfrak{U}_{k,\varepsilon_k}$$[10]).

Die Topologie $\mathfrak{T}_1$ hängt von der Wahl der Umgebungsfolge $\{\overline{\mathfrak{M}}_k\}$ nicht ab, denn jede Umgebung von $\overline{\mathfrak{M}}$ enthält eines der $\overline{\mathfrak{M}}_k$.

Hilfssatz 1. *Eine Folge $f_m \in \mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$ ist bezüglich $\mathfrak{T}_1$ dann und nur dann konvergent, wenn alle f_m auf einer festen Umgebung von $\overline{\mathfrak{M}}$ analytisch sind und dort gleichmäßig konvergieren.*

[7]) DIEUDONNÉ, J., u. SCHWARTZ, L. [2].

[8]) Eine Menge $\mathfrak{B}$ eines linearen Raumes heißt beschränkt, wenn es zu jeder Umgebung $\mathfrak{U}$ ein $\lambda > 0$ gibt, so daß $\mathfrak{B} < \lambda \cdot \mathfrak{U}$. Eine Menge $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ ist offenbar genau dann beschränkt, wenn alle Funktionen $f(z) \in \mathfrak{B}$ auf jeder abgeschlossenen Teilmenge von $\mathfrak{G}$ gleichmäßig beschränkt sind.

[9]) Vgl. a. a. O. [7]).

[10]) $\Gamma_{i \in I} \mathfrak{U}_i$ ist die konvexe Hülle der Mengen $\mathfrak{U}_i$.

Hilfssatz 2. *Eine Menge $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$ ist dann und nur dann beschränkt, wenn alle Funktionen aus $\mathfrak{B}$ in einer festen Umgebung von $\overline{\mathfrak{M}}$ analytisch und dort gleichmäßig beschränkt sind.*

Beweis. Wir nehmen an, Hilfssatz 2 sei falsch. Dann gibt es zu jeder Umgebung $\overline{\mathfrak{M}}_k > \overline{\mathfrak{M}}$ eine Funktion $g_k(z) \in \mathfrak{B}$, für die gilt

$$g_k \notin \mathfrak{B}(\mathfrak{M}_k) \quad \text{oder} \quad \|g_k\|_k = \sup_{z \in \overline{\mathfrak{M}}_k} |g_k(z)| > k. \tag{5}$$

Wir bestimmen nun rekursiv eine Folge $\{\varepsilon_k\}$ so, daß die Umgebung $\mathfrak{U}_{(\varepsilon_k)}$ die Funktionen $\frac{1}{k} g_k$ sämtlich nicht enthält. Dann ist $\mathfrak{B}$ in keinem $\lambda \cdot \mathfrak{U}_{(\varepsilon_k)}$ enthalten, kann also nicht beschränkt sein. Wir setzen $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$. Dann ist $g_1 \notin \mathfrak{U}_{1,\varepsilon_1}$ und es ist nicht Häufungspunkt von $\mathfrak{U}_{1,\varepsilon_1}$ bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz in $\mathfrak{M}_1$ [11]):

$$g_1 \notin \overline{\mathfrak{U}}_{1,\varepsilon_1}^{(\mathfrak{M}_1)}; \qquad \left(\frac{1}{j} g_j \notin \overline{\mathfrak{U}}_{1,\varepsilon_1}^{(\mathfrak{M}_1)} \text{ ist trivial für } j > 1\right). \tag{6}$$

Es sei nun $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_K$ bereits so bestimmt, daß $\varepsilon_j \leq 2^{-j}$ und

$$\frac{1}{j} g_j \notin \overline{\bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{U}_{i,\varepsilon_i}}^{(\mathfrak{M}_k)} \quad \text{gilt für alle } j. \tag{7}$$

Wir betrachten nun alle Zerlegungen

$$\begin{cases} g_1(z) = \alpha_1 \cdot h_1(z) + \beta_1 k_1(z) \\ \vdots \\ \frac{1}{k+1} g_{k+1}(z) = \alpha_{k+1} \cdot h_{k+1}(z) + \beta_{k+1} k_{k+1}(z) \end{cases} \tag{8}$$

mit $|\alpha_j| + |\beta_j| \leq 1$, $h_j(z) \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{U}_{i,\varepsilon_i}$ und $k_j(z) \in \mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{M}}_{k+1})$, so sind die

$$\|k_j(z)\|_{k+1} = \sup_{z \in \overline{\mathfrak{M}}_{k+1}} |k_j(z)| \quad (j = 1, \ldots, k+1) \tag{9}$$

nach unten durch eine positive Konstante c_{k+1} beschränkt, da es sonst für wenigstens ein j eine Folge $\alpha_j^{(\nu)} h_j^{(\nu)}(z) \in \bigcap_{m=1}^{k} \mathfrak{U}_{m,\varepsilon_m}$ gäbe, die auf $\overline{\mathfrak{M}}_{k+1}$ und damit auch in $\mathfrak{M}_k$ gleichmäßig gegen $\frac{1}{j} g_j(z)$ konvergieren würde. Nun setzen wir

$$\varepsilon_{k+1} = \min\left(\tfrac{1}{2} c_{k+1}, 2^{-(k+1)}\right). \tag{10}$$

Dann gilt für $j \leq k+1$:

$$\frac{1}{j} g_j(z) \notin \overline{\bigcap_{m=1}^{k+1} \mathfrak{U}_{m,\varepsilon_m}}^{(\mathfrak{M}_{k+1})}. \tag{11}$$

---

[11]) Die abgeschlossene Hülle einer Menge $\mathfrak{U}$ bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz in $\mathfrak{M}_k$ bezeichnen wir mit $\overline{\mathfrak{U}}^{(\mathfrak{M}_k)}$.

Da $g_j \notin j \cdot \mathfrak{U}_{j,1}$ ist, gilt aber (11) auch für alle $j > k+1$, weil für $f(z) \in \overset{k+1}{\underset{m=1}{\Gamma}} \mathfrak{U}_{m,\varepsilon_m}$ gilt:

$$1 - \frac{1}{2^{k+1}} > \|f(z)\|_{k+1} = \sup_{z \in \overline{\mathfrak{M}}_{k+1}} |f(z)|. \tag{12}$$

Damit ist gezeigt, daß es eine Umgebung $\mathfrak{U}_{\{\varepsilon_k\}}$ in $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$ gibt, die keine der Funktionen $\frac{1}{j} g_j(z)$ enthält. Es gilt also für jedes j

$$\mathfrak{B} \not\subset j \cdot \mathfrak{U}_{\{\varepsilon_k\}} \tag{13}$$

d.h. $\mathfrak{B}$ kann nicht beschränkt sein und Hilfssatz 2 ist bewiesen.

Zugleich entnimmt man diesem Beweise auch, daß $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$ bei der Topologie $\mathfrak{T}_1$ separiert ist. Denn ist $f(z)$ eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$, so ist $f(z)$ auf einem $\overline{\mathfrak{M}}_k$ analytisch, und es gibt ein $\lambda > 0$, so daß $\|\lambda \cdot f\|_k > 1$ ist. Der vorstehende Beweis zeigt nun, daß es eine Umgebung $\mathfrak{U}_{\{\varepsilon_k\}}$ gibt, die $\lambda \cdot f(z)$ nicht enthält. Folglich ist $f(z)$ selbst nicht in der Umgebung

$$\mathfrak{U}_{\{\lambda^{-1} \cdot \varepsilon_k\}}$$

enthalten. Nun ergibt sich auch Hilfssatz 1 relativ leicht. Ist $\{f_m(z)\}$ konvergent, so ist die Folge f_m insbesondere beschränkt, bildet also in einer Umgebung von $\overline{\mathfrak{M}}$ eine normale Familie. Da $f_m(z)$ bezüglich der separierten Topologie $\mathfrak{T}_1$ konvergiert, ist der Limes für alle aus $\{f_m\}$ ausgewählten gleichmäßig konvergenten Teilfolgen der gleiche. Infolgedessen ist auch $\{f_m\}$ selbst auf einer festen Umgebung gleichmäßig konvergent gegen diesen Limes der also auch zu $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$ gehört. Damit ist auch Hilfssatz 1 und die Folgen-Vollständigkeit von $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$ bewiesen.

2. Der Dualitätssatz für die Funktionenräume $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$ und $\mathfrak{A}(\mathfrak{P}^C)$ über Zylindermengen.

Es seien $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_n$ offene Punktmengen in der geschlossenen Zahlenebene und

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{D}_1 \times \cdots \times \mathfrak{D}_n \tag{14}$$

der Zylinderbereich mit den Projektionen $\mathfrak{D}_j$.

Ist $x[f(z)]$ ein stetiges lineares Funktional auf dem Raum $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$, so ist x auf einer $\mathfrak{T}_0$-Umgebung in $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$ beschränkt: $|x[f(z)]| \leq M_1$ falls

$$\|f\|_k \leq \varepsilon \quad \text{oder} \quad |x[f]| \leq M \cdot \|f\|_k, \quad \left(M = \frac{M_1}{\varepsilon}\right). \tag{15}$$

x ist also auch stetig in dem Banach-Raum $\mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{P}}_k)$ und läßt sich nach dem Hahn-Banachschen Erweiterungssatz auf diesen ganzen Raum stetig fortsetzen. Das so fortgesetzte Funktional bezeichnen wir auch wieder mit x.

Jede Funktion $f(z) \in \mathfrak{D}(\mathfrak{P})$ läßt sich in einer Zylinderumgebung

$$\mathfrak{U}_k = \mathfrak{U}_{1,k} \times \cdots \times \mathfrak{U}_{n,k}, \qquad (\overline{\mathfrak{U}}_{j,k} < \mathfrak{D}_j), \tag{16}$$

von $\overline{\mathfrak{P}}_K$ durch die CAUCHYsche Integralformel darstellen[12]):

$$(17)\quad f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\underset{C_{1,k}\times\cdots\times C_{n,k}=C_k}{\int\cdots\int} f(\zeta)\cdot\frac{1}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{(2\pi i)^n}\lim_{\Delta\to 0}\sum f(\zeta_\nu)\cdot\frac{1}{\zeta_\nu-z}\,\Delta\zeta_\nu;$$

$C_{j,k}$ ist dabei der Rand von $\mathfrak{U}_{j,k}$.

Die RIEMANNschen Summen konvergieren auf $\overline{\mathfrak{P}}_k$ gleichmäßig, also im Sinne der Topologie von $\mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{P}}_k)$, gegen $f(z)$. Infolgedessen gilt:

$$(18)\quad \begin{cases} x[f(z)]=\dfrac{1}{(2\pi i)^n}\lim\limits_{\Delta\to 0}\sum f(\zeta_\nu)\,x\left[\dfrac{1}{\zeta_\nu-z}\right]\Delta\zeta_\nu=\dfrac{1}{(2\pi i)^n}\underset{C_k}{\int\cdots\int} f(\zeta)\,x\left[\dfrac{1}{\zeta-z}\right]d\zeta \\ \qquad\qquad =\dfrac{1}{(2\pi i)^n}\underset{C_k}{\int\cdots\int} f(\zeta)\,\tilde{x}(\zeta)\cdot d\zeta. \end{cases}$$

Die Funktion

$$(19)\quad \tilde{x}(\zeta)=x\left[\frac{1}{\zeta-z}\right]$$

ist analytisch in einer Umgebung der abgeschlossenen Zylindermenge

$$(20)\quad \mathfrak{P}^{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\,\mathfrak{D}_1\times\cdots\times\mathbf{C}\,\mathfrak{D}_n.$$

Denn für $\zeta_j\in\mathbf{C}\,\overline{\mathfrak{U}}_{j,k}$ konvergiert für $h\to 0$

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{h}\left\{\dfrac{1}{\zeta_1-z_1}\cdots\dfrac{1}{\zeta_j+h-z_j}\cdots\dfrac{1}{\zeta_n-z_n}-\dfrac{1}{\zeta_1-z_1}\cdots\dfrac{1}{\zeta_j-z_j}\cdots\dfrac{1}{\zeta_n-z_n}\right\} \\ \qquad =\dfrac{1}{h}\left\{\dfrac{1}{\zeta_j+h-z_j}-\dfrac{1}{\zeta_j-z_j}\right\}\cdot\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n}\dfrac{1}{\zeta_l-z_l} \end{cases}$$

auf $\overline{\mathfrak{P}}_k$ gleichmäßig, so daß auch

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{h}\{\tilde{x}(\zeta_1,\ldots,\zeta_j+h,\ldots,\zeta_n)-\tilde{x}(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)\} \\ \qquad =x\left[\dfrac{1}{h}\left\{\dfrac{1}{\zeta_j+h-z_j}-\dfrac{1}{\zeta_j-z_j}\right\}\cdot\prod\limits_{l\neq j}\dfrac{1}{\zeta_l-z_l}\right] \end{cases}$$

für $h\to 0$ konvergiert und man erhält:

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\,\tilde{x}(\zeta)}{\partial\zeta_j}=x\left[\dfrac{(-1)}{(\zeta_1-z_1)\ldots(\zeta_j-z_j)^2\ldots(\zeta_n-z_n)}\right] & \text{und allgemein:} \\ \dfrac{\partial^{|k|}\,\tilde{x}(\zeta)}{\partial\zeta_1^{k_1}\,\partial\zeta_n^{k_n}}=x\left[\dfrac{(-1)^{|k|}\,k_1!\ldots k_n!}{(\zeta_1-z_1)^{k_1+1}\ldots(\zeta_n-z_n)^{k_n+1}}\right]. & \end{cases}$$

Die Entwicklungskoeffizienten der Potenzreihen von $\tilde{x}(\zeta)$ lassen sich also bestimmen als die Werte des Funktionals x für einfache, rationale Funktionen aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$.

[12]) Zur Vereinfachung der Schreibweise benutzen wir die Abkürzungen

$$z=(z_1,\ldots,z_n);\qquad \zeta-z=(\zeta_1-z_1)\ldots(\zeta_n-z_n)$$
$$dz=dz_1\ldots dz_n;\qquad \Delta z=\Delta\zeta_1\ldots\Delta\zeta_n.$$

Weiter verschwindet $\tilde{x}(\zeta)$ in allen unendlichfernen Punkten von

$$\overline{\mathfrak{U}}_k^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}\,\overline{\mathfrak{U}}_{1,k} \times \cdots \times \mathfrak{C}\,\overline{\mathfrak{U}}_{n,k}.$$

Denn gehört der unendlichferne Punkt zu $\mathfrak{C}\mathfrak{U}_{j,k}$, so ist z_j auf $\overline{\mathfrak{P}}_k$ beschränkt, da $\mathfrak{U}_k > \overline{\mathfrak{P}}_k$. Für $\zeta_j \to \infty$ geht also $\frac{1}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)}$ auf $\overline{\mathfrak{P}}_k$ gleichmäßig gegen Null, so daß auch

$$\lim_{\zeta_j \to \infty} \tilde{x}(\zeta) = \lim_{\zeta_j \to \infty} x\left[\frac{1}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)}\right] = 0 \tag{24}$$

ist. Umgekehrt erzeugt jedes $\tilde{y}(\zeta)$ aus $\mathfrak{A}(\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}})$ ein stetiges lineares Funktional

$$y[f] = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_k'} \cdots \int f(\zeta)\,\tilde{y}(\zeta)\,d\zeta \tag{25}$$

$\tilde{y}$ ist durch y eindeutig bestimmt, denn es gilt für $\tilde{y}(\zeta)$ die CAUCHYsche Darstellung

$$\tilde{y}(\zeta) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_k'} \cdots \int \tilde{y}(z) \cdot \frac{1}{\zeta - z}\,dz = y\left[\frac{1}{\zeta - z}\right]. \tag{26}$$

Die Zuordnung $y \to \tilde{y}(\zeta)$ ist also eine Isomorphie des zu $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$ dualen Raumes $\mathfrak{D}'(\mathfrak{P})$ mit $\mathfrak{A}(\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}})$.

Wir zeigen nun, daß $\mathfrak{A}'(\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}})$ wieder zu $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$ isomorph ist. Jede Funktion $f(z) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}})$ läßt sich in einer Umgebung von $\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}}$ durch die CAUCHYsche Formel darstellen, wobei das Integral im Sinne der Topologie $\mathfrak{T}_1$ konvergiert:

$$f(z) = \frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n} \int_{C_k} \cdots \int f(\zeta)\,\frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{27}$$

Für ein stetiges Funktional $u[f]$ gilt also wieder

$$u[f] = \frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n} \int_{C_k} \cdots \int f(\zeta)\,\tilde{u}(\zeta)\,d\zeta, \quad \text{wo} \quad \tilde{u}(\zeta) = u\left[\frac{1}{\zeta - z}\right]. \tag{28}$$

ist. Für $\zeta \in \mathfrak{P}$ konvergiert für $h \to 0$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{\zeta_1 - z_1} \cdots \frac{1}{\zeta_j + h - z_j} \cdots \frac{1}{\zeta_n - z_n} - \frac{1}{\zeta_1 - z_1} \cdots \frac{1}{\zeta_j - z_j} \cdots \frac{1}{\zeta_n - z_n}\right\} \\ &\qquad = \frac{(-1)}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_j + h - z_j)\,(\zeta_j - z_j)\cdots(\zeta_n - z_n)} \end{aligned}\right. \tag{29}$$

gleichmäßig auf einer Umgebung von $\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}}$, also im Sinne von $\mathfrak{T}_1$ in $\mathfrak{A}(\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}})$. $\tilde{u}(\zeta)$ ist also in $\mathfrak{P}$ analytisch, und analog wie oben sieht man, daß $\tilde{u}(\zeta)$ in den unendlichen Punkten von $\mathfrak{P}$ verschwindet. Die durch (28) gegebene Zuordnung $u \to \tilde{u}$ ist also eine Isomorphie von $\mathfrak{A}'(\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}})$ und $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$. Da $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$ ein M-Raum ist, also jede beschränkte Menge relativ kompakt ist, folgt aus dem Satz von MACKEY-ARENS[13]), daß die starke Topologie $\mathfrak{T}_b$ in $\mathfrak{A}(\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}})$ die feinste lokalkonvexe Topologie ist, die $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$ als dualen Raum ergibt. $\mathfrak{T}_b$ ist also insbesondere feiner als $\mathfrak{T}_1$. Andererseits sieht man leicht, daß $\mathfrak{T}_1$ feiner ist als

[13]) MACKEY, G. W. [6], [7], zitiert in [2], S. 64.

$\mathfrak{T}_b$: Ist $\mathfrak{M}$ eine beschränkte Menge in $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$, so gilt für alle Funktionen $f(z) \in \mathfrak{M}$ eine Abschätzung

$$(30) \qquad \|f\|_k = \sup_{z \in \overline{\mathfrak{P}}_k} |f(z)| \leq M_k, \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Die $\overline{\mathfrak{P}}_k$ können dabei als Zylindermengen $\overline{\mathfrak{D}}_{1,k} \times \cdots \times \overline{\mathfrak{D}}_{n,k}$ vorausgesetzt werden, wobei der Rand C_{jk} von $\overline{\mathfrak{D}}_{jk}$ rektifizierbar und von endlicher Länge $L_{j,k}$ ist. Wir setzen nun

$$(31) \qquad \varepsilon_k = \frac{(2\pi)^n}{M_k \cdot L_{1,k} \cdots L_{n,k}}.$$

Ist $\tilde{x}(z)$ regulär in $\mathfrak{P}_k^{\mathfrak{C}}$ und dort $|\tilde{x}(z)| \leq \varepsilon_k$, so gilt offenbar

$$(32) \qquad |x[f(z)]| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{C_{1,k} \times \cdots \times C_{n,k}} \cdots \int |f(\zeta) \cdot \tilde{x}(\zeta)| \cdot |d\zeta| \leq 1 \quad \text{für alle } f \in \mathfrak{M}.$$

Die zu $\mathfrak{M}$ polare Menge $\mathfrak{M}^0$ enthält also die $\mathfrak{T}_1$-Umgebung

$$(33) \quad . \quad \mathfrak{U}_{(\varepsilon_k)} = \left\{ \tilde{y}(z) : \tilde{y}(z) = \sum \alpha_i \tilde{y}_i(z) \wedge \sum |\alpha_i| \leq 1 \wedge \|\tilde{y}_i\|_i = \sup_{z \in \mathfrak{P}_i^{\mathfrak{C}}} |\tilde{y}_i(z)| \leq \varepsilon_i \right\}.$$

Also muß $\mathfrak{T}_1$ mit der starken Topologie $\mathfrak{T}_b$ in $\mathfrak{A}(\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}})$ übereinstimmen. Da $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$ als M-Raum reflexiv ist, also mit dem bidualen Raum übereinstimmt, ist die Topologie $\mathfrak{T}_0$ gleich der starken Topologie in $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$, und es ist bewiesen:

Satz 1 (Dualitätssatz)[14]. *Ist $\mathfrak{P} = \mathfrak{D}_1 \times \cdots \times \mathfrak{D}_n$ ein Zylinderbereich (offen), und $\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}\mathfrak{D}_1 \times \cdots \times \mathfrak{C}\mathfrak{D}_n$ so sind die Räume $\mathfrak{D}(\mathfrak{P})$ und $\mathfrak{A}(\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}})$ zueinander stark dual. Die duale Paarung wird geliefert durch*

$$(34) \qquad \begin{cases} \langle \tilde{x}, \tilde{u} \rangle = \dfrac{1}{(2\pi i)^n} \displaystyle\int_{C^*} \cdots \int \tilde{x}(\zeta)\, \tilde{u}(\zeta)\, d\zeta = x[\tilde{u}] = (-1)^n u[\tilde{x}], \\ \qquad\qquad (\tilde{u} \in \mathfrak{D}(\mathfrak{P}), \tilde{x} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{P}^{\mathfrak{C}})), \end{cases}$$

wobei C^* die Bestimmungsfläche eines Zylinderbereiches $\overline{\mathfrak{P}}^* < \mathfrak{P}$ ist, auf der $\tilde{x}(\zeta)$ noch regulär ist.

3. Lineare Funktionale als Randverteilungen.

Es seien $C_1, \ldots, C_n$ einfach geschlossene JORDAN-Kurven in der geschlossenen Zahlenebene und jedes endliche Teilstück eines C_j sei rektifizierbar. Nach Satz 1 ist jedes stetige lineare Funktional auf dem Raume $\mathfrak{A}(C) = \mathfrak{A}(C_1 \times \cdots \times C_n)$ durch eine in $C^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}C_1 \times \cdots \times \mathfrak{C}C_n$ lokalanalytische Funktion definiert. Die Kurve C_j zerlegt die Zahlenkugel Ω in zwei Gebiete $\mathfrak{C}_j^0, \mathfrak{C}_j^1$, und $C^{\mathfrak{C}}$ ist der Bereich, der aus den 2^n Zylindergebieten

$$(35) \qquad \mathfrak{G}_\sigma = \mathfrak{C}_1^{\sigma_1} \times \mathfrak{C}_2^{\sigma_2} \times \cdots \times \mathfrak{C}_n^{\sigma_n}, \qquad \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \qquad \sigma_j = \{^0_1$$

besteht. Es ist also

$$\mathfrak{D}(C^{\mathfrak{C}}) = \prod_\sigma \mathfrak{D}(\mathfrak{G}_\sigma); \qquad \tilde{u}(\zeta) = \{\tilde{u}_\sigma(\zeta_\sigma)\}.$$

[14]) Dieser Satz läßt sich auch aus einem allgemeineren Resultat von A. GROTHENDIECK [7] gewinnen, doch ist der obige direkte Beweis wesentlich einfacher.

Dabei ist in allen Räumen die Topologie $\mathfrak{T}_0$ zu nehmen. Jedes stetige lineare Funktional $u[x]$ auf $\mathfrak{A}(C)$ ist eindeutig zerlegbar in die Summe von 2^n Funktionalen $u_\sigma[x]$, deren Indikatrix $\tilde{u}_\sigma(\zeta)$ nur in $\mathfrak{G}_\sigma$ nicht identisch verschwindet. Nun erzeugt auch jedes $\tilde{y}(z) \in \mathfrak{A}(C)$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathfrak{A}(C)$:

$$y[x(z)] = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_C \cdots \int y(z) \cdot x(z)\, dz. \tag{36}$$

Ist C unendlich, so handelt es sich hierbei um ein uneigentliches Integral

$$y[x(z)] = \lim_{C_\nu^* \to C} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_\nu^*} \cdots \int y(z)\, x(z)\, dz, \tag{37}$$

wobei $\{C_\nu^*\}$ eine monoton wachsende Folge von endlichen Abschnitten von C ist, die C (bis auf seine unendlichen Punkte) ausschöpfen. Da sowohl $y(z)$ als auch $x(z)$ im Unendlichen analytisch sind und dort verschwinden, existiert dieser Limes stets und ist unabhängig von der Ausschöpfungsfolge $\{C_\nu^*\}$. Für $|z_j| \geq n_0$ ist $y(z) \cdot x(z)$ also analytisch und verschwindet von zweiter Ordnung:

$$|y(z) \cdot x(z)| \leq \frac{M(z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n)}{|z_j|^2} \quad \text{für} \quad |z_j| \geq n_0. \tag{38}$$

Sind nun ζ_j und ζ_j' zwei Punkte auf C_j mit $|\zeta_j| \geq n_0$, $|\zeta_j'| \geq n_0$, und ist $\hat{C}_j$ eine Kurve, die ζ_j und ζ_j' verbindet, so gilt:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\hat{C}_j} y(z)\, x(z)\, dz_j \right| = \left| \int_{\zeta_j}^{r \cdot \zeta_j} y(z)\, x(z)\, dz + \int_{r \cdot \zeta_j}^{\zeta_j'} y(z)\, x(z)\, dz \right| \\ &\leq \int_{\zeta_j}^{r \cdot \zeta_j} \frac{M}{|z_j|^2} |dz_j| + \int_{r \cdot \zeta_j}^{\zeta_j'} \frac{M}{|z_j|^2} |dz_j| \leq M(z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n) \left(\frac{1}{|\zeta_j|} + \frac{\pi + 1}{|\zeta_j'|} \right) \\ &\leq M(\ldots) \cdot \frac{\pi + 2}{n_0}. \end{aligned} \tag{39}$$

Das uneigentliche Integral

$$\int_{C_j} y(z) \cdot x(z)\, dz_j$$

existiert also und ist in den $z_i (i \neq j)$ eine analytische Funktion die in den unendlichen Punkten der C_i von zweiter Ordnung verschwindet, so daß die übrigen Integrationen auf die gleiche Weise durchgeführt werden können. Man kann das Integral $y[x(z)] = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_C \cdots \int y(z)\, x(z)\, dz$ offenbar auch so auswerten, daß man einen Abschnitt von C_j durch einen genügend großen Kreisbogen (Radius $> n_0$) zu einer endlichen geschlossenen Kurve schließt und über diese Kurve integriert. Auf diesem Wege sieht man am einfachsten die Stetigkeit des Funktionals $y[x(z)]$ ein. Man kann also $\mathfrak{A}(C)$ mit einem Teilraum seines dualen Raumes $\mathfrak{A}'(C)$ identifizieren.

Die Indikatrix

$$\tilde{y}_\sigma(\zeta) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_C \cdots \int y(z) \frac{1}{\zeta - z} dz, \qquad (\zeta \in \mathfrak{G}_\sigma),$$

von $y_\sigma[x]$ ist auch auf dem Rande von $\mathfrak{G}_\sigma$ noch regulär und verschwindet in den unendlichen Punkten, so daß $\tilde{y}_\sigma(\zeta)$ zu $\mathfrak{A}(C)$ gehört. Aus der CAUCHYschen Integralformel für $y(z)$ entnimmt man

$$y(z) = \sum_\sigma (-1)^{|\sigma|} \tilde{y}_\sigma(z), \qquad |\sigma| = \sum_1^n |\sigma_j|, \tag{40}$$

für z aus der Umgebung von C. Dabei ist die Bezeichnung so gewählt, daß $\mathfrak{C}_j^0$ rechts, $\mathfrak{C}_j^1$ links von C_j liegt, wenn C_j im Sinne der Integration (36) durchlaufen wird. Da $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{G}}_\sigma)$ zu $\mathfrak{D}(\mathfrak{G}_{\sigma'})$ mit $\sigma_j' \neq \sigma_j$ stark dual ist, ergibt sich, daß die durch (40) gegebene direkte Zerlegung von $\mathfrak{A}(C)$ auch topologisch ist:

Satz 2. *Es gilt die direkte topologische Zerlegung*

$$\mathfrak{A}(C) = \sum \oplus \mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{G}}_\sigma).$$

Die topologischen Isomorphien

$$\mathfrak{A}'(C) \cong \mathfrak{D}(C^{\mathfrak{C}}), \qquad \mathfrak{D}'(C^{\mathfrak{C}}) \cong \mathfrak{A}(C)$$

setzen sich zusammen aus den topologischen Isomorphien

$$\mathfrak{A}'(\overline{\mathfrak{G}}_\sigma) \cong \mathfrak{D}(\mathfrak{G}_{\sigma'}), \qquad \mathfrak{D}'(\mathfrak{G}_\sigma) \cong \mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{G}}_{\sigma'}).$$

Mit der Zerlegung $x(z) = \sum (-1)^{|\sigma|} \tilde{x}_\sigma(z)$ *lautet die duale Paarung von* $\mathfrak{D}(C^{\mathfrak{C}})$ *und* $\mathfrak{A}(C)$:

$$u[x] = \sum_\sigma u_\sigma[(-1)^{|\sigma'|} \tilde{x}_{\sigma'}(z)] = \frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n} \sum_\sigma \int_{C_{1,\sigma_1} \times \cdots \times C_{n,\sigma_n} \sim C} \cdots \int u_\sigma(\zeta)\, \tilde{x}_{\sigma'}(\zeta)\, d\zeta \text{ [15]}. \tag{41}$$

Für $C = C_1 \times \cdots \times C_n$ bezeichnen wir mit $\tau(C)$ die Anzahl der Kurven C_j, die durch den unendlichfernen Punkt gehen.

Satz 3. *Alle Räume* $\mathfrak{A}(C)$ *bzw. alle Räume* $\mathfrak{D}(C^{\mathfrak{C}})$ *die in dem Wert* $\tau(C)$ *übereinstimmen, sind zueinander topologisch isomorph.*

Beweis. Es genügt offenbar, die Isomorphie für die entsprechenden $\mathfrak{D}(\mathfrak{G}_\sigma)$ zu beweisen. $\mathfrak{G}_\sigma = \mathfrak{C}_1^{\sigma_1} \times \cdots \times \mathfrak{C}_n^{\sigma_n}$. $\tau_\sigma(C)$ sei die Anzahl der Gebiete $\mathfrak{C}_j^{\sigma_j}$, die den unendlichfernen Punkt enthalten. Jedes $\mathfrak{C}_j^{\sigma_j}$ läßt sich nun entweder auf das Innere des Einheitskreises analytisch abbilden, oder es läßt sich so auf das Äußere des Einheitskreises abbilden, daß der unendlichferne Punkt in sich übergeht und die Abbildung in allen anderen Punkten analytisch ist. Die entsprechenden Abbildungsfunktionen seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, und wir setzen $\mathfrak{K}_{\tau_\sigma} = \varphi_1(\mathfrak{C}_1^{\sigma_1}) \times \cdots \times \varphi_n(\mathfrak{C}_n^{\sigma_n})$. Da die abgeschlossenen Teilgebiete von $\mathfrak{K}_{\tau_\sigma}$ und $\mathfrak{G}_\sigma$ durch $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ einander eineindeutig zugeordnet werden, ist $\tilde{v}(\eta) \leftrightarrow \tilde{u}(\zeta) = \tilde{v}(\varphi(\zeta))$ eine topologische Isomorphie von $\mathfrak{D}(\mathfrak{K}_{\tau_\sigma})$ und $\mathfrak{D}(\mathfrak{G}_\sigma)$. Da die Menge der $\tau_\sigma(C)$ durch $\tau(C)$ eindeutig bestimmt ist, folgt die Isomorphie aller $\mathfrak{D}(C^{\mathfrak{C}})$,

[15]) $C_{1,\sigma_1} \times \cdots \times C_{n,\sigma_n} \sim C$ soll bedeuten, daß C_{j,σ_j} im gleichen Sinne wie C_j orientiert sein soll.

die in $\tau(C)$ übereinstimmen. Die Isomorphie der $\mathfrak{A}(C)$ ergibt sich dann durch Übergang zum dualen Raum.

Wir wollen die stetigen linearen Funktionale auf $\mathfrak{A}(C)$ nun als Größen, die auf C selbst definiert sind, auffassen.

Satz 4. *Jedes stetige lineare Funktional $u[x(z)]$ auf $\mathfrak{A}(C)$ ist starker Limes einer Folge von Funktionalen $u_r[x]$, deren Indikatrix $\tilde{u}_r(\zeta)$ auf C stetige Randfunktionen definiert. Das Funktional $u_r[x]$ ist durch die Randwerte von $\tilde{u}_r(\zeta)$ auf C eindeutig bestimmt. Man kann also die Funktionale $u[x]$ als eine Verallgemeinerung der Randwerte analytischer Funktionen auffassen.*

Beweis. Um den ersten Teil des Satzes zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß jede Funktion aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{G}_\sigma)$ im Sinne der Topologie $\mathfrak{T}_0$ approximiert werden kann durch Funktionen, die auf dem Rande von $\mathfrak{G}_\sigma$, insbesondere auf C, noch stetig sind.

Die Gebiete $\mathfrak{C}_j^{\sigma_j}$ können durch Funktionen $\varphi_j(\zeta)$ so auf das Innere bzw. Äußere des Einheitskreises analytisch abgebildet werden, daß die Abbildungen auf dem Rande in beiden Richtungen stetig sind. (Enthält $\mathfrak{C}_j^{\sigma_j}$ den unendlichfernen Punkt, so soll er bei φ_j fest bleiben, liegt er auf dem Rande, so soll er in den Punkt $+1$ übergehen. Ist C_j analytisch, so kann die Abbildung φ_j auch auf dem Rande als analytisch vorausgesetzt werden.)

Für $\tilde{u}(\zeta) \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G}_\sigma)$ ist $\tilde{v}(\eta) = \tilde{v}(\varphi_1(\zeta_1), \ldots, \varphi_n(\zeta_n)) = \tilde{u}(\zeta)$ regulär in

$$\mathfrak{R}_{\tau\sigma} = \varphi(\mathfrak{G}_\sigma) = \varphi_1(\mathfrak{C}_1^{\sigma_1}) \times \cdots \times \varphi_n(\mathfrak{C}_n^{\sigma_n}). \tag{42}$$

Die „konzentrische Näherung" $\tilde{v}_r$ von $\tilde{v}$ sei definiert als

$$\tilde{v}_r(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \tilde{v}(r^{\varrho_1} \cdot \eta_1, \ldots, r^{\varrho_n} \cdot \eta_n), \tag{43}$$

wobei $0 < r < 1$ und $\varrho_j = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$ ist, falls $\varphi_j(\mathfrak{C}_j^{\sigma_j})$ das $\begin{cases} \text{Innere} \\ \text{Äußere} \end{cases}$ des Einheitskreises ist. $\tilde{v}_r(\eta)$ ist auf dem Rande von $\mathfrak{R}_{\tau\sigma}$ noch analytisch. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit und dem Maximumprinzip folgt, daß $\tilde{v}_r(\eta)$ auf jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $\mathfrak{R}_{\tau\sigma}$ gleichmäßig gegen $\tilde{v}(\eta)$ konvergiert. Setzen wir nun die „konzentrische Näherung" von $\tilde{u}(\zeta)$ gleich

$$\begin{cases} \tilde{u}_r(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \tilde{v}_r(\varphi_1(\zeta_1), \ldots, \varphi_n(\zeta_n)) \\ \qquad\qquad = \tilde{u}(\varphi_1^{-1}(r^{\varrho_1} \cdot \varphi_1(\zeta_1)), \ldots, \varphi_n^{-1}(r^{\varrho_n} \cdot \varphi_n(\zeta_n))), \end{cases} \tag{44}$$

so ist $\tilde{u}_r(\zeta) \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G}_\sigma)$ auf dem Rande von $\mathfrak{G}_\sigma$ noch stetig (im Falle analytischer C_j ist $\tilde{u}_r(\zeta)$ auf $\overline{\mathfrak{G}}_\sigma$ sogar noch analytisch) und konvergiert für $r \to 1 - 0$ im Sinne der Topologie $\mathfrak{T}_0$ gegen $\tilde{u}(\zeta)$. Die Funktionale $u_r[x]$ sind dann gegeben durch

$$\begin{cases} u_r[x(z)] = \sum\limits_\sigma u_{r,\sigma}[x] \\ = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum\limits_\sigma (-1)^{|\sigma|} \int\limits_{C_\sigma} \cdots \int \tilde{u}_{r,\sigma}(z)\, x(z)\, dz = \frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n} \sum\limits_\sigma \int\limits_{C_\sigma} \cdots \int \tilde{u}_{r,\sigma} \cdot x_{\sigma'}\, dz. \end{cases} \tag{45}$$

C_σ ist Produkt von Kurven C_{j,σ_j}, die ein Teilgebiet von $\mathfrak{C}_j^{\sigma_j}$ beranden und im gleichen Sinne wie C_j orientiert sind. Ist C_j endlich, so kann C_{j,σ_j} ohne Änderung des Integrals durch C_j ersetzt werden, da $\tilde{u}_{r,\sigma}$ auf $\overline{\mathfrak{G}}_\sigma$ noch stetig ist. Wenn C endlich ist, haben wir also mit $\tilde{u}_r(z) = \sum_\sigma (-1)^{|\sigma|} \tilde{u}_{r,\sigma}(z)$:

$$(46)\quad u_r[x(z)] = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_C \cdots \int \tilde{u}_r(z) \cdot x(z)\, dz = \frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n} \sum_\sigma \int_C \cdots \int \tilde{u}_{r,\sigma}(z)\, x_{\sigma'}(z)\, dz.$$

Sind nun $C_1, \ldots, C_\tau$ unendlich, $C_{\tau+1}, \ldots, C_n$ endlich, so können wir C_{j,σ_j} $(j \leq \tau)$ deformieren zu einer Kurve $C_j^*(\varrho)$, die aus einem endlichen Teilstück $C_j^0(\varrho)$ von C_j mit Endpunkten auf dem Kreise um Null mit dem Radius ϱ und einem Bogen $C_j^1(\varrho)$ dieses Kreises besteht [ϱ ist so groß zu wählen, daß $x(z)$ für $|z_j| \geq \varrho$ analytisch ist]. Es ist nun

$$(47)\quad \int_{C_{1,\sigma_1}} \tilde{u}_{r,\sigma}(z) \cdot x(z)\, dz_1 = \int_{C_1^*(\varrho)} \tilde{u}_{r,\sigma} \cdot x\, dz_1 = \int_{C_1^1(\varrho)} \tilde{u}_{r,\sigma} \cdot x\, dz_1 + \int_{C_1^0(\varrho)} \tilde{u}_{r,\sigma} \cdot x\, dz_1.$$

Nun ist $\tilde{u}_{r,\sigma}(z)$ in $\overline{\mathfrak{G}}_\sigma$ stetig, so daß $\tilde{u}_{r,\sigma}(z_1, \ldots, z_n)$ für $z_1 \to \infty$ gegen $\tilde{u}_{r,\sigma}(\infty, z_2, \ldots, z_n)$ geht, und zwar gleichmäßig in $z_2, \ldots, z_n$. Es gilt also

$$(48)\quad |\tilde{u}_{r,\sigma}(z_1, z_2, \ldots, z_n) - \tilde{u}_{r,\sigma}(\infty, z_2, \ldots, z_n)| \leq \varepsilon$$

für alle $(z_1, \ldots, z_n) \in \overline{\mathfrak{G}}_\sigma$ mit $|z_1| \geq \varrho_0(\varepsilon)$. $x(z)$ besitzt im Unendlichen die Entwicklungen

$$(49)\quad x(z) = \frac{a_1(z_2, \ldots, z_n)}{z_1} + \frac{a_2(z_2, \ldots, z_n)}{z_1^2} + \cdots = \frac{a_1(z_2, \ldots, z_n)}{z_1} + \frac{x_1(z_1, \ldots, z_n)}{z_1^2}$$

$a_1(z_2, \ldots, z_n)$ ist analytisch in $C_2 \times \cdots \times C_n$ und $x_1(z_1, \ldots, z_n)$ in $\infty \times C_2 \times \cdots \times C_n$. ($a_1$ und x_1 verschwinden in den unendlichen Punkten von $C_2 \times \cdots \times C_n$.)

Aus (48) und (49) folgt also:

$$(50)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{C_1^1(\varrho)} \tilde{u}_{r,\sigma} \cdot x\, dz_1 = \tilde{u}_{r,\sigma}(\infty, z_2, \ldots, z_n) \cdot a_1(z_2, \ldots, z_n) \cdot \int_{C_1^1(\varrho)} \frac{dz_1}{z_1} \\ \qquad\qquad + P(z_2, \ldots, z_n; \varrho), \qquad \text{wobei} \\ P(z_2, \ldots, z_n, \varrho) = \displaystyle\int_{C_1^1(\varrho)} \{\tilde{u}_{r,\sigma}(z_1, \ldots, z_n) - \tilde{u}_{r,\sigma}(\infty, z_2, \ldots, z_n)\} \times \\ \qquad\qquad \times a_1(z_2, \ldots, z_n) \frac{dz_1}{z_1} + \displaystyle\int_{C_1^1(\varrho)} \tilde{u}_{r,\sigma}(z_1, \ldots, z_n) \cdot x_1(z_1, \ldots, z_n) \frac{dz_1}{z_1^2}. \end{cases}$$

Beide Glieder gehen aber für $\varrho \to \infty$ gleichmäßig gegen Null in einer abgeschlossenen Umgebung von $C_2 \times \cdots \times C_n$ in $\overline{\mathfrak{C}}_2^{\sigma_2} \times \cdots \times \overline{\mathfrak{C}}_n^{\sigma_n}$, da $a_1(z_2, \ldots, z_n)$, $x_1(z_1, \ldots, z_n)$ und $\tilde{u}_{r,\sigma}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ dort beschränkt sind.

Es gilt also:

$$(51)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{C_{1,\sigma_1}} \tilde{u}_{r,\sigma}(z) \cdot x(z)\, dz_1 \\ = \displaystyle\lim_{\varrho \to \infty} \left\{ \int_{C_1^0(\varrho)} \tilde{u}_{r,\sigma}(z) \cdot x(z)\, dz_1 + \tilde{u}_{r,\sigma}(\infty, z_2, \ldots, z_n)\, a_1(z_2, \ldots, z_n) \cdot \int_{C_1^1(\varrho)} \frac{dz_1}{z_1} \right\}. \end{cases}$$

Da die Konvergenz in $z_2, \ldots, z_n$ gleichmäßig ist, kann diese Limesbildung mit den Integrationen über $C_{2,\sigma_2}, \ldots, C_{n,\sigma_n}$ vertauscht werden.

$$(52)\quad \begin{cases} u_{\tau,\sigma}[x(z)] = \lim\limits_{\varrho\to\infty} \dfrac{(-1)^{|\sigma|}}{(2\pi i)^n} \displaystyle\int_{C_{2,\sigma_2}} \cdots \int_{C_{n,\sigma_n}} dz_2, \ldots, dz_n \times \\ \qquad \times \left\{ \displaystyle\int_{C_1^+(\varrho)} \tilde{u}_{\tau,\sigma} \cdot x(z)\, dz_1 + \tilde{u}_{\tau,\sigma}(\infty, z_2, \ldots, z_n) \cdot a_1(z_2, \ldots, z_n) \cdot \int_{C_1^+(\varrho)} \frac{dz_1}{z_1} \right\}. \end{cases}$$

Hierin kann man nun sukzessive auch die Integrale über C_{j,σ_j}, $(j \geq 2)$ so umformen, wie es oben für $j=1$ durchgeführt wurde. Man erhält so eine Darstellung von $u_{\tau,\sigma}[x]$, in die nur die Werte von $\tilde{u}_{\tau,\sigma}(z)$ auf C selbst eingehen.

Im Falle $n=\tau=2$ ergibt sich so z. B.

$$(53)\quad \begin{cases} \tilde{u}_{\tau,\sigma}[x(z)] = \lim\limits_{\varrho\to\infty} \dfrac{(-1)^{|\sigma|}}{(2\pi i)^2} \left\{ \displaystyle\int\int_{C_1^+(\varrho)\times C_1^+(\varrho)} \tilde{u}_{\tau,\sigma}(z_1, z_2)\, x(z_1, z_2)\, dz_1\, dz_2 + \right. \\ \qquad + \displaystyle\int_{C_1^+(\varrho)} \tilde{u}_{\tau,\sigma}(\infty, z_2)\, a_1(z_2)\, dz_2 \cdot \int_{C_1^+(\varrho)} \frac{dz_1}{z_1} + \int_{C_1^+(\varrho)} \tilde{u}(z_1, \infty)\, a_2(z_1)\, dz_1 \int_{C_1^+(\varrho)} \frac{dz_2}{z_2} + \\ \qquad \left. + \tilde{u}_{\tau,\sigma}(\infty, \infty) \cdot a_{1,2} \cdot \displaystyle\int_{C_1^+(\varrho)} \frac{dz_1}{z_1} \cdot \int_{C_1^+(\varrho)} \frac{dz_2}{z_2} \right\}, \end{cases}$$

wobei $a_1(z_2)$, $a_2(z_1)$, $a_{1,2}$ die Anfangskoeffizienten der Entwicklungen

$$\begin{aligned} x(z_1, z_2) &= \frac{a_1(z_2)}{z_1} + \cdots \\ &= \frac{a_2(z_1)}{z_2} + \cdots \\ &= \frac{a_{1,2}}{z_1 \cdot z_2} + \cdots \end{aligned}$$

von $x(z)$ nach negativen Potenzen von z_1, z_2 bzw. z_1 und z_2 für große z_i sind:

$$(54)\quad \begin{cases} a_1(\alpha_2) = \mathrm{Res}_\infty\,(x(z_1, \alpha_2)) \\ a_2(\alpha_1) = \mathrm{Res}_\infty\,(x(\alpha_1, z_2)) \\ a_{1,2} = \mathrm{Res}_\infty\,(a_1(z_2)) = \mathrm{Res}_\infty\,(a_2(z_1)). \end{cases}$$

Wir machen nun für alles folgende die Voraussetzung, daß die C_j analytisch (im weiteren Sinne) seien. C_j soll also durch lineare Transformation aus einer endlichen, analytischen Kurve hervorgehen. Die Funktionen $\tilde{u}_{\tau,\sigma}(\zeta)$ sind dann auf C noch analytisch, und falls C noch endlich ist, folgt unmittelbar:

$\mathfrak{A}(C)$ ist in $\mathfrak{A}'(C)$ dicht. Bei unbeschränktem C gehören die $\tilde{u}_{\tau,\sigma}(\zeta)$ aber im allgemeinen nicht zu $\mathfrak{A}(C)$, da sie ja im Unendlichen nicht verschwinden müssen. Es gilt aber dennoch:

Satz 5. *Ist C analytisch (im weiteren Sinne), so ist $\mathfrak{A}(C)$ in $\mathfrak{A}'(C)$ dicht.*

Beweis. Die Funktion $\tilde{u}_{x,\sigma}(\zeta)$ ist auf C regulär. Wir multiplizieren sie nun mit einem Faktor, um das Verschwinden im Unendlichen zu erreichen. Sei

$$(55)\quad \psi_{j,\varepsilon}(z_j)=\frac{1-z_j}{1+\varepsilon-z_j}=1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon-z_j}\quad\text{und}\quad \psi_{\sigma,\varepsilon}(z)=\prod\psi_{j,\varepsilon}(\varphi_j(z_j)),$$

so verschwindet $\psi_{\sigma,\varepsilon}(z)$ in allen unendlichen Punkten von C und konvergiert für $\varepsilon\to 0$ in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $\mathfrak{G}_\sigma$ gleichmäßig gegen die Konstante 1. Es folgt hieraus, daß

$$(56)\qquad \tilde{u}_{r,\sigma,\varepsilon}(z)=\psi_{\sigma,\varepsilon}(z)\cdot\tilde{u}_{r,\sigma}(z)\in\mathfrak{A}(C)\cap\mathfrak{D}(\mathfrak{G}_\sigma)$$

für $r\to 1-0$ und $\varepsilon\to 0$ im Sinne der Topologie $\mathfrak{T}_0$ gegen $\tilde{u}_\sigma(z)$ konvergiert. Damit ist Satz 5 bewiesen, und wir haben für jedes stetige lineare Funktional auf $\mathfrak{A}(C)$ die Darstellung

$$(57)\quad \begin{cases} u[x(z)]=\lim\limits_{r\to 1-0}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\cdots\int\limits_C\sum(-1)^{|\sigma|}\tilde{u}_{r,\sigma,\varepsilon}(z)\,x(z)\,dz \\ \qquad=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\cdots\int\limits_C\sum\limits_\sigma(-1)^{|\sigma|}\tilde{u}_{1-\varepsilon,\sigma,\varepsilon}(z)\,x(z)\,dz. \end{cases}$$

4. Distributionen als Randverteilungen analytischer Funktionen.

Da $C=C_1\times\cdots\times C_n$ analytisch ist, kann man von Differenzierbarkeit und Differentiation einer auf C erklärten Funktion reden. $\mathfrak{E}(C)$[16]) sei der Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf C (die in den unendlichen Punkten nicht definiert zu sein brauchen). In $\mathfrak{E}(C)$ wird eine Topologie $\mathfrak{T}_\mathfrak{E}$ definiert durch das System der Umgebungen

$$(58)\quad \mathfrak{V}(M,m,\varepsilon)=\left\{f(z):|D^p f(z)|=\left|\frac{\partial^p f(z)}{\partial z_1^{p_1}\dots\partial z_n^{p_n}}\right|\leq\varepsilon\quad\text{für}\quad |p|\leq m, z\in M\right\}.$$

M durchläuft dabei alle endlichen, kompakten Teilmengen von C, m alle natürlichen Zahlen und ε reelle Zahlen >0. Da jede auf C analytische Funktion beliebig oft differenzierbar ist, gilt $\mathfrak{A}(C)\subset\mathfrak{E}(C)$.

Satz 6. *Die Topologie $\mathfrak{T}_1$ von $\mathfrak{A}(C)$ ist feiner als die von $\mathfrak{T}_\mathfrak{E}$ induzierte Topologie auf $\mathfrak{A}(C)$.*

Beweis. $\overline{\mathfrak{M}}_k$ sei eine monotone Folge von abgeschlossenen Umgebungen von C mit $\bigcap\overline{\mathfrak{M}}_k=C$, $\overline{\mathfrak{M}}_k=\overline{\mathfrak{M}}_{k,1}\times\cdots\times\overline{\mathfrak{M}}_{k,n}$. Die Randdistanz der C_j in $\overline{\mathfrak{M}}_{k,j}$ sei $\geq\delta_k$. Die CAUCHYsche Koeffizientenabschätzung liefert dann für $|x(z)|\leq\varepsilon_k$ auf $\overline{\mathfrak{M}}_k$:

$$(59)\quad |D^p x(z)|\leq\varepsilon_k\cdot\delta_k^{-|p|}\cdot p!\leq\varepsilon_k\delta_k^{-m}\cdot m!\quad\text{für}\quad |p|\leq m\quad\text{und}\quad z\in C\text{ [17])}.$$

Mit $\varepsilon_k=\varepsilon\cdot\delta_k^m\cdot(m!)^{-1}$ gilt also für die Menge $\mathfrak{U}_{\varepsilon_k}^k$ aller $x(z)$ mit $\sup\limits_{z\in\overline{\mathfrak{M}}_k}|x(z)|\leq\varepsilon_k$:

$$(60)\qquad |D^p x(z)|\leq\varepsilon\quad\text{für}\quad |p|\leq m$$

[16]) Vgl. a. a. O. [4]) I, S. 88.

[17]) Dabei ist vorausgesetzt, daß $\delta_k\leq 1$ gewählt ist, was ja keine Einschränkung bedeutet.

und alle $z \in C$. Die gleiche Abschätzung gilt dann auch für die konvexe Hülle

$$\mathfrak{U}_{\{\varepsilon_k\}} = \overset{\infty}{\underset{k=1}{I}} \mathfrak{U}^k_{\varepsilon_k}. \tag{61}$$

Es gilt also

$$\mathfrak{U}_{\{\varepsilon_k\}} < \mathfrak{B}(M, m, \varepsilon) \tag{62}$$

sogar für beliebiges M. $\mathfrak{T}_1$ ist also feiner als $\mathfrak{T}_{\mathfrak{E}}$.

Die stetigen linearen Funktionale auf dem Raume $\mathfrak{E}(C)$ sind die *„Distributionen mit kompaktem Träger"* auf C. Auf Grund von Satz 6 definiert jede solche Distribution T eine Randverteilung, d.h. ein stetiges lineares Funktional $T_1[x]$ auf $\mathfrak{A}(C)$. Wir zeigen nun, daß T durch T_1 vollständig festgelegt ist, so daß T und T_1 miteinander identifiziert werden können.

Satz 7. *$\mathfrak{A}(C)$ ist in $\mathfrak{E}(C)$ dicht bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}_{\mathfrak{E}}$.*

Wir führen Satz 7 auf den Spezialfall, daß C direktes Produkt eines Torus $K^{n-\tau}$ und eines reellen Raumes R^τ ist, zurück durch

Satz 8: *Gehen genau τ der Kurven C_j durch den unendlichfernen Punkt, so ist $\mathfrak{E}(C)$ topologisch isomorph zu $\mathfrak{E}(R^\tau \times K^{n-\tau})$ ($K =$ Einheitskreis, $R =$ reelle Achse). Die Zuordnung kann so gewählt werden, daß dabei auch $\mathfrak{A}(C)$ auf $\mathfrak{A}(R^\tau \times K^{n-\tau})$ topologisch abgebildet wird.*

Beweis. Da C analytisch ist, gibt es eine analytische Abbildung φ von C auf $R^\tau \times K^{n-\tau}$, wobei die unendlichfernen Punkte der C_j fest bleiben. $\varphi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ist in einer Umgebung von C regulär (d.h. φ_i bildet eine ganze Umgebung von C_j analytisch auf eine Umgebung von R_j bzw. K_j ab, wobei der Punkt ∞_j, falls er zu C_j gehört, fest bleibt). Da auf jedem endlichen kompakten Teil von C_j (bzw. $\varphi_j(C_j)$) alle Ableitungen von φ_j (bzw. φ_j^{-1}) beschränkt sind, ist die Zuordnung $x(z) \leftrightarrow \hat{x}(\eta) = x(\varphi^{-1}(\eta))$ ein topologischer Isomorphismus von $\mathfrak{E}(C)$ und $\mathfrak{E}(R^\tau \times K^{n-\tau})$. Dabei geht aber auch $\mathfrak{A}(C)$ in $\mathfrak{A}(R^\tau \times K^{n-\tau})$ über, und diese Abbildung ist topologisch bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}_1$. Satz 8 ist also bewiesen.

Damit brauchen wir den Beweis von Satz 7 nur für den Fall $C = R^\tau \times K^{n-\tau} = R_1 \times \cdots \times R_\tau \times K_{\tau+1} \times \cdots \times K_n$ zu führen.

Beweis zu Satz 7. Sei eine Funktion $x(z) \in \mathfrak{E}(C)$ und eine Umgebung $\mathfrak{B}(M, m, \varepsilon)$ gegeben. Die kompakte Menge M ist enthalten in einer Menge $W = I_k \times K^{n-\tau}$, wenn I_k das Intervall $-k \leq z_j \leq +k$ im Raum R^τ ist. Man kann voraussetzen, daß M ganz im Innern dieser Menge W liegt. Als beliebig oft differenzierbare Funktion in W ist $x(z) = x(z_1, \ldots, z_\tau, e^{i\alpha_{\tau+1}}, \ldots, e^{i\alpha_n})$ in eine FOURIER-Reihe entwickelbar:

$$\left\{\begin{aligned} x(z) &= \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n = -\infty}^{+\infty} a_{\nu_1, \ldots, \nu_n} \exp\left(\frac{\pi i}{k}(\nu_1 z_1 + \cdots + \nu_\tau z_\tau) + i(\nu_{\tau+1}\alpha_{\tau+1} + \cdots + \nu_n \alpha_n)\right) \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{\nu_1, \ldots, \nu_n} \exp\left(\frac{\pi i}{k}(\nu_1 z_1 + \cdots + \nu_\tau z_\tau)\right) \cdot z_{\tau+1}^{\nu_{\tau+1}} \ldots z_n^{\nu_n}. \end{aligned}\right. \tag{63}$$

Diese Reihe ist im Innern von W, also insbesondere in M, absolut und gleichmäßig konvergent mitsamt allen Ableitungen, die gliedweise gebildet werden können. Es gibt also eine Zahl N, so daß

$$x_N(z) = \sum_{-N}^{+N} a_{\nu_1,\dots,\nu_n} \exp\left(\frac{\pi i}{k}(\nu_1 z_1 + \cdots + \nu_\tau z_\tau)\right) z_{\tau+1}^{\nu_{\tau+1}} \dots z_n^{\nu_n} \tag{64}$$

in $\mathfrak{B}\left(M, m, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ liegt. $x_N(z)$ ist eine analytische Funktion, die wir nun noch approximieren, durch Funktionen, die in den unendlichfernen Punkten verschwinden. In einer Umgebung von W gilt die Integralformel

$$x_N(z) = \frac{1}{(2\pi i)^\tau} \int \cdots \int \frac{x_N(\zeta_1, \dots, \zeta_\tau, z_{\tau+1}, \dots, z_n)}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_\tau - z_\tau)} d\zeta_1 \dots d\zeta_\tau \tag{65}$$

und dieses Integral ist auf W gleichmäßig konvergent. Es gibt also eine Unterteilung des Integrationsweges, so daß gilt:

$$\left| D^p \left\{ x_N(z) - \frac{1}{(2\pi i)^\tau} \sum x_N(\zeta_{1,\mu_1}, \dots, \zeta_{\tau,\mu_\tau}, z_{\tau+1}, \dots, z_n) \times \right.\right. \\ \left.\left. \times \frac{\Delta\zeta_{1,\mu_1} \cdots \Delta\zeta_{\tau,\mu_\tau}}{(\zeta_{1,\mu_1} - z_1) \dots (\zeta_{\tau,\mu_\tau} - z_\tau)} \right\} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{66}$$

für alle p mit $|p| \leq m$ und alle $z \in M$.

Wir können dabei die Teilung auch so wählen, daß keiner der Teilpunkte eine rein reelle Koordinate ζ_{j,μ_j}, $(j \leq \tau)$ hat. Dann ist

$$x^*(z) = \frac{1}{(2\pi i)^\tau} \sum x_N(\zeta_{1,\mu_1}, \dots, \zeta_{\tau,\mu_\tau}, z_{\tau+1}, \dots, z_n) \cdot \frac{\Delta\zeta_{1,\mu_1} \cdots \Delta\zeta_{\tau,\mu_\tau}}{(\zeta_{1,\mu_1} - z_1) \dots (\zeta_{\tau,\mu_\tau} - z_\tau)} \tag{67}$$

in $R^\tau \times K^{n-\tau}$ analytisch und verschwindet in allen unendlichen Punkten von $R^\tau \times K^{n-\tau}$. Da $x(z) - x^*(z)$ zu $\mathfrak{B}(M, m, \varepsilon)$ gehört, ist somit gezeigt, daß $\mathfrak{A}(R^\tau \times K^{n-\tau})$ in $\mathfrak{E}(R^\tau \times K^{n-\tau})$ dicht liegt. Für den allgemeinen Fall $C = C_1 \times \cdots \times C_n$ folgt dann diese Aussage aus Satz 8. Aus Satz 7 folgt nun unmittelbar:

Korollar. *Jede Distribution auf C mit kompaktem Träger ist Randverteilung auf C d.h. stetiges lineares Funktional auf $\mathfrak{A}(C)$.*

Denn aus Satz 7 folgt, daß jede solche Distribution auf C durch ihre Werte auf $\mathfrak{A}(C)$ vollständig bestimmt ist, also mit einem Element aus $\mathfrak{A}'(C)$ identifiziert werden kann.

Die nächste Aufgabe ist es nun, diejenigen Funktionen zu charakterisieren, die Distributionen als Randverteilungen haben. Es zeigt sich, daß dies gerade die „langsam gegen den Rand wachsenden" Funktionen sind, die im Unendlichen analytisch sind und dort verschwinden.

Definition. *$f(z_1, \dots, z_n)$ sei definiert in der Zylindermenge $\mathfrak{P} = \mathfrak{D}_1 \times \cdots \times \mathfrak{D}_n$. $\delta_j(z_j)$ sei die Randdistanz von z_j in $\mathfrak{D}_j$. $f(z)$ heißt „langsam gegen den Rand von $\mathfrak{P}$ wachsend", wenn es eine Abschätzung*

$$|f(z)| \leq \frac{M_0}{\delta_1^{\nu_1}(z_1) \dots \delta_n^{\nu_n}(z_n)} \quad \text{mit} \quad \nu_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } \delta_j(z_j) > 1 \\ k_j & \text{falls } \delta_j(z_j) \leq 1 \end{cases} \quad \text{gibt.}$$

Satz 9. *Die Distributionen mit kompaktem Träger auf C sind Randverteilungen analytischer Funktionen, die regulär sind in einer Zylindermenge $\mathfrak{P} = \mathfrak{C}C_1^* \times \cdots \times \mathfrak{C}C_n^*$ und langsam gegen den Rand von $\mathfrak{P}$ (d.h. gegen $C_1^* \times \cdots \times C_n^*$) wachsen. Dabei ist C_j^* ein endliches, kompaktes Teilstück von C_j.*

Beweis. Ist T stetig auf $\mathfrak{E}(C)$, so gibt es eine Umgebung $\mathfrak{B}(M, m, \varepsilon)$ auf der T beschränkt ist, d.h. es gilt $|T[x]| \leq M_0' \cdot \sup_{\substack{|p| \leq m \\ z \in M}} |D^p x(z)|$. Für die Indikatrix $t(\zeta) = T\left[\frac{1}{\zeta - z}\right]$ gilt also

$$(68)\quad |t(\zeta)| = \left|T\left[\frac{1}{\zeta - z}\right]\right| \leq M_0' \cdot \sup \left|D^p \frac{1}{\zeta - z}\right| = M_0' \cdot \sup \left|\frac{p_1! \dots p_n!}{(\zeta_1 - z_1)^{p_1+1} \dots (\zeta_n - z_n)^{p_n+1}}\right|.$$

$C_1^*, \dots, C_n^*$ können nun so gewählt werden, daß $M < C_1^* \times \cdots \times C_n^*$. Dann ist also

$$(69)\quad \begin{cases} |t(\zeta)| \leq \sup \left\{ \dfrac{M_0' \cdot m!}{(\zeta_1 - z_1)^{p_1+1} \dots (\zeta_n - z_n)^{p_n+1}} \right\} \leq \dfrac{M_0}{\delta_1^{\nu_1}(\zeta_1) \dots \delta_n^{\nu_n}(\zeta_n)} \\ \text{mit } \nu_j = \begin{cases} m+1 & \text{für } \delta_j(\zeta_j) \leq 1 \\ 1 & \text{für } \delta_j(\zeta_j) > 1 \end{cases}. \end{cases}$$

$t(\zeta)$ wächst also langsam gegen $C_1^* \times \cdots \times C_n^*$. Es bleibt nun zu zeigen, daß $t(\zeta)$ in $\mathfrak{P} = \mathfrak{C}C_1^* \times \cdots \times \mathfrak{C}C_n^*$ analytisch ist. Es seien nun $\{\zeta^{(\nu)}\}$ und $\{\tilde{\zeta}^{(\mu)}\}$ zwei Folgen von Punkten aus $\mathfrak{G}_\sigma$ und $\mathfrak{G}_{\tilde{\sigma}}$, die gegen einen Punkt $\zeta_0 \in \mathfrak{P}$ konvergieren. $g^{(\nu,\mu)}(z) = \dfrac{1}{\zeta^{(\nu)} - z} - \dfrac{1}{\tilde{\zeta}^{(\mu)} - z}$ konvergiert auf $C_1^* \times \cdots \times C_n^*$ gleichmäßig gegen Null, ebenso wie auch alle Ableitungen von $g^{(\nu,\mu)}(z)$. Infolgedessen muß auch $t_\sigma(\zeta^{(\nu)}) - t_{\tilde{\sigma}}(\tilde{\zeta}^{(\mu)}) = T[g^{(\nu,\mu)}(z)]$ gegen Null konvergieren. $t_\sigma(\zeta)$ und $t_{\tilde{\sigma}}(\zeta)$ sind also im Punkte ζ_0 noch stetig und haben den gleichen Grenzwert $t_\sigma(\zeta_0) = t_{\tilde{\sigma}}(\zeta_0) = t(\zeta_0)$. Aus dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip folgt dann die Analytizität von $t(\zeta)$ in ζ_0.

$t(\zeta)$ ist also tatsächlich in dem Zylinderbereich $\mathfrak{P} = \mathfrak{C}C_1^* \times \cdots \times \mathfrak{C}C_n^*$ lokalanalytisch, und Satz 9 ist bewiesen.

Es bleibt nun die Umkehrung zu zeigen:

Satz 10. *Jede Funktion $\tilde{u}(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, die in einem Zylinderbereich $\mathfrak{P} = \mathfrak{C}C_1^* \times \cdots \times \mathfrak{C}C_n^*$ lokalanalytisch und von langsamem Wachstum ist, hat als Randverteilung auf C eine Distribution mit kompaktem Träger. (Der Träger ist dann enthalten in $C_1^* \times \cdots \times C_n^*$.)*

Beweis. Wir können annehmen, daß $C_1, \dots, C_\tau$ unendlich, $C_{\tau+1}, \dots, C_n$ endlich seien $(0 \leq \tau \leq n)$. Das durch die in $\mathfrak{P}$ lokalanalytische Funktion $\tilde{u}(\zeta)$ definierte Funktional ist gegeben durch (34). Da $\tilde{u}(\zeta)$ im Unendlichen verschwindet, $\tilde{u}(\zeta) \cdot x(\zeta)$ dort also das Residuum Null hat, kann man die Kurvenpaare, die eine Umgebung von C_j, $(j \leq \tau)$, beranden, bei der Integration ersetzen durch eine beliebige endliche Kurve $\hat{C}$, die C_j^* in positivem

Sinne umläuft. Wir erhalten also

$$(70) \qquad u[x(z)] = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{\sigma_{\tau+1},\dots,\sigma_n} \int\cdots\int_{\hat{C}_1\times\cdots\times\hat{C}_n} \tilde{u}_\sigma(\zeta)\, x(\zeta)\, d\zeta\,,$$

wo alle $\hat{C}_j$ endlich sind und für $j>\tau$ aus zwei Kurven, sonst aus einer bestehen.

Wir zeigen nun, daß man von $\tilde{u}_\sigma$ durch Bildung gewisser unbestimmter Integrale zu Funktionen gelangt, die auf C selbst stetige Randwerte haben. Man gewinnt dadurch eine neue Darstellung des Funktionals $u[x]$, aus der sich unmittelbar entnehmen läßt, daß $u[x]$ bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}_{\mathfrak{E}}$ stetig ist. Zugleich kann $u[x]$ auf Grund dieser Darstellung für alle Funktionen aus $\mathfrak{E}(C)$ definiert werden, da darin nur noch Integrale über Teile von C selbst auftreten.

Für $j>\tau$ sei ζ_j^0 ein Punkt, der im Innern von C_j liegt. Die Operation $\mathfrak{J}_j$ sei nun definiert durch

$$(71) \qquad \begin{cases} \mathfrak{J}_j\tilde{u}_\sigma(\zeta) = \int\limits_{\zeta_j^0}^{\zeta} \tilde{u}_\sigma(\zeta)\, d\zeta_j & \text{falls } \mathfrak{C}_j^{\sigma_j} \text{ das Innere und} \\ \mathfrak{J}_j\tilde{u}_\sigma(\zeta) = \int\limits_{\infty}^{\zeta} \tilde{u}_\sigma(\zeta)\cdot(\zeta_j-\zeta_j^0)^{-1}\, d\zeta_j & \text{falls } \mathfrak{C}_j^{\sigma_j} \text{ das Äußere von } C_j \end{cases}$$

ist. Es sei nun

$$(72) \qquad \tilde{u}_\sigma^{[0,\dots,-\mu_{\tau+1},\dots,-\mu_n]}(\zeta) = \mathfrak{J}_{\tau+1}^{\mu_{\tau+1}}\cdots\mathfrak{J}_n^{\mu_n}\tilde{u}_\sigma(\zeta)\,; \qquad \mathfrak{J}_j^{k+1}\tilde{u}_\sigma = \mathfrak{J}_j(\mathfrak{J}_j^k\tilde{u}_\sigma)\,.$$

Aus der Abschätzung

$$|\tilde{u}(\zeta)| \le \frac{M_0}{\prod\limits_{j=1}^{n}\delta_j^{\nu_j}(\zeta_j)} \quad \text{mit} \quad \nu_j = \begin{cases} 1 & \text{für } \delta_j(\zeta_j)>1 \\ k_j & \text{für } \delta_j(\zeta_j)\le 1 \end{cases}$$

folgt nun wenn $k_n>1$ ist:

$$(73) \qquad \begin{cases} |\mathfrak{J}_n(\tilde{u}(\zeta))| \le \dfrac{M_1}{\prod\limits_{j\neq n}\delta_j^{\nu_j}(\zeta_j)\cdot\delta_n^{k_n-1}(\zeta_n)} & \text{für } \delta_n(\zeta_n)\le 1 \\ |\mathfrak{J}_n^{k_n-1}\tilde{u}(\zeta)| \le \dfrac{M_{k_n-1}}{\prod\limits_{j\neq n}\delta_j^{\nu_j}(\zeta_j)\cdot\delta_n(\zeta_n)}\,, \\ |\mathfrak{J}_n^{k_n}\tilde{u}(\zeta)| \le \dfrac{M_{k_n}}{\prod\limits_{j\neq n}\delta_j^{\nu_j}(\zeta_j)}\,(1+\log\delta_n(\zeta_n))\,. \end{cases}$$

Das Integral $\int\limits_\alpha^\beta |\log\delta|\,|d\delta|$ geht aber mit $\alpha,\beta\to 0$ ebenfalls gegen Null, so daß $\mathfrak{J}_n^{k_n+1}\tilde{u}_\sigma(\zeta)$ eine stetige Grenzfunktion auf $\mathfrak{C}_1^{\sigma_1}\times\cdots\times\mathfrak{C}_{n-1}^{\sigma_{n-1}}\times C_n$ besitzt. Durch Fortsetzung des Prozesses erhält man das Resultat, daß $\mathfrak{J}_{\tau+1}^{k_{\tau+1}+1}\cdots\mathfrak{J}_n^{k_n+1}\tilde{u}_\sigma(\zeta)$ auf $\mathfrak{C}_1^{\sigma_1}\times\cdots\times\mathfrak{C}_\tau^{\sigma_\tau}\times C_{\tau+1}\times\cdots\times C_n$ eine stetige Grenzfunktion besitzt, die durch

$\frac{M_{k_\tau+1,\ldots,k_n+1}}{\prod\limits_{j\leq\tau}\delta_j^{\nu_j}(\zeta_j)}$ abgeschätzt wird. Definiert man nun $\mathfrak{J}_j^{-1}$ durch

$$(74)\quad \begin{cases} \mathfrak{J}_j^{-1}\,x(\zeta) = x^{[0,\ldots,1_j,\ldots 0]\sigma}(\zeta) = \dfrac{\partial\, x(\zeta)}{\partial\zeta_j} \quad \text{bzw.} \\ \mathfrak{J}_j^{-1}\,x(\zeta) = x^{[0,\ldots,1_j,\ldots 0]\sigma}(\zeta) = \dfrac{\partial}{\partial\zeta_j}\{(\zeta_j-\zeta_j^0)\,x(\zeta)\}\,, \end{cases}$$

so gilt offenbar

$$(75)\quad \begin{cases} \int\limits_{\hat C}\tilde u_\sigma(\zeta)\,x(\zeta)\,d\zeta = (-1)^{(k_\tau+1)+\cdots+(k_n+1)}\int\limits_{\hat C}\tilde u_\sigma^{[0,\ldots,-k_\tau+1-1,\ldots,-k_n-1]}(\zeta)\times \\ \qquad\qquad \times x^{[0,\ldots,k_\tau+1+1,\ldots,k_n+1]\sigma}(\zeta)\,d\zeta \end{cases}$$

und die Wege $\hat C_j$ kann man dabei auf C_j selbst verlegen für $j>\tau$. Für $j\leq\tau$ lassen sich die benötigten Integrale mit stetiger Grenzfunktion auf C_j (bzw. einem Teil von C_j) nicht mehr eindeutig definieren, da es keine Punkte im „Innern" von C_j gibt. Wir bezeichnen hier mit ζ_j^0 einen Punkt auf C_j, der aber nicht in C_j^* liegt. Wir können also annehmen, daß die Kurve $\hat C_j$, der Integrationsweg in (70), durch ζ_j^0 hindurchgeht. Wir definieren dann

$$(76)\qquad \mathfrak{J}_j\tilde u_\sigma^{[-\mu]}(\zeta) = \tilde u_\sigma^{[-\mu_1,\ldots,-\mu_j-1,\ldots,-\mu_n]}(\zeta) = \int\limits_{\zeta_j^0}^{\zeta_j}\tilde u^{[-\mu]}(\zeta)\,d\zeta_j.$$

(Der Weg von ζ_j^0 nach ζ_j ist dabei so zu wählen, daß er aus einem positiv durchlaufenen Stück von $\hat C_j$ und einer Kurve, die C_j nicht schneidet, besteht.) Wir erhalten dann aus den bisherigen Abschätzungen weiter:

$$(77)\qquad |\tilde u_\sigma^{[0,\ldots,-1_\tau,-k_{\tau+1}-1,\ldots,-k_n-1]}(\zeta)| \leq \frac{M_{1,k_\tau+1+1,\ldots,k_n+1}}{\prod\limits_{j<\tau}\delta_j^{\nu_j}(\zeta_j)\cdot\delta_\tau^{k_\tau-1}(\zeta_\tau)} \quad \text{für} \quad \delta_\tau(\zeta_\tau)\leq 1\,,$$

und schließlich ergibt sich, daß $\tilde u_\sigma^{[-k_1-1,\ldots,-k_n-1]}(\zeta)$ auf dem endlichen Teil von C (insbesondere also auf allen C_j soweit sie innerhalb der Integrationswege $\hat C_j$ liegen) eine stetige Grenzfunktion besitzt. Dabei ist die Approximation der Grenzfunktion gleichmäßig bei gleichmäßiger Annäherung an den Rand.

Durch wiederholte partielle Integration erhält man so

$$(78)\quad \begin{cases} (2\pi i)^n\,u[x] = \sum\limits_{\sigma_{\tau+1},\ldots,\sigma_n}\int\cdots\int\limits_{\hat C_1\times\cdots\times\hat C_n}\tilde u_\sigma(\zeta)\cdot x(\zeta)\,d\zeta \\ = (-1)^{(k_\tau+1)+\cdots+(k_n+1)}\times \\ \times\sum\limits_{\sigma_{\tau+1},\ldots,\sigma_n}(-1)^{\sigma_{\tau+1}+\cdots+\sigma_n}\int\cdots\int\limits_{\hat C_1\times\cdots\times\hat C_\tau\times C_{\tau+1}\times\cdots\times C_n}\tilde u_\sigma^{[0,\ldots,-(k_\tau+1+1),\ldots,-(k_n+1)]}(\zeta)\times \\ \times x^{[0,\ldots,k_\tau+1+1,\ldots,k_n+1]\sigma}(\zeta)\,d\zeta \\ = (-1)^{(k_\tau+1+1)+\cdots+(k_n+1)}\sum\limits_{\substack{p_1,\ldots,p_\tau \\ 0\leq p_j\leq k_j+1}}(-1)^{p_1+\cdots+p_\tau}\times \\ \times\sum_\sigma(-1)^{|\sigma|}\int_{C^*}\cdots\int\tilde u_\sigma^{[-p_1-d_{p_1},\ldots,-p_\tau-d_{p_\tau},-(k_\tau+1+1),\ldots,-(k_n+1)]}(\zeta)\times \\ \times x^{[p_1,\ldots,p_\tau,k_\tau+1+1,\ldots,k_n+1]\sigma}(\zeta)\cdot d\zeta^{(p)}. \end{cases}$$

Dabei soll $d_{p_j} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ sein falls $p_j \begin{cases} = k_j + 1 \\ < k_j + 1 \end{cases}$ ist. $d\zeta^{(p)}$ soll andeuten, daß nicht über alle Veränderlichen mehr integriert werden soll, sondern nur über alle diejenigen ζ_j, für die $d_{p_j} = 0$, also $p_j = k_j + 1$ ist. Für die übrigen Variablen ist $\zeta_j = \zeta_j^0$ zu setzen. Da die Integranden auf $C^0 = C_1^0 \times \cdots \times C_r^0 \times C_{r+1} \times \cdots \times C_n$, dem Teil von C, der innerhalb des durch $\hat{C}$ bestimmten, endlichen Zylindergebietes liegt, noch stetig sind, kann die Integration auf C^0 selbst durchgeführt werden. Es gehen also nur die Werte von $x(z)$ auf C^0 in die Berechnung von $u[x]$ ein.

Durch (78) kann also das Funktional $u[x]$ definiert werden für beliebige $x(z) \in \mathfrak{E}(C)$, ohne daß noch eine Approximation von $x(z)$ durch analytische Funktionen erforderlich ist. Zugleich sieht man dieser Darstellung unmittelbar an, daß sie ein bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}_{\mathfrak{E}}$ auf $\mathfrak{E}(C)$ stetiges Funktional definiert, denn $u[x]$ ist offenbar auf der Umgebung $\mathfrak{B}(M, m, \varepsilon)$ beschränkt, sobald $C^0 < M$ und $m \geq \sum_1^n (k_j + 1)$ ist. Damit ist unser Satz bewiesen und darüber hinaus eine Formel zur Berechnung von $u[x]$ für beliebige Funktionen $x(z) \in \mathfrak{E}(C)$ gefunden.

Die in (78) auftretenden Integrale $\tilde{u}_\sigma^{[-\mu]}(\zeta)$ hängen noch von dem Anfangspunkt ζ_0 der Integration ab. Da ζ_j^0 in beliebiger Nachbarschaft von C_j^* gewählt werden kann, verschwindet $u[x]$ für alle Funktionen $x(z)$, die in einer Umgebung von C^* identisch verschwinden. Sei nun $\varphi_\varepsilon(z)$ eine Funktion aus $\mathfrak{E}(C)$, die in allen Punkten von C, die von C^* eine Entfernung $\leq \varepsilon$ haben, gleich 1 ist und in allen Punkten deren Entfernung von C^* größer als 2ε ist, verschwindet[18]). Dann muß nach (78) gelten:

$$(79) \quad \begin{cases} u[x(z)] = u[\varphi_\varepsilon(z) \cdot x(z)] \\ \quad = \dfrac{(-1)^{\sum_1^n (k_j+1)}}{(2\pi i)^n} \displaystyle\sum_\sigma (-1)^{|\sigma|} \int_{C^*} \cdots \int \tilde{u}_\sigma^{[-k_1-1, \ldots, k_n-1]}(\zeta) \times \\ \quad \times \{\varphi_\varepsilon(z) \cdot x(z)\}^{[k_1+1, \ldots, k_n+1]\sigma} \, d\zeta_1 \ldots d\zeta_n. \end{cases}$$

Nachdem der Raum $\mathfrak{E}'(C)$ der Distributionen mit kompaktem Träger durch analytische Funktionen dargestellt ist, wäre es wünschenswert, daß man auch die starke Topologie in diesem Distributionenraum funktionentheoretisch definieren könnte, ohne dabei auf den dualen Raum bezugnehmen zu müssen.

Wir werden nun zunächst eine Topologie $\mathfrak{T}_2$ im Raume $E'(C)$ der langsam wachsenden Funktionen und damit auch in $\mathfrak{E}'(C)$ definieren, von der wir zeigen wollen, daß sie mit der starken Topologie $\mathfrak{T}_b$ übereinstimmt. Der erste Teil dieser Aussage, daß nämlich $\mathfrak{T}_2$ feiner ist als $\mathfrak{T}_b$ ergibt sich recht einfach. Da $\mathfrak{E}(C)$ ein M-Raum ist, gilt nach dem Satz von MACKEY-ARENS[19]), daß $\mathfrak{T}_b$ die feinste lokalkonvexe Topologie auf $\mathfrak{E}'(C)$ ist, die wieder $\mathfrak{E}(C)$ als dualen

[18]) Eine solche Funktion existiert immer, vgl. [8], Teil I, S. 23.

[19]) a. a. O. [13]).

Raum liefert. Es bleibt also dann noch zu zeigen, daß jedes $\mathfrak{T}_2$-stetige lineare Funktional durch eine beliebig oft differenzierbare Funktion definiert wird.

Die Topologie $\mathfrak{T}_2$:

Ist $C^* = C_1^* \times \cdots \times C_n^*$ eine endliche, kompakte Teilmenge von C und $m = (m_1, \ldots, m_n)$ ein n-Tupel natürlicher Zahlen, so sei $E'_{C^*,m}$ der Raum aller langsam wachsenden Funktionen, die in $C^* \mathfrak{C} = \mathfrak{C} C_1^* \times \cdots \times \mathfrak{C} C_n^*$ lokal-analytisch sind und für die das Integral $\tilde{u}_\sigma^{[-m]}(\zeta)$ stetige Randwerte auf C^* besitzt. Für den Fall eines unendlichen C_j soll C_j^0 die kleinste zusammenhängende Menge auf C_j sein, die C_j^* und den Anfangspunkt ζ_j^0 der Integration enthält. Wir machen $E'_{C^*,m}$ nun zu einem BANACHschen Raum mit der Norm[20])

$$(80)\quad \|\tilde{u}\|_{C^*,\zeta^0,m} = \sup_{\zeta \in C^*} |u_\sigma^{[-m]}(\zeta)|; \qquad \mathfrak{V}'(C^*, \zeta^0, m, \varepsilon) = \{\tilde{u} : \|\tilde{u}\|_{C^*,\zeta^0,m} \leq \varepsilon\}.$$

Da $E'(C) = \bigcup_{C^*,m} E'_{C^*,m}$[21]) ist, definieren wir die Topologie $\mathfrak{T}_2$ in $E'(C)$ durch die Umgebungen

$$(81)\quad \mathfrak{V}'_{\{C^*,\zeta^0,m,\varepsilon_{C^*,\zeta^0,m}\}} = \Gamma_{C^*,m,\zeta^0(C^*)} \mathfrak{V}'(C^*, \zeta^0, m, \varepsilon_{C^*,\zeta^0,m}).$$

Durch die Isomorphie $\tilde{u}(\zeta) \leftrightarrow u[x]$ wird die Topologie $\mathfrak{T}_2$ auch auf $\mathfrak{E}'(C)$ übertragen.

Satz 11. *Die Topologie $\mathfrak{T}_2$ ist feiner als die starke Topologie $\mathfrak{T}_b$ in $\mathfrak{E}'(C)$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{M}$ eine beschränkte Menge aus $\mathfrak{E}(C)$. Es gibt dann zu jedem C^0 und jedem m eine Zahl $M'_{C^0,m}$, so daß $|D^p x(z)| \leq M'_{C^0,p}$ für alle $z \in C^0$. Da alle Ableitungen von $\varphi_\varepsilon = \varphi_{\varepsilon,C^0}$ auf C^0 beschränkt sind und $\zeta_j - \zeta_j^0$ dort ebenfalls endlich bleibt, gibt es eine andere Konstante $M_{C^0,m}$, so daß

$$(82)\quad |\{\varphi_{\varepsilon,C^0}(z) \cdot x(z)\}^{[m]}| \leq M_{C^0,m} \quad \text{für alle} \quad z \in C^0.$$

Die Umgebung $\mathfrak{V}'(C^*, \zeta^0, m, \varepsilon_{C^0,\zeta^0,m})$ ist dann nach (79) in der zu $\mathfrak{M}$ polaren Menge $\mathfrak{M}^0$ enthalten, wenn man $\varepsilon_{C^0,\zeta^0,m} \leq \frac{(2\pi)^n}{M_{C^0,m} \int_{C^0} |d\zeta|}$ macht. Da $\mathfrak{M}^0$ konvex ist, liegt also auch $\mathfrak{V}'_{\{C^*,\zeta^0,m,\varepsilon_{C^0,\zeta^0,m}\}}$ in $\mathfrak{M}^0$. Das heißt aber, daß $\mathfrak{T}_2$ feiner ist als $\mathfrak{T}_b$.

$\mathfrak{E}'(C)$ enthält insbesondere den Raum $\mathfrak{C}(C)$ der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger. In diesem Raum wird nach L. SCHWARTZ[22]) der folgende Konvergenzbegriff eingeführt: $\varphi_j(z)$ heiße konvergent gegen φ wenn alle φ_j außerhalb einer festen, endlichen, kompakten Menge verschwinden und wenn sie auf dieser Menge gleichmäßig konvergieren.

Satz 12. *Jedes $\mathfrak{T}_2$-stetige lineare Funktional $u[x]$ ist auf $\mathfrak{C}(C)$ stetig bezüglich der dort definierten Konvergenz.*

[20]) Diese Norm in $E'_{C^*,m}$ hängt zwar von der Wahl des Punktes $\zeta^0 = \zeta^0(C^*)$ ab. Die schließlich mit dieser Norm zu definierende Topologie $\mathfrak{T}_2$ wird davon aber wieder unabhängig.

[21]) Man kann sich dabei auf die Mengen $C^*_{(N)} = C \cap \{z : |z_j| \leq N\}$ beschränken.

[22]) Vgl. a. a. O. [4]) Teil I, S. 16.

Beweis. Sei φ_j konvergent gegen Null. Die Träger der $\varphi_j(z)$ sind enthalten in einer endlichen kompakten Teilmenge C^* von C und für $j > j_0(\varepsilon)$ gilt $|\varphi_j(z)| \leq \varepsilon$. Für die Indikatrix $\tilde{\varphi}_j(\zeta) = \varphi_j\left[\frac{1}{\zeta - z}\right] = \int_C \cdots \int \varphi_j(z)\,(\zeta - z)^{-1}\,dz$ erhält man die Abschätzung $|\tilde{\varphi}_j(\zeta)| \leq \varepsilon \cdot \int_{C^*} |d\zeta| \frac{1}{\delta_1(\zeta_1)\cdots\delta_n(\zeta_n)}$. $\tilde{\varphi}_j^{[-2,\ldots,-2]}(\zeta)$ hat also stetige Randwerte auf C^* und läßt sich auf $C^0 > C^*$ abschätzen durch $|\tilde{\varphi}^{[-2,\ldots,-2]}(\zeta)| \leq \varepsilon \cdot M$. Dabei hängt die Konstante M nur von C^* ab. Jedes $\mathfrak{B}'(C^*, \zeta^0, \{-2\}, \delta)$ enthält also schließlich alle φ_j, so daß diese auch bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}_2$ konvergieren. Es gilt also $u[\varphi_j] \to 0$ d.h. u ist stetig auf dem Konvergenzraum $\mathfrak{E}(C)$.

Satz 13. *$\mathfrak{E}(C)$ ist in $\mathfrak{E}'(C)$ dicht bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}_2$.*

Beweis. $\tilde{u}(\zeta)$ sei enthalten in $E'(C)$, also in einem geeigneten $E'_{C^*,m}$. $\tilde{u}(\zeta)$ kann dann durch beliebig oft differenzierbare Funktionen $\psi_{\varepsilon,\delta}(\zeta)$ mit Träger in C^0 approximiert werden, derart, daß folgendes gilt:

Es gibt eine Menge $\overline{C}$, $(C^* < \overline{C} < C^0)$, so daß auf $\overline{C}$

$$|\tilde{u}^{[-m]}(\zeta) - \psi_{\varepsilon\delta}(\zeta)| \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad \int_{C^0-\overline{C}} \cdots \int |d\zeta_1| \cdots |d\zeta_n| \leq \delta. \tag{83}$$

Durch einmalige Integration nach jeder Variablen erhält man dann

$$|\tilde{u}^{[-m-1]}(\zeta) - \psi_{\varepsilon,\delta}^{[-1]}(\zeta)| \leq \varepsilon \int_{C^*} \cdots \int |d\zeta_1| \cdots |d\zeta_n| + \delta \cdot \sup |\psi_{\varepsilon,\delta}(\zeta) - \tilde{u}^{[-m]}(\zeta)|. \tag{84}$$

Man kann von $|\psi_{\varepsilon,\delta}(\zeta)|$ noch voraussetzen, daß es überall kleiner als $|\tilde{u}^{[-m]}(\zeta)| + 1$ ist. Dann folgt aus (84):

$$|\tilde{u}^{[-m-1]}(\zeta) - \psi_{\varepsilon,\delta}^{[-1]}(\zeta)| \leq \varepsilon \cdot \int_{C_0} \cdots \int |d\zeta| + \delta(2\|\tilde{u}\|_{C^*,\zeta_i,m} + 1) \leq \varepsilon'. \tag{85}$$

ε' geht mit ε und δ auch gegen Null und es ist damit gezeigt, daß $\mathfrak{E}(C)$ in $\mathfrak{E}'(C)$ dicht liegt, denn

$$\tilde{u}(\zeta) - \psi_{\varepsilon,\delta}^{[+m]}(\zeta) \in \mathfrak{B}'(C^*, \zeta^0, m+1, \varepsilon') \tag{86}$$

und ε' kann beliebig klein gemacht werden. Satz 13 ist also bewiesen.

Die stetigen linearen Funktionale auf $\mathfrak{E}(C)$ sind aber gerade die Maße auf C. Jedes stetige lineare Funktional $u[x]$ auf $\mathfrak{E}'(C)$ definiert als stetiges Funktional auf $\mathfrak{E}(C)$ ein Maß μ und ist durch μ selbst vollständig bestimmt. Nun ist aber die Differentiation eine stetige Operation in $\mathfrak{E}'(C)$, so daß auch alle Ableitungen von μ noch Maße sind. Ist $\mu^{(p+2)}$ das durch $D^{p+2,\ldots,p+2}u[x]$ definierte Maß, so ist $\mu^{(p+1)}$ eine Funktion beschränkter Schwankung $\mu^{(p)}$ eine stetige Funktion und $\mu^{(0)}$ selbst eine nach jeder Variablen p-mal stetig differenzierbare Funktion. Da p aber beliebig war, muß μ eine unbeschränkt differenzierbare Funktion aus $\mathfrak{E}(C)$ sein. Nach MACKEY-ARENS stimmt also dann $\mathfrak{T}_2$ mit $\mathfrak{T}_b$ überein.

Literatur.

[1] DIEUDONNÉ, J.: La dualité dans les espaces vectoriels topologiques. Ann. Écol. Norm. Sup. **59**, 107—139 (1942). — [2] DIEUDONNÉ, J., et SCHWARTZ, L.: La dualité dans les espaces (F) et (LF). Ann. Inst. Fourier **1**, 61—101 (1949). — [3] GROTHENDIECK, A.: Sur certaines espaces de fonctions holomorphes. Erscheint im J. reine angew. Math. — [4] KÖTHE, G.: Dualität in der Funktionentheorie. Erscheint im J. reine angew. Math. — [5] KÖTHE, G.: Randverteilungen analytischer Funktionen. Math. Z. **57**, 13—33 (1952). — [6] MACKEY, G.W.: On infinite dimensional linear spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **57**, 155—207 (1945). — [7] MACKEY, G. W.: On convex topological linear spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **60**, 520—537 (1946). — [8] SCHWARTZ, L.: Theorie des distributions, I und II. Actual. Sci. Industr. **1091**, **1122** (1950/51). — [9] SEBASTIÃO e SILVA, J.: As funções analiticas e a Analise funcional. These, Lissabon (1948).

(Eingegangen am 30. Januar 1953.)

Mainz, Mathematisches Institut der Universität.

LORENZEN, P.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 84—87 (1953)

Über die Komplettierung in der Bewertungstheorie.

Von
PAUL LORENZEN.

Die Untersuchung der Fortsetzungen einer Bewertung eines Körpers kann man auf die Untersuchung der Fortsetzungen einer kompletten („perfekten") Bewertung reduzieren. Denn für einen komplett bewerteten Körper gilt der Satz von der eindeutigen Fortsetzbarkeit auf algebraische Oberkörper.

Die komplette Hülle eines bewerteten Körpers ist in Analogie zur Analysis definiert. Es kommt dadurch also ein der Algebra fremdes Element in die Algebra selbst hinein. Das Nichtalgebraische der Begriffsbildungen, die zur kompletten Hülle führen, zeigt sich unter anderem darin, daß die komplette Hülle überabzählbar (im naiven Sinne) ist.

Um für einen abzählbaren bewerteten Körper K einen Oberkörper $\overline{K}$ zu finden, derart, daß (1) sich die Bewertung von K auf $\overline{K}$ fortsetzen läßt und (2) für jeden algebraischen Oberkörper von $\overline{K}$ höchstens eine Fortsetzung der Bewertung von $\overline{K}$ existiert — dazu braucht man aber nicht über das Abzählbare hinauszugehen. Zu jedem abzählbaren bewerteten Körper K kann vielmehr (auf verschiedene Weise) ein abzählbarer Oberkörper $\overline{K}$ konstruiert werden, der die Bedingungen (1) und (2) erfüllt.

Für die Algebra liefert also auch die Bewertungstheorie keinen Anlaß über das Abzählbare hinauszugehen. (Bei dieser ganzen Betrachtung möge die Frage, ob dem „Überabzählbaren" überhaupt Existenz oder Sinn zukommt, unberührt bleiben.)

1. K sei ein (kommutativer) Körper und jedem Element a von K sei eine reelle Zahl $|a|$ zugeordnet, derart, daß gilt

$$|a| \geq 0$$
$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$
$$|a + b| \leq |a| + |b|$$
$$|a| = 0 \leftrightarrow a = 0.$$

Unter den Folgen aus Elementen von K seien gewisse Folgen ausgezeichnet, sie mögen „definite" Folgen heißen. K heiße dann „definit-komplett", wenn jede definite Fundamentalfolge konvergent ist.

M sei ein endlicher K-Modul, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sei eine K-Basis von M. Jedes Element α von M hat also eine eindeutige Darstellung

$$\alpha = a_1 \xi_1 + \cdots + a_n \xi_n.$$

M heißt K-bewertet, wenn jedem α eine reelle Zahl $|\alpha|$ zugeordnet ist, daß gilt

$$\left.\begin{aligned} |\alpha| &\geq 0 \\ |a\cdot\alpha| &= |a|\cdot|\alpha| \\ |\alpha+\beta| &\leq |\alpha|+|\beta| \\ |\alpha| &= 0 \leftrightarrow \alpha = 0. \end{aligned}\right\} \quad (a \in K)$$

Eine Folge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ aus Elementen von M — wir bezeichnen diese Folge durch $\Phi_i \alpha_i$ — heiße „definit", wenn die Folgen $\Phi_i a_{i\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ aus der Darstellung

$$\alpha_i = \sum_1^n{}_\nu a_{i\nu}\xi_\nu$$

definit sind.

2. Wir fragen uns jetzt, welche Bedingungen dem Begriff „definit" auferlegt werden könnten, damit der folgende Satz — aus dem die Existenz höchstens einer Fortsetzungsbewertung für algebraische Oberkörper leicht folgt — gilt:

Satz 1. Ist K definit-komplett, dann ist für eine K-Bewertung eines endlichen K-Moduls eine definite Folge $\Phi_i \alpha_i$ mit

$$\alpha_i = \sum_1^n{}_\nu a_{i\nu}\xi_\nu$$

genau dann Fundamentalfolge, wenn die Folgen $\Phi_i a_{i\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ konvergent sind.

Nennt man jede Folge definit, so kann der Beweis wie üblich (vgl. etwa VAN DER WAERDEN, Moderne Algebra, 3. Aufl. S. 268) geführt werden durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist der Satz trivial. Ist der Satz für $n-1$ bewiesen, so kommt es darauf an, für eine Fundamentalfolge $\Phi_i \alpha_i$, die Annahme $\Phi_i a_{in}$ sei nicht konvergent, zu widerlegen. Aus der Annahme folgt die Existenz eines $\varepsilon > 0$ und einer Teilfolge $\Phi_k a_{i_k n}$ von $\Phi_i a_{in}$ mit $\wedge_k |a_{i_{k+1}n} - a_{i_k n}| \geq \varepsilon$. Daher ist die Folge $\Phi_k \beta_k$ mit

$$\beta_k = \frac{\alpha_{i_{k+1}} - \alpha_{i_k}}{a_{i_{k+1}n} - a_{i_k n}} = \sum_1^{n-1}{}_\nu b_{k\nu}\xi_\nu + \xi_n$$

gegen 0 konvergent. Nach Induktionsvoraussetzung existiert $\lim_k b_{k\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n-1)$, woraus ein Widerspruch mit der linearen Unabhängigkeit der $\xi_1, \ldots, \xi_n$ folgt.

Dieser Beweis bleibt richtig für jeden Begriff „definit", wenn nur aus der vorausgesetzten Definitheit von $\Phi_i a_{i\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ auf die Definitheit von $\Phi_k a_{i_k n}$ und $\Phi_k b_{k\nu}$ geschlossen werden kann. Es liegt daher nahe, folgendes zu fordern:

(1) Die konstanten Folgen $\Phi_i a_i$ mit $a_i = a$ sind definit.

(2) Mit $\Phi_i a_i$ und $\Phi_i b_i$ sind auch $\Phi_i a_i + b_i$, $\Phi_i a_i \cdot b_i$ und $\Phi_i \frac{a_i}{b_i}$ (falls $\wedge_i b_i \neq 0$) definit.

(3) Gewisse Grundfolgen $\Phi_k i_k$, d.h. Folgen von natürlichen Zahlen i_k mit $k_1 < k_2 \to i_{k_1} < i_{k_2}$ heißen definit, derart, daß

(3.1) Mit $\Phi_i a_i$ und $\Phi_k i_k$ ist auch $\Phi_k a_{i_k}$ definit.

(3.2) Zu jeder definiten Folge $\Phi_i a_i$, die keine Fundamentalfolge ist, gibt es eine definite Grundfolge $\Phi_k i_k$ mit $\bigvee_\varepsilon \bigwedge_k |a_{i_{k+1}} - a_{i_k}| \geq \varepsilon$.

Diese Forderungen sind trivial erfüllbar dadurch, daß man nur die konstanten Folgen als definit auszeichnet (und beliebige, eventuell keine, Grundfolgen).

3. Um aber aus Satz 1 auf die Existenz höchstens einer Fortsetzungsbewertung für algebraische Oberkörper zu schließen, kommt man selbstverständlich nicht mit den konstanten Folgen aus. Für die Gültigkeit von

Satz 2: Gilt für zwei Bewertungen $|\ |_1$ und $|\ |_2$ die Äquivalenz

$$\lim_i |a_i|_1 = 0 \leftrightarrow \lim_i |a_i|_2 = 0$$

für alle definiten Folgen $\Phi_i a_i$, dann sind die Bewertungen äquivalent, d.h. $\frac{\log |a|_1}{\log |a|_2}$ ist konstant,

genügt nämlich der übliche Beweis (VAN DER WAERDEN l. c. S. 259), wenn alle Potenzfolgen $a, a^2, a^3, \ldots$ definit sind.

Man braucht ja nur $|a|_1 < 1 \leftrightarrow |a|_2 < 1$ zu zeigen. $|a| < 1$ ist aber äquivalent mit $\lim_i |a^i| = 0$. Um daher

Satz 3: Ist K definit-komplett, dann existiert für jeden algebraischen Oberkörper M höchstens eine Bewertung von M, die die Bewertung von K fortsetzt,

mit Hilfe von Satz 1 und Satz 2 erschließen zu können, ergänzen wir unsere Forderungen (1) bis (3) an den Begriff definit durch

(4) Für jeden einfach-algebraischen Oberkörper $K(\xi)$ von K vom Grade n und jedes Element α von $K(\xi)$ seien die Folgen $\Phi_i a_{i\nu}$ mit $\alpha^i = \sum_0^{n-1} a_{i\nu} \xi^\nu$ definit.

4. Der in der Einleitung genannte Satz, nämlich

Satz 4: Zu jedem abzählbaren bewerteten Körper K gibt es einen abzählbaren Oberkörper $\overline{K}$ derart, daß sich die Bewertung von $\overline{K}$ auf K fortsetzen läßt, und daß für jeden algebraischen Oberkörper M von $\overline{K}$ höchstens eine Bewertung von M existiert, die die Bewertung von $\overline{K}$ fortsetzt,

wird mit Satz 3 bewiesen sein, wenn zu jedem abzählbaren bewerteten Körper K ein abzählbarer Oberkörper $\overline{K}$ mit Fortsetzung der Bewertung von K konstruiert ist und gewisse Folgen von $\overline{K}$ als definit ausgezeichnet sind, derart, daß die Forderungen (1) bis (4) gelten und schließlich $\overline{K}$ definit-komplett ist.

Nach dem Muster der in meiner Arbeit zur Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis [Math. Z. **54**, 1 (1951)] angegebenen Schichtenkonstruktion läßt sich die Konstruktion von $\overline{K}$ leicht durchführen. Dazu braucht hier aber auf die „Aussageformen" nicht eingegangen zu werden.

Zu dem abzählbaren Körper K ist zunächst eine abzählbare Menge D von Folgen und Grundfolgen als die Menge der definiten Folgen zu definieren.

Die kleinste Menge von Folgen, die (1), (2) und (4) erfüllt, ist jedenfalls abzählbar. Um auch (3) mit einer abzählbaren Menge D von definiten Folgen und von definiten Grundfolgen erfüllen zu können, ordnen wir jeder Folge $\Phi_i a_i$, die keine Fundamentalfolge ist, genau eine Grundfolge $\Phi_k i_k$ zu mit $\bigvee_\varepsilon \bigwedge_k |a_{i_{k+1}} - a_{i_k}| \geq \varepsilon$. Ist $\Phi_i a_i$ keine Fundamentalfolge, so bestimme man dazu, das kleinste ganze $n \geq 0$ mit

$$\bigwedge_k \bigvee_{j>k} |a_j - a_k| \geq 2^{-n}.$$

j_k sei das kleinste j mit $j > k$ und $|a_j - a_k| \geq 2^{-n}$. Schließlich sei durch $i_1 = 1$

$$i_{k+1} = j_{i_k}$$

die $\Phi_i a_i$ zugeordnete Grundfolge $\Phi_k i_k$ definiert. Ersetzen wir (3.2) durch die Forderung, daß mit jeder definiten Folge, die nicht Fundamentalfolge ist, auch die zugeordnete Grundfolge definit sei, so sieht man, daß auch (1) bis (4) durch eine abzählbare Menge D von definiten Folgen und Grundfolgen erfüllt werden kann. Hierdurch ist für jeden abzählbaren bewerteten Körper K eine abzählbare Menge D (K) definiter Folgen und Grundfolgen definiert. Wir konstruieren nun einen abzählbaren Oberkörper K_1 von K, indem wir alle definiten Fundamentalfolgen, die nicht konvergent sind, zu K hinzunehmen (von kongruenten Folgen $\Phi_i a_i$ und $\Phi_i b_i$ — d. h. mit $\lim_i |a_i - b_i| = 0$ — allerdings nur eine!).

Die Bewertung von K läßt sich auf K_1 fortsetzen und die Fundamentalfolgen aus $D(K)$ sind in K_1 konvergent. Wir konstruierten eine Körperkette

$$K \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots,$$

so daß in K_{n+1} die Fundamentalfolgen aus $D(K_n)$ konvergent sind. Setzen wir

$$\overline{K} = \bigcup_n K_n,$$

so ist auch $\overline{K}$ abzählbar. Es gilt

$$D(\overline{K}) \subseteq \bigcup_n D(K_n)$$

und $\overline{K}$ ist daher definit-komplett. Damit ist Satz 4 bewiesen.

5. Es sei zum Schluß bemerkt, daß die Untersuchungen in 1. bis 4. unabhängig vom Begriff der reellen Zahl durchgeführt werden könnten. Man brauchte ja von den Werten nur zu fordern, daß sie einem archimedisch angeordneten Körper angehören. Ist K abzählbar, dann braucht auch der Wertekörper nur abzählbar zu sein. Zur Fortsetzung der Bewertung von K auf $\overline{K}$ muß der Wertekörper eventuell erweitert werden, aber selbstverständlich genügen hier stets abzählbare Erweiterungen.

Bonn, Luisenstr. 3.

(Eingegangen am 4. Januar 1953.)

SHAH, S. M., and S. K. SINGH
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 88—93 (1953)

Borel's Theorem on a-points and exceptional values of Entire and Meromorphic Functions.

By
S. M. SHAH and S. K. SINGH.

1. Let $f(z)$ be an entire function of finite order. If α is a Borel exceptional value (B.e.v.), of $f(z)$, that is, if

$$\varrho_1(\alpha) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ n(r,\alpha)}{\log r} < \varrho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r},$$

then ϱ is necessarily an integer and $f(z)$ can have no other e.v.B. or N. An analogy with this result would suggest that there can be at most one value α such that

$$\lambda_1(\alpha) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log^+ n(r,\alpha)}{\log r} < \lambda = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r} \tag{1}$$

and that when α exists such that (1) holds, then ϱ or λ must be integer. We show that this analogy is false. R. C. YOUNG [*10*; 194-5] has indicated a method to construct a function for which (1) holds for more than one α but this method depends on the existence of a number Θ_0 about which nothing more than its existence with a certain property [if $g(z)$ is of very regular growth then $n(r, g-\Theta_0) > K \log M(r, g)$] is known. (See theorem c 2 [*10*], 189.) We avoid any application of this theorem and give a direct proof of the result $\lambda_1(-a_r) < \lambda$ $(r = 1, 2, \ldots, k)$ for the function $f(z)$ given below [§ 3, theorem 1 (ii)].

2. Let $\Phi(x)$ be an increasing function of x such that $\int_a^\infty \frac{dx}{x\Phi(x)}$ is convergent and let E denote the set of functions $\Phi(x)$. Define α to be an exceptional value (e.v.) E of a meromorphic function $F(z)$ if

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(r)}{n(r,\alpha)\,\Phi(r)} > 0$$

for some $\Phi(r) \subset E$. It is known [*5*] that if $F(z)$ is of finite order and has 0 and ∞ as e.v. E then $T(r,F) \sim T(r,F')$ and this result holds if $F(z)$ has α $(|\alpha| < \infty)$ and ∞ as e.v. E. We prove here that this result holds under less restrictive hypothesis.

Theorem 2. *If $F(z)$ is a meromorphic function of finite order and if $\delta(\alpha) = \delta(\infty) = 1$, $|\alpha| < \infty$ then $T(r,F') \sim T(r,F)$ as $r \to \infty$. Here $\delta(x) = \delta(x,F)$ denotes Nevanlinna deficiency of the value x* [*3*; 79].

Theorem 3. *If $F(z)$ is a meromorphic function of finite order and if $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $|\alpha_1| < \infty$, $|\alpha_2| < \infty$, $\delta(\alpha_1) = \delta(\alpha_2) = 1$ then $T(r,F') \sim 2\,T(r,F)$ as $r \to \infty$.*

Corollary. *If $F(z)$ is a meromorphic function of finite order and has two finite e.v. E then $T(r,F')\sim 2T(r;F)$.*

Theorem 4. *If $F(z)$ is a meromorphic function of finite order having α ($|\alpha|<\infty$) and ∞ as e.v. E then $F^{(k)}(z)$ has 0 and ∞ as e.v. E.*

Theorem 5. *If $F(z)$ is a meromorphic function of finite order having two finite e.v. E then $F'(z)$ has 0 as e.v. E and no other e.v. E.*

Analogous results on N e.v. of $F'(z)$ can be proved (see [1], [2]). We can also prove with the help of theorems 4 and 5 above and theorem 3 of [5] the following results on B.e.v. of $F'(z)$.

I. If $F(z)$ is a meromorphic function of finite order and has 0 and 1 as B.e.v. then $F'(z)$ has 0 as the only B.e.v.

II. If $F(z)$ is a meromorphic function of finite order and has 0 and ∞ as B.e.v., then $F^{(k)}(z)$ has 0 and ∞ as B.e.v.

3. Theorem 1. (i) *Given ϱ an irrational positive number, there exists an entire function $f(z)$ of order ϱ for which $\lambda_1(0)<\lambda$ and λ is non-integer.*

(ii) *There exists an entire function $f(z)$ for which $\lambda_1(-a_r)<\lambda$ ($r=1, 2, \ldots, k$).*

Proof. (i) Let $k=1+[\varrho]$, $a_0=0$, $a_n=2^{2^{n-1}}$ $(n\geq 1)$

$$\xi_n=[a_n^{\varrho/k}]-[a_{n-1}^{\varrho/k}],$$

$$f(z)=\prod_1^\infty\left\{1+\frac{z^k}{a_n}\right\}^{\xi_n}.$$

Then $f(z)$ is a canonical product of order ϱ for which [6; 65] $\lambda_1(0)=\varrho/2$, $\lambda=\varrho/\{2-(\varrho/k)\}$. Hence

$$\varrho=\frac{2\lambda}{1+\left(\frac{\lambda}{k}\right)}$$

and so λ is an irrational number.

(ii) Let $k>1$ be integer; $a_1, a_2, \ldots, a_k$ be integers (positive or negative or zero) distinct from each other;

$$\lambda_1=2, \qquad \lambda_{n+1}=\lambda_n^{k+1} \qquad (n\geq 1), \qquad \Theta_0=\tfrac{1}{2}, \qquad \Theta_1=\Theta_2=1,$$

$\Theta_n=a_1$ when n lies in the interval $\lambda_m<n\leq\lambda_m^2$

$=a_2$ when n lies in the interval $\lambda_m^2<n\leq\lambda_m^3$

.....

$=a_k$ when n lies in the interval $\lambda_m^k<n\leq\lambda_m^{k+1}$

$$(m=1, 2, \ldots),$$

$$g_\nu(z)=a_\nu+\sum_1^\infty\frac{a_\nu-\Theta_n}{n!}z^n \qquad (\nu=1, 2, \ldots, k),$$

$$f(z)=-e^{-z}\sum_0^\infty\frac{\Theta_n}{n!}z^n.$$

Then $g_\nu(z)$ and $f(z)$ are entire functions and $\varrho(g_\nu)=1$,

$$(g_\nu(z)-\Theta_0)\,e^{-z}=f(z)+a_\nu. \tag{2}$$

Also

$$M(r,f)\leq Ke^{2r}, \tag{3}$$

and if we write $f(z)=\sum_0^\infty A_n z^n$ then

$$|A_n|=\left|\frac{\Theta_n}{n!}-\frac{\Theta_{n-1}}{(n-1)!\,1!}+\frac{\Theta_{n-2}}{(n-2)!\,2!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\Theta_0\right|$$

$$=\frac{1}{n!}\left|\left\{\Theta_n-\frac{n}{1}\Theta_{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}\Theta_{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}n\,\Theta_1\right\}+(-1)^n\Theta_0\right|$$

$$\geq\frac{1}{2n!}.$$

Since [7; theorem 1]

$$\lambda(f)\geq\liminf_{n\to\infty}\frac{n\log n}{\log\frac{1}{|A_n|}},$$

we have $\lambda(f)\geq 1$ and hence from (3), $\lambda(f)=\varrho(f)=1$. Further from (2)

$$n(r,f+a_\nu)=n(r,g_\nu-\Theta_0)$$

and

$$g_\nu(z)-\Theta_0=\sum_0^\infty\frac{a_\nu-\Theta_n}{n!}z^n.$$

Now $\Theta_n=a_\nu$ for $\lambda_m^\nu<n\leq\lambda_m^{\nu+1}$. Hence [9; theorem 3]

$$\lambda(g_\nu-\Theta_0)\leq\liminf_{m\to\infty}\frac{\log\lambda_m^\nu}{\log\lambda_m^{\nu+1}}=\frac{\nu}{\nu+1}$$

and so

$$\lambda_1(-a_\nu)=\liminf_{r\to\infty}\frac{\log n(r,f+a_\nu)}{\log r}\leq\frac{\nu}{\nu+1}<\lambda(f).$$

4. Proof of theorem 2. We may suppose $\alpha=0$. Then [3; 104]

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{T(r,F')}{T(r,F)}\leq 2-\mu(\infty)-\delta(\infty)\leq 1.$$

Further [1; 12]

$$T(r,F')>N(r,F')+N\left(r,\frac{1}{F'}\right)+T(r,F)-2N(r,F)$$

$$-N\left(r,\frac{1}{F}\right)+O(\log r)$$

$$>T(r,F)+o\,(T(r,F))$$

and hence $T(r,F')\sim T(r,F)$ as $r\to\infty$.

5. Proof of theorem 3. We have [3; 98]

$$T(r,F) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{F-\alpha_1}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{F-\alpha_2}\right) + \overline{N}(r,F) + O(\log r)$$
$$\leq \circ\left(T(r,F)\right) + \overline{N}(r,F).$$

Hence

$$\overline{N}(r,F) \sim T(r,F) \tag{4}$$

$$\frac{T(r,F')}{T(r,F)} \geq \frac{\overline{N}(r,F) + N(r,F)}{T(r,F)} \sim 2.$$

But [3; 104]

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{T(r,F')}{T(r,F)} \leq 2,$$

and hence $T(r,F') \sim 2T(r,F)$.

The corollary follows immediately from the theorem, since if α is an e.v. E then $\delta(\alpha) = 1$.

6. Proof of theorem 4. We may suppose $\alpha = 0$; then

$$n(r, F' - \infty) \leq 2n(r, F - \infty),$$

and since 0, ∞ are e.v. E of $F(z)$, $T(r,F) \sim A r^{\varrho}$ [4; theorem 8]

$$T(r,F) \sim T(r,F')$$

[5; theorem 6]. Hence

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(r,F')}{n(r,F'-\infty)\,\Phi(r)} \geq \frac{1}{2} \liminf_{r\to\infty} \frac{T(r,F)}{n(r,F-\infty)\,\Phi(r)} > 0$$

for some $\Phi(r) \subset E$ and so ∞ is an e.v. E of $F'(z)$.

Further [3; 105]

$$N\left(r, \frac{1}{F'}\right) < 2\left\{N(r,F) + N\left(r, \frac{1}{F}\right)\right\} + O(\log r).$$

Now[1])

$$n(r, F-0) < \frac{A r^{\varrho}}{\Phi(r)}, \qquad n(r, F-\infty) < \frac{A r^{\varrho}}{\Phi(r)}$$

for some $\Phi(r) \subset E$. Further given $\Phi(r) \subset E$, we can find another function (see lemma 1, [8]) $\Psi(x) \subset E$ such that $\Psi(x) \leq \Phi(x)$ and $\frac{\Psi(x)}{x^{\beta}} \downarrow$, β being some positive constant less than unity. Hence

$$N(r,F) + N\left(r, \frac{1}{F}\right) < A\int_a^r \frac{x^{\varrho-1}\,dx}{\Phi(x)} < A\int_a^r \frac{x^{\varrho-1}\,dx}{\Psi(x)} < \frac{A r^{\varrho}}{\Psi(r)},$$

$$N\left(r, \frac{1}{F'}\right) < \frac{A r^{\varrho}}{\Psi(r)},$$

$$n(r, F'-0)\log 2 < N\left(2r, \frac{1}{F'}\right) < \frac{A r^{\varrho}}{\Psi(2r)} \leq \frac{A r^{\varrho}}{\Psi(r)},$$

and so

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(r,F')}{n(r,F'-0)\,\Psi(r)} > 0.$$

[1]) A denotes a positive constant not necessarily the same at each occurrence.

Hence 0 is an e.v. E of $F'(z)$. The argument can be repeated and the theorem follows.

7. Proof of theorem 5. We have

$$N(r, F') = N(r, F) + \bar{N}(r, F)$$

and from (4)

$$N(r, F) + \bar{N}(r, F) \sim 2T(r, F) \sim T(r, F')$$

and so

$$\delta(\infty, F') = 0.$$

Hence ∞ is not an e.v. N of $F'(z)$ and a fortiori not an e.v. E.

We may suppose that 0 and 1 are e.v. E of $F(z)$. Consider

$$G(z) = \frac{F(z)}{1 - F(z)}.$$

$G(z)$ has 0 and ∞ as e.v. E. So by theorem 4, $G'(z)$ has 0 and ∞ as e.v. E; and

$$F'(z) = \frac{G'(z)}{(G(z) + 1)^2},$$

$$n(r, F' - 0) < n(r, G' - 0) + 2n(r, G - \infty) < \frac{A r^\varrho}{\Phi(r)}$$

for some $\Phi(r) \subset E$. Since $T(r, F') \sim A_1 r^\varrho$

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{T(r, F')}{n(r, F' - 0)\, \Phi(r)} > \lim_{r \to \infty} \frac{A_1 r^\varrho}{A r^\varrho} > 0$$

and so 0 is an e.v. E of $F'(z)$. Further [2]

$$T(r, F') < N(r, F) + N\left(r, \frac{1}{F}\right) + N\left(r, \frac{1}{F' - 1}\right) + N\left(r, \frac{1}{F'}\right) + O(\log r).$$

Suppose if possible 1 is an e.v. E of $F'(z)$. Then

$$T(r, F') \sim 2T(r, F),$$

$$N(r, F) \sim T(r, F),$$

$$N\left(r, \frac{1}{F}\right) = o\left(T(r, F)\right),$$

$$N\left(r, \frac{1}{F' - 1}\right) = o\left(T(r, F)\right),$$

$$N\left(r, \frac{1}{F'}\right) = o\left(T(r, F)\right),$$

and so we have a contradiction. Hence 1 is not an e.v. E of $F'(z)$ and 0 is the only e.v. E of $F'(z)$.

References.

[1] MILLOUX, H.: Les Fonctions Meromorphes et leurs Derivees, XIV. Paris 1940. — [2] MILLOUX, H.: Sur le Theorie des defauts. C. R. Acad. Sci. Paris **210**, 38—39. — [3] NEVANLINNA, R.: Le Theoreme de PICARD-BOREL et la Theorie des fonctions Meromorphes. Paris 1929. — [4] SHAH, S. M.: On Exceptional Values of Entire Functions.

Comp. Math. **9**, 227—238 (1951). — [5] SHAH, S. M.: Exceptional Values of Entire and meromorphic Functions. Duke Math. J. **19**, 585—594 (1952). — [6] SHAH, S. M.: The Lower Order of the Zeros of an Integral Function. J. Indian Math. Soc. **6**, 63—68 (1942). — [7] SHAH, S. M.: On the Lower Order of Integral Functions. Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 1046—1052 (1946). — [8] SHAH, S. M.: A Theorem on Integral Functions of Integral Order (II). J. Indian Math. Soc. **5**, 179—188 (1942). — [9] WHITTAKER, J. M.: The Lower Order of Integral Functions. J. London Math. Soc. **8**, 20—27 (1933). — [10] VALIRON, G.: Lectures on the General Theory of Integral Functions. Toulouse 1923.

Muslim University, Aligarh (India).

D. S. College, Aligarh (India).

(Eingegangen am 26. Januar 1953.)

ELLIS, D.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 94—96 (1953)

A Modification of the Parallelogram Law Characterization of Hilbert Spaces*).

By
DAVID ELLIS.

1. All linear spaces considered in this note are to be understood as *real* linear spaces. It is well-known [2] that Hilbert spaces are characterized among Banach spaces by the "parallelogram law":

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2). \tag{1}$$

The purpose of this note is to restrict the domain over which (1) must be required to hold by adjoining requirements as to the existence and properties of a certain partial ordering. We assume familiarity with the notions of Banach and UMB lattices [1] and metric lattices [3].

If L is any vector lattice [1] we understand by L^+ the set $\{x\in L\,|\,x\geq 0\}$ and by $k(a)$ (the "absolute of a") the element $a\vee -a$. It is clear that L^+ is a sublattice of L.

2. Let B be any UMB lattice. Select $a, b\in B^+$ so that $a<b$. Then, since $k(a)=a$ and $k(b)=b$, and B is a Banach lattice, $\|a\|\leq\|b\|$.

Lemma 1. *If $a, b\in B^+$ where B is a UMB lattice, and if $a<b$, then $\|a\|<\|b\|$.*

Proof. From the preceding discussion, it suffices to show $\|a\|\neq\|b\|$. Suppose the contrary. Now, $2\|a\|=\|2a\|=\|a\|+\|b\|\geq\|a+b\|$. But, $a+b\geq 2a>0$ (in the case $a=0$, the conclusion is immediate) so that $2\|a\|\leq\|a+b\|$. Thus, $\|a+b\|=2\|a\|$. Since B is UMB, for $\varepsilon>0$ there is $\delta>0$ so that $f, g\geq 0$, $\|f\|=1$, and $\|f+g\|<1+\delta$ imply $\|g\|<\varepsilon$. Now, $1+\delta>1=\|(1/\|a\|)a\|=(1/2\|a\|)\|a+b\|=\|(1/\|a\|)a+(1/2\|a\|)(b-a)\|$. Thus, $\|b-a\|<2\|a\|\varepsilon$ for all $\varepsilon>0$ which is impossible since $b-a\neq 0\neq a$.

3. We shall refer to a Hilbert space which is also a Banach lattice as a Hilbert lattice. We recall [4] that if H is a Hilbert space there is a maximal orthonormal subset E of H so that if E is well ordered, $E=\{x_\alpha\}_{\alpha<\beta}$, then

$$x=\sum_{\alpha<\beta}(x, x_\alpha)x_\alpha \tag{2}$$

and

$$\|x\|^2=\sum_{\alpha<\beta}(x, x_\alpha)^2, \tag{3}$$

where $(x, x_\alpha)=0$ for all but countably many α.

*) Presented to the American Mathematical Society; Thanksgiving, 1952. Part of the work in this paper was accomplished under Air Force contract no. 33(038)-15068, Suppl. no. 2.

Lemma 2. *Let E and H be as above and define in H, $x \leqq y$ if and only if $(x, x_\alpha) \leqq (y, x_\alpha)$ for all $\alpha < \beta$. Then H forms a vector lattice under this partial ordering.*

Proof. The requisite properties follow easily from the inner product rules and the details are left to the reader. Clearly, the lattice operations may be carried out "coordinatewise" in H.

Lemma 3. *If H is partially ordered as in Lemma 2, it forms a Hilbert lattice.*

Proof. From (3), $\|x\| = \|k(x)\|$. But, by definition, $k(x) \leqq k(y)$ implies $|(x, x_\alpha)| \leqq |(y, x_\alpha)|$ for all $\alpha < \beta$. Thus, $k(x) \leqq k(y)$ implies $\|x\| \leqq \|y\|$ by (3).

Lemma 4. *Any Hilbert lattice is a UMB lattice.*

Proof. Select $\varepsilon > 0$ and select δ so that $0 < \delta < (1+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - 1$. Then $2\delta + \delta^2 < \varepsilon^2$. Let $f, g \geqq 0$, $\|f\| = 1$, $\|f+g\| < 1+\delta$. Then $f \wedge g \geqq 0 \geqq -(f \wedge g)$, $k(f+g) = f+g = (f \vee g) + (f \wedge g) \geqq (f \vee g) - (f \wedge g) = k(f-g)$, so that $\|f+g\| \geqq \|f-g\|$. But, by (1), $\|g\|^2 = (\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 - 2\|f\|^2)/2 < 2\delta + \delta^2$, so that $\|g\| < \varepsilon$.

Theorem 1. *Any Hilbert space H may be partially ordered to form a Hilbert lattice. Any Hilbert lattice is a UMB lattice and if H is a Hilbert lattice, then H^+ is a metric lattice.*

Proof. In view of Lemmas 1—4, we need only show that there is a monotone strictly increasing function of the norm in H which is a modular functional on H^+. The obvious choice, of course, is $\nu(x) = \|x\|^2$. To see that this is modular we observe from (1),

$$\nu(x) + \nu(y) = \tfrac{1}{2}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = \tfrac{1}{2}(\|x+y\|^2 + \|k(x-y)\|^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\|(x \vee y) + (x \wedge y)\|^2 + \|(x \vee y) - (x \wedge y)\|^2) = \nu(x \vee y) + \nu(x \wedge y).$$

Lemma 5. *If B is a Banach lattice and if (1) subsists in B^+, then (1) subsists in B so that B is a Hilbert lattice.*

Proof. Assume the hypotheses.

$$2(\|a\|^2 + \|b\|^2) = 2(\|k(a)\|^2 + \|k(b)\|^2)$$
$$= \|k(a) + k(b)\|^2 + \|k(a) - k(b)\|^2 = \|k(a) + k(b)\|^2 + \|k(k(a) - k(b))\|^2.$$

But,

$$k(a) + k(b) = k(a+b) \vee k(a-b) \quad \text{and} \quad k(k(a) - k(b)) = k(a+b) \wedge k(a-b).$$

Thus,

$$2(\|a\|^2 + \|b\|^2) = \|k(a+b) \vee k(a-b)\|^2 + \|k(a+b) \wedge k(a-b)\|^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(\|k(a+b) + k(a-b)\|^2 + \|k(k(a+b) - k(a-b))\|^2)$$
$$= \|k(a+b)\|^2 + \|k(a-b)\|^2 = \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2.$$

Lemma 6. *Let B be a Banach lattice and B^+ be a metric lattice under $\nu(x) = \|x\|^2$. If (1) subsists for pairs of comparable elements in B^+, then (1) subsists in B and B is a Hilbert lattice.*

Proof. By Lemma 5, it suffices to show that (1) holds over B^+. Let $a, b \in B^+$. Then, $2(\|a\|^2+\|b\|^2) = 2(\|a \vee b\|^2+\|a \wedge b\|^2) = \|a+b\|^2+\|a-b\|^2$, since $a \vee b$ and $a \wedge b$ are comparable, and $a+b = (a \vee b)+(a \wedge b)$, $k(a-b) = (a \vee b)-(a \wedge b)$, $\|k(a-b)\| = \|a-b\|$.

Combining now Theorem 1, Lemmas 5 and 6, and the usual characterization theorem we have

Theorem 2. *Let B be a Banach space. Then the following conditions are equivalent pairwise:*

(1) *B is a Hilbert space.*

(2) *There exists a partial ordering in B so that B is a Banach lattice and* (1) *holds over the B^+ defined by this ordering.*

(3) *There exists a partial ordering in B so that B is a Banach lattice, the B^+ defined by this ordering is a metric lattice under $\nu(x) = \|x\|^2$, and* (1) *holds for pairs of comparable elements in this B^+.*

(4) (1) *holds over B.*

Bibliography.

[1] BIRKHOFF, GARRETT: Lattice Theory (Revised Edition). Amer. Math. Soc. N. Y. **1948**. — [2] BLUMENTHAL, L. M.: Distance Geometries. Columbia: University of Missouri 1938. — [3] ELLIS, DAVID: On the metric characterization of metric lattices. J. Indian Math. Soc. **15**, 152—154 (1951). — [4] HALMOS, PAUL: The Theory of Spectra Multiplicity (Mimeographed). Chicago: University of Chicago 1950.

The Institute for Air Weapons Research,
The University of Chicago and The University of Florida.

(Eingegangen am 1. April 1953.)

Bol, G.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 97—150 (1953)

Über die Flächen, bei denen die Diagonalen der Vierseite von Demoulin linearen Kongruenzen angehören.

Von
Gerrit Bol.

Die Lie-Quadriken einer Fläche haben bekanntlich außer dieser Fläche selbst im allgemeinen noch 4 weitere Hüllflächen. Die zu einer Stelle auf der vorgegebenen gehörigen 4 Punkte dieser Flächen sind Ecken eines Vierseits, das auf der zugehörigen Lie-Quadrik liegt; man nennt es das Vierseit von Demoulin.

Wir wollen hier die Flächen untersuchen, bei denen die Diagonalen dieser Vierseite einer linearen Kongruenz angehören; der Kürze halber nennen wir sie Kongruenzflächen. Dabei soll stets angenommen werden, daß die Vierseite nicht entarten, also 4 verschiedene Ecken haben. Die fraglichen Flächen sind trotz ihrer interessanten Eigenschaften bisher anscheinend nicht beachtet worden; sie sind spezielle Projektivminimalflächen.

Ihre wichtigsten Eigenschaften sind geradengeometrischer Natur. Den beiden Schmiegtangentenkongruenzen einer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ des projektiven R_3 entsprechen bekanntlich im Kleinschen Geradenraum 2 Flächen

$$\mathfrak{u}(u, v), \qquad \mathfrak{v}(u, v):$$

diese sind in bezug auf die Asymptotenlinienparameter u, v von $\mathfrak{x}$ Laplace-Transformierte voneinander. Die von ihnen erzeugte Laplace-Kette

$$(1) \qquad \ldots \mathfrak{v}_{-2}, \mathfrak{v}_{-1}, \mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0, \mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3, \ldots$$

nennen wir die Godeaux-Kette von $\mathfrak{x}(u, v)$ [1]).

Kennzeichnend für unsere Flächen ist, daß ihrer Godeaux-Kette eine weitere Laplace-Kette in bezug auf u, v einbeschrieben ist, die geschlossen ist und die Periode 4 hat; dabei liegt jeder Punkt einer Fläche der neuen Kette in der Ebene, die von den entsprechenden Punkten von 3 aufeinanderfolgenden Flächen $\mathfrak{u}_k$, $\mathfrak{u}_{k+1}$, $\mathfrak{u}_{k+2}$ der Godeaux-Kette aufgespannt wird [2]).

[1]) Sie wurde vor allem von L. Godeaux und O. Rozet untersucht; man vgl. L. Godeaux, La Théorie des surfaces et l'espace réglé (Géométrie projective différentielle), Actualités scient. et industr., Paris 1934. Weiterhin zitiert „G".

[2]) Diese Kette wurde für beliebige Projektivminimalflächen von L. Godeaux angegeben. Sie ist dort jedoch im allgemeinen nicht geschlossen und der Godeaux-Kette nur zweifach im angegebenen Sinne einbeschrieben. Vgl. Godeaux, L.: Acad. Roy. Belg., Bull. Cl. Sci. **24**, 213—222 (1938).

Derselbe Punkt liegt dann auch in der Ebene durch $\mathfrak{u}_{k+4}, \mathfrak{u}_{k+5}, \mathfrak{u}_{k+6}$ und in der Ebene durch $\mathfrak{u}_{k-4}, \mathfrak{u}_{k-3}, \mathfrak{u}_{k-2}$, usw. Dabei ist

$$\mathfrak{v}_{-k} = \mathfrak{u}_{-k-1} \tag{2}$$

zu setzen.

Damit hängt zusammen, daß die GODEAUX-Kette unserer Flächen eine Projektivität π des R_5 in sich gestattet, die jede Fläche auf ihre vierte LAPLACE-Transformierte abbildet. Die einbeschriebene Kette wird hierbei auf sich abgebildet. Infolgedessen läßt sich die Frage beantworten, ob die GODEAUX-Kette unserer Flächen geschlossen sein kann; dies stellt sich als möglich heraus und die Periode kann jede durch 4 teilbare Zahl $4n \geq 8$ sein.

Die Kongruenz K, der die Diagonalen des Vierseits von DEMOULIN unserer Fläche angehören, wird im R_5 von einem dreidimensionalen linearen Raum $\boldsymbol{G}$ dargestellt, der von π punktweise festgelassen wird. Die zu $\boldsymbol{G}$ in bezug auf die absolute Quadrik $\boldsymbol{Q}$ des Geradenraumes polare Gerade $\boldsymbol{g}$ bleibt bei π ebenfalls fest, in ihr wird von π eine Projektivität $\pi_{\boldsymbol{g}}$ induziert. Die Elementarteiler von $\pi_{\boldsymbol{g}}$ sind für die Eigenschaften unserer Fläche von grundlegender Bedeutung.

Nennt man den Übergang von einer Fläche zu einer Hüllfläche ihrer LIE-Quadriken eine M-Transformation, so ist diese Beziehung nach O. MAYER[3]) bei jeder Projektivminimalfläche umkehrbar: Die erste Fläche ist auch M-Transformierte jeder Hüllfläche ihrer LIE-Quadriken, sofern diese nicht entarten. Diese Hüllflächen sind daher wieder Projektivminimalflächen. Durch wiederholte M-Transformation einer Projektivminimalfläche entsteht ein zweifach unendliches System solcher Flächen; wir sprechen von einem M-System. Die Flächen des Systems lassen sich den Punkten mit ganzzahligen Koordinaten eines ebenen CARTESischen Koordinatensystems zuordnen, deren Koordinatensumme gerade ist. Dieses Gitter nennen wir das M-Diagramm unserer Fläche.

In § 5 wird untersucht, wann im M-System entartete Flächen vorkommen; das ist genau dann der Fall, wenn $\pi_{\boldsymbol{g}}$ zwei gleiche Eigenwerte hat. In § 7 untersuchen wir die Beziehungen der Flächen des M-Systems zueinander, wenn keine Entartungen vorkommen; das System gestattet dann eine Gruppe von Projektivitäten, denen Parallelverschiebungen des Gitters entsprechen. Insbesondere wird untersucht, wann diese Gruppe endlich ist.

Die Flächen des M-Systems gehören zu den „Schichtflächen" zweier Paare gegenseitig stratifiabler Kongruenzen.

In § 6 wird eine Klassifikation unserer Flächen durchgeführt, wobei dreierlei Gesichtspunkte zu berücksichtigen sind. Man erhält eine Einteilung in 24 Klassen, in 7 davon kommen Flächen mit geschlossener GODEAUX-Kette vor.

Wenn die GODEAUX-Kette einer Fläche sich schließt, so ist ihre Gliederzahl bekanntlich gerade[4]); sie ist dann auch GODEAUX-Kette einer zweiten Fläche, deren Schmiegtangenten durch die $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ gegenüberliegenden

[3]) MAYER, O.: Mathematica, Cluj (Timisoara) **3**, 129—133. — Bull. Sci. Math. **56**, 146—168, 188—200 (1932).

[4]) G, p. 18.

9183-59

Flächen der Kette dargestellt werden. Wir nennen diese Fläche die Gegenfläche der vorgegebenen. In unserem Fall gehört sie ebenfalls zu den oben genannten Schichtflächen. Ist die Periode der Kette durch 8 teilbar, so sind beide Flächen entweder projektiv gleichwertig oder sie gehen auseinander beim Nullsystem eines linearen Komplexes hervor.

Ist die GODEAUX-Kette einer hyperbolisch gekrümmten Fläche geschlossen, so gehört die Gegenfläche stets dem M-System an. Noch nicht vollständig geklärt ist die Frage, bei welchen elliptisch gekrümmten Flächen dies der Fall ist; sie hängt zusammen mit einem Problem der algebraischen Zahlentheorie.

In § 9 bringen wir neben zusätzlichen Bemerkungen einige Beispiele. Der Mehrzahl der 24 Klassen gehören Projektivrotationsflächen an, in vielen Fällen sogar gewöhnliche Rotationsflächen, deren Meridiankurven mit doppeltperiodischen Funktionen zusammenhängen. Besonders einfache Beispiele liefert die Klasse der Koinzidenzflächen; diese sind gleichzeitig spezielle W-Flächen nach LIE und KLEIN und Tetraedralflächen. Jede Fläche mit der Gleichung

$$z = x^{\operatorname{tg} A}\, y^{\operatorname{tg} B}, \qquad A + B = \frac{\pi}{4}$$

ist Kongruenzfläche; ihre GODEAUX-Kette ist dann und nur dann geschlossen mit der Periode $4n$, wenn A ein ganzzahliges Vielfaches von $\pi/4n$ ist. Für $A = \pi/8$ gehört hierzu eine 1952 von M. CARTON angegebene Fläche, deren GODEAUX-Kette die Periode 8 hat[5]).

§ 1. Grundformeln.

Auf unserer nirgendwo parabolisch gekrümmten analytischen[6]) Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ seien u und v Asymptotenlinienparameter; ist die Fläche elliptisch gekrümmt, so richten wir sie so ein, daß sie in reellen Flächenpunkten konjugiert komplexe Werte haben. Wir normieren den Vektor $\mathfrak{x}$ so, daß die Determinante

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uv}) = \varkappa \quad [7]) \tag{3}$$

eine Konstante ist; unter unseren Voraussetzungen ist diese von Null verschieden; bei elliptisch gekrümmten Flächen sei sie reell.

Nach E. J. WILCZYNSKI gelten jetzt Ableitungsformeln von der Gestalt

$$\mathfrak{x}_{uu} = \beta \mathfrak{x}_v + \pi \mathfrak{x}, \qquad \mathfrak{x}_{vv} = \gamma \mathfrak{x}_u + \chi \mathfrak{x} \quad [8]). \tag{4}$$

Da bei den Regelflächen das Vierseit von DEMOULIN unbestimmt ist, können wir diese von der Betrachtung ausschließen; daher dürfen wir annehmen, daß

$$\beta \neq 0, \qquad \gamma \neq 0. \tag{5}$$

[5]) Vgl. auch BOL, G.: Arch. Math. 4, 61—74 (1953).

[6]) Es genügt auch achtmalige stetige Differenzierbarkeit.

[7]) Die Indizes u und v bedeuten Ableitungen.

[8]) Vgl. etwa BOL, G.: Projektive Differentialgeometrie, Bd. I, Göttingen 1950, Bd. II im Druck. Das Buch wird weiterhin „PD" zitiert.

Wenn die Größe $A(u, v)$ bei einer Transformation

$$u = f(u^*), \qquad v = g(v^*) \tag{6}$$

der Parameter ersetzt wird durch

$$A^* = A f'^m g'^n,$$

so nennen wir A eine Halbinvariante vom Gewicht (m, n). Wir schreiben vor, daß sich $\mathfrak{x}$ wie eine Halbinvariante vom Gewicht $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ verhalten soll. Die Beziehung (3) bleibt dann bei den Transformationen (4) erhalten und es ist $\varkappa^* = \varkappa$. β und γ sind halbinvariant, β hat das Gewicht $(2, -1)$, γ das Gewicht $(-1, 2)$.

Unter den halbinvarianten Ableitungen von A verstehen wir die Bildungen

$$A_1 = A_u + m \frac{\gamma_u}{\gamma} A, \qquad A_2 = A_v + n \frac{\beta_v}{\beta} A \text{ [9]}. \tag{7}$$

A_1 und A_2 sind wieder halbinvariant, A_1 hat das Gewicht $(m+1, n)$, A_2 das Gewicht $(m, n+1)$. Für diese Differentiation gelten die gewöhnliche Summen- und Produktregel, es ist aber

$$A_{12} - A_{21} = 2(m\sigma - n\tau) A \tag{8}$$

mit

$$\sigma = \tfrac{1}{2} (\log \gamma)_{uv}, \qquad \tau = \tfrac{1}{2} (\log \beta)_{uv}. \tag{9}$$

Auf Grund der Definition ist

$$\beta_2 = 0, \qquad \gamma_1 = 0. \tag{10}$$

Wählt man den Punkt $\mathfrak{y}$ geeignet, so haben jetzt die Ableitungsgleichungen der projektiven Flächentheorie die Gestalt

$$\begin{cases} \mathfrak{x}_{11} = \beta \mathfrak{x}_2 + L \mathfrak{x}, & \mathfrak{x}_{12} = \mathfrak{y} + P \mathfrak{x} \\ \mathfrak{x}_{21} = \mathfrak{y} + Q \mathfrak{x}, & \mathfrak{x}_{22} = \gamma \mathfrak{x}_1 + M \mathfrak{x} \\ \mathfrak{y}_1 = Q \mathfrak{x}_1 + L \mathfrak{x}_2 + \beta M \mathfrak{x}, & \mathfrak{y}_2 = M \mathfrak{x}_1 + P \mathfrak{x}_2 + \gamma L \mathfrak{x}. \end{cases} \tag{11}$$

Zwischen den Invarianten bestehen dabei die Beziehungen

$$P = \tfrac{1}{2} \beta\gamma - \sigma, \qquad Q = \tfrac{1}{2} \beta\gamma - \tau \tag{12}$$

$$L_2 = P_1, \qquad M_1 = Q_2 \tag{13}$$

$$\gamma L_1 = \beta M_2 \tag{14}$$

[10].

Wegen (5) und (14) können wir setzen

$$L_1 = 2\beta N, \qquad M_2 = 2\gamma N. \tag{15}$$

Die von den Punkten $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{21}$, bestimmte Gerade ist die von WILCZYNSKI angegebene Direktrix erster Art, $\mathfrak{y}$ ist ihr Schnittpunkt mit der LIE-Quadrik

[9] Vgl. PD II und BOL, G.: Comm. Math. Helv. 18, 129—153 (1945); weiterhin zitiert „CH".

[10] CH. Formeln (59) bis (63). Vgl. auch PD II.

an der betrachteten Flächenstelle. Die Direktrix zweiter Art verbindet die Punkte $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$. Wir sprechen auch von den Normalen erster und zweiter Art von WILCZYŃSKI.

Sämtliche vorkommenden Größen sind wieder halbinvariant, ihre Gewichte sind in der Tabelle (38) zusammengestellt.

Als Begleitvektoren der Fläche im Geradenraum verwenden wir die Vektoren

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{u} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1) & \mathfrak{v} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2) \\ \mathfrak{a} = \tfrac{1}{2}\,[(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) - (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)] & \mathfrak{b} = \tfrac{1}{2}\,[(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)] \\ \mathfrak{p} = (\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}) & \mathfrak{q} = (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}) \end{array}\right\}^{11}).$$

Bedeutet das Zeichen $\circ$ die Polarenbildung in bezug auf die absolute Quadrik $\boldsymbol{Q}$ des Geradenraumes, so daß der Vektor $\mathfrak{g}$ dann und nur dann eine Gerade darstellt, wenn

$$\mathfrak{g} \circ \mathfrak{g} = 0$$

und für 2 Geradenvektoren $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ und $(\mathfrak{c}, \mathfrak{d})$ gilt

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \circ (\mathfrak{c}, \mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}),$$

so ist nach (3)

$$(17)\qquad \mathfrak{a} \circ \mathfrak{a} = -\frac{\varkappa}{2}, \qquad \mathfrak{b} \circ \mathfrak{b} = \frac{\varkappa}{2}, \qquad \mathfrak{p} \circ \mathfrak{u} = \mathfrak{u} \circ \mathfrak{p} = \varkappa, \qquad \mathfrak{q} \circ \mathfrak{v} = \mathfrak{v} \circ \mathfrak{q} = -\varkappa,$$

während alle übrigen Produkte der Vektoren (16) verschwinden.

Für die Ableitungen der Vektoren (16) findet man nach (11)

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{u}_1 = \beta\,\mathfrak{v}, & \mathfrak{u}_2 = 2\,\mathfrak{a} \\ \mathfrak{v}_1 = 2\,\mathfrak{b}, & \mathfrak{v}_2 = \gamma\,\mathfrak{u} \\ \mathfrak{a}_1 = Q\,\mathfrak{u}, & \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{p} + M\,\mathfrak{u} \\ \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{q} + L\,\mathfrak{v}, & \mathfrak{b}_2 = P\,\mathfrak{v} \\ \mathfrak{p}_1 = 2Q\,\mathfrak{a} - \beta M\,\mathfrak{v}, & \mathfrak{p}_2 = \gamma\,\mathfrak{q} + 2M\,\mathfrak{a} - \gamma L\,\mathfrak{v} \\ \mathfrak{q}_1 = \beta\,\mathfrak{p} + 2L\,\mathfrak{b} - \beta M\,\mathfrak{u}, & \mathfrak{q}_2 = 2P\,\mathfrak{b} - \gamma L\,\mathfrak{u}. \end{array}\right.$$

Aus (18) folgt, daß

$$\ldots\,\mathfrak{b}, \mathfrak{v}, \mathfrak{u}, \mathfrak{a}, \ldots$$

4 aufeinanderfolgende Glieder der GODEAUX-Kette sind; so besagt $\mathfrak{u}_1 = \beta\,\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}_2 = \gamma\,\mathfrak{u}$, daß $\mathfrak{u}$ die LAPLACE-Transformierte von $\mathfrak{v}$ in der v-Richtung ist. Weiter liest man aus (18) ab, daß $\mathfrak{u}_2$ eine Linearkombination von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p} + M\,\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}_{-2}$ eine solche von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{q} + L\,\mathfrak{v}$ sein muß. Nun werden bekanntlich[10a]) die Kanten des Vierseits von DEMOULIN im Geradenraum dargestellt von den Schnittpunkten der Geraden $(\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2)$ und $(\mathfrak{v}_{-1}, \mathfrak{v}_{-2})$ mit $\boldsymbol{Q}$. Setzen wir also

$$(19)\qquad L = H^2, \qquad M = K^2,$$

---

11) Für die Bezeichnung vgl. man PD I, §§ 16—18.

10a) Vgl. G., p. 26.

so stellen die Vektoren

$$\mathfrak{p} \pm 2K\mathfrak{a} + M\mathfrak{u}, \qquad \mathfrak{q} \pm 2H\mathfrak{b} + L\mathfrak{v} \tag{20}$$

nach (17) die Kanten des Vierseits von DEMOULIN dar. Damit diese Kanten alle verschieden sind, müssen wir

$$L \neq 0, \qquad M \neq 0 \tag{21}$$

voraussetzen; dann ist auch $H \neq 0$, $K \neq 0$.

Die Diagonalen des Vierseits von DEMOULIN werden dargestellt von den Vektoren

$$H(\mathfrak{p} - M\mathfrak{u}) \pm K(\mathfrak{q} - L\mathfrak{v}), \tag{22}$$

die ebenfalls Geraden darstellen und zu sämtlichen 4 Vektoren (20) in bezug auf $\boldsymbol{Q}$ polar sind.

Nach (18) ist

$$\begin{cases} (\mathfrak{q} - L\mathfrak{v})_1 = \beta(\mathfrak{p} - M\mathfrak{u} - 2N\mathfrak{v}) \\ (\mathfrak{p} - M\mathfrak{u})_2 = \gamma(\mathfrak{q} - L\mathfrak{v} - 2N\mathfrak{u}). \end{cases} \tag{23}$$

Sollen nun sämtliche Diagonalen der Vierseite von DEMOULIN unserer Fläche einer linearen Kongruenz angehören, so müssen ihre Bildpunkte in einem festen linearen R_3 des R_5 liegen. Dieser enthält dann auch $\mathfrak{q} - L\mathfrak{v}$, $\mathfrak{p} - M\mathfrak{u}$ und die Ableitungen dieser Punkte. Wäre nun für unsere Fläche $N \neq 0$, so müßte dieser R_3 nach (22), (23) aufgespannt werden von den Punkten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$. Der von diesen Punkten aufgespannte R_3 ist aber nicht fest, denn er enthält beispielsweise nicht den Punkt $\mathfrak{u}_2 = 2\mathfrak{a}$.

Für unsere Kongruenzflächen ist also jedenfalls

$$N = 0. \tag{24}$$

Das bedeutet, wie man leicht einsieht, daß unsere Flächen spezielle Projektivminimalflächen sind. Denn die Geraden (20) erzeugen dann und nur dann Kongruenzen, deren Torsallinien auf der Fläche ein konjugiertes Netz bilden, wenn $N = 0$; diese Eigenschaft kennzeichnet aber nach einem bekannten Satze die Projektivminimalflächen[12]).

Nach (15) ist für unsere Flächen

$$L_1 = 0, \qquad M_2 = 0. \tag{25}$$

Daraus und aus (13) folgen nach (8), da L das Gewicht (2,0), M das Gewicht (0,2) hat, die Beziehungen

$$\begin{cases} -P_{11} = L_{12} - L_{21} = 4\sigma L = (2\beta\gamma - 4P)L \\ Q_{22} = M_{12} - M_{21} = -4\tau M = (4Q - 2\beta\gamma)M, \end{cases} \tag{26}$$

aus denen wegen (5), (21) hervorgeht, daß

$$P \neq 0, \qquad Q \neq 0. \tag{27}$$

[12]) Vgl. etwa THOMSEN, G.: Ann. di Mat. (4), 5, 169—184 (1928).

Wir können deshalb setzen

$$L_2 = P_1 = 2a\,P, \qquad M_1 = Q_2 = 2b\,Q, \tag{28}$$

$$\gamma L = -\,P\,c, \qquad \beta M = -\,Q\,d, \tag{29}$$

wobei wegen (5), (21)

$$c \neq 0, \qquad d \neq 0 \tag{30}$$

gilt, und finden aus (26) und durch Differentiation von (29), daß

$$\begin{cases} a_1 = \beta c + 2(L - a^2), & b_2 = \gamma d + 2(M - b^2) \\ c_1 = -\,2a\,c, & d_2 = -\,2b\,d. \end{cases} \tag{31}$$

Nach (18) und wegen (28), (29) ist

$$\begin{cases} (\mathfrak{p} - M\,\mathfrak{u})_1 = 2Q(\mathfrak{a} - b\,\mathfrak{u} + d\,\mathfrak{v}) \\ (\mathfrak{q} - L\,\mathfrak{v})_2 = 2P(\mathfrak{b} + c\,\mathfrak{u} - a\,\mathfrak{v}). \end{cases} \tag{32}$$

Der lineare R_3, der die Bildpunkte der Diagonalen der Vierseite von DEMOULIN unserer Fläche enthält, wird deshalb aufgespannt von den Punkten

$$\begin{cases} \mathfrak{c} = \mathfrak{p} - M\,\mathfrak{u}, & \mathfrak{e} = \mathfrak{a} - b\,\mathfrak{u} + d\,\mathfrak{v} \\ \mathfrak{d} = \mathfrak{q} - L\,\mathfrak{v}, & \mathfrak{f} = \mathfrak{b} + c\,\mathfrak{u} - a\,\mathfrak{v}. \end{cases} \tag{33}$$

Damit dieser R_3 fest ist, muß er auch die Ableitungen der Punkte (33) enthalten. Man findet

$$\begin{cases} \mathfrak{e}_1 = 2d\,\mathfrak{d} + (Q - b_1)\,\mathfrak{u} + (d_1 - \beta b)\,\mathfrak{v} \\ \mathfrak{f}_2 = 2c\,\mathfrak{a} + (c_2 - \gamma a)\,\mathfrak{u} + (P - a_2)\,\mathfrak{v}. \end{cases} \tag{34}$$

Die Vektoren auf der rechten Seite lassen sich nur dann aus den Vektoren (33) linear kombinieren, wenn

$$\begin{cases} b_1 = Q - 2c\,d, & a_2 = P - 2c\,d \\ d_1 = \beta b - 2a\,d, & c_2 = \gamma a - 2b\,c. \end{cases} \tag{35}$$

Diese Bedingungen sind aber auch hinreichend. Denn gelten sie, so ergeben sich für die Vektoren (33) die Ableitungsgleichungen

$$\begin{cases} \mathfrak{c}_1 = 2Q\,\mathfrak{e}, & \mathfrak{c}_2 = \gamma\,\mathfrak{d} \\ \mathfrak{d}_1 = \beta\,\mathfrak{c}, & \mathfrak{d}_2 = 2P \\ \mathfrak{e}_1 = 2d\,\mathfrak{f}, & \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{c} - 2b\,\mathfrak{e} \\ \mathfrak{f}_1 = \mathfrak{d} - 2a\,\mathfrak{f}, & \mathfrak{f}_2 = 2c\,\mathfrak{e}, \end{cases} \tag{36}$$

also sind sämtliche Ableitungen der Vektoren (33) Linearkombinationen dieser Vektoren selbst. Nach einem bekannten Satze[13]) folgt aber daraus, daß der von unseren Vektoren aufgespannte lineare Raum von u und v nicht abhängt.

[13]) Vgl. etwa PD I, § 13, Aufg. 3.

Man prüft nun leicht nach, daß die Integrierbarkeitsbedingungen, die nach (8) aus (31) und (35) hervorgehen, auf Grund dieser Gleichungen selbst und von (10), (25), (28), (29) stets befriedigt sind. Eliminiert man daher P und Q mittels (29) aus den Gleichungen (25), (28), (31), (35) und den aus (9), (12) folgenden

$$(37) \qquad (\log\gamma)_{uv} = \beta\gamma - 2P, \qquad (\log\beta)_{uv} = \beta\gamma - 2Q,$$

so ist das entstehende System von partiellen Differentialgleichungen für die Größen β, γ, L, M, a, b, c, d in Involution. Da man etwa $\beta(0, v)$, $\beta(u, 0)$, $\gamma(0, v)$, $\gamma(u, 0)$ und die Werte von L, M, a, b, c, d in $(0, 0)$ beliebig vorgeben kann, hängen die Lösungen dieses Systems von 4 beliebigen Funktionen einer Veränderlichen ab. Da noch Parametertransformationen (6) möglich sind, die zwar die Lösung des Systems, aber nicht die Fläche ändern, findet man:

Die Kongruenzflächen hängen von zwei beliebigen Funktionen einer Veränderlichen ab.

Stellen wir noch die Gewichte der vorkommenden Größen in einer Tabelle zusammen:

(38)

$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{y}$	β	γ	P	Q	L	M	N	a	b	c	d	$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{v}$	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{q}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{e}$	$\mathfrak{f}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	−1	1	1	2	0	1	1	0	0	1	0	−1	0	0	0	1	0	1	0	0
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1	2	1	1	0	2	1	0	1	1	0	−1	0	0	0	1	0	1	0	0	0

Die obere Zahl ist die erste Gewichtszahl, die untere die zweite.

Sämtliche Formeln bleiben richtig bei den aus der folgenden Tabelle hervorgehenden Vertauschungen, die eine Vertauschung der beiden Scharen von Asymptotenlinien bedeuten:

$$(39) \qquad \begin{pmatrix} u & 1 & \beta & P & L & a & c & \mathfrak{u} & \mathfrak{a} & \mathfrak{p} & \mathfrak{c} & \mathfrak{e} \\ v & 2 & \gamma & Q & M & b & d & \mathfrak{v} & \mathfrak{b} & \mathfrak{q} & \mathfrak{d} & \mathfrak{f} \end{pmatrix}$$

Bei einer elliptisch gekrümmten Fläche ist hier jedes Paar übereinanderstehender Größen konjugiert komplex.

Die zu dem R_3 durch $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ in bezug auf $\mathfrak{Q}$ polare Gerade $\mathfrak{g}$ des R_5 wird aufgespannt von den Punkten

$$(40) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \mathfrak{p} + M\,\mathfrak{u} - 2b\,\mathfrak{a} - 2c\,\mathfrak{b} \\ \mathfrak{y} = \mathfrak{q} + L\,\mathfrak{v} - 2d\,\mathfrak{a} - 2a\,\mathfrak{b}. \end{cases}$$

Man prüft leicht nach, daß für sie die Ableitungsgleichungen gelten:

$$(41) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x}_1 = -2c\,\mathfrak{y}, & \mathfrak{x}_2 = \gamma\,\mathfrak{y} - 2b\,\mathfrak{x}. \\ \mathfrak{y}_1 = \beta\,\mathfrak{x} - 2a\,\mathfrak{y}, & \mathfrak{y}_2 = -2d\,\mathfrak{x}. \end{cases}$$

Sie bestätigen, daß $\mathfrak{g}$ eine feste Gerade des R_5 ist; ihre Schnittpunkte mit $\mathfrak{Q}$ stellen die Leitgeraden dar von der linearen Kongruenz K, der die Diagonalen der Vierseite von DEMOULIN der Fläche angehören.

Der Punkt $\lambda\,\mathfrak{x} + \mu\,\mathfrak{s}$ liegt nach (17) dann und nur dann auf $\boldsymbol{Q}$, wenn

$$(42) \qquad (M - b^2 + c^2)\,\lambda^2 + 2(a\,c - b\,d)\,\lambda\,\mu - (L - a^2 + d^2)\,\mu^2 = 0.$$

Man sieht daraus, daß die Kongruenz K sowohl elliptisch als auch hyperbolisch oder parabolisch sein kann. Denn die Anfangswerte des oben diskutierten Gleichungssystems lassen sich so wählen, daß die Diskriminante von (42) positiv, negativ oder gleich Null ausfällt.

Wählt man diese Anfangswerte so, daß in (42) sämtliche Koeffizienten verschwinden, so erhält man Flächen, bei denen die Kongruenz K singulär ist; sie besteht dann aus den Geraden durch einen festen Punkt P und den Geraden in einer festen Ebene E, wobei P in E liegt. Im Geradenraum schneidet der R_3, der K darstellt, $\boldsymbol{Q}$ in zwei Ebenen; $\boldsymbol{g}$ ist die Schnittgerade dieser Ebenen und stellt das Geradenbüschel durch P in E dar.

§ 2. Die Gruppe der GODEAUX-Kette.

Die Formeln (36) besagen, daß die Flächen $\mathfrak{c}(u, v)$, $\mathfrak{d}(u, v)$, $\mathfrak{f}(u, v)$, $\mathfrak{e}(u, v)$ in dieser Reihenfolge in bezug auf u, v eine geschlossene LAPLACE-Kette der Periode 4 bilden. Der Punkt $\mathfrak{e}$ liegt in der Ebene durch die zu den gleichen Parameterwerten gehörigen Punkte $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{a}$ der GODEAUX-Kette. Nach einem bekannten Satze, den wir in unserem Falle bestätigen werden, liegt dann der nächste Punkt $\mathfrak{c}$ in der Ebene durch $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{u}_2$, und das geht so weiter. In diesem Sinne windet sich also die GODEAUX-Kette um die neue geschlossene Kette herum.

Nehmen wir dies vorweg, so können wir für die Flächen der GODEAUX-Kette eine Rekursionsformel der Gestalt

$$(44) \qquad \mathfrak{u}_m = \mathfrak{v}_m + g_m\,\mathfrak{u}_{m-2} + h_m\,\mathfrak{u}_{m-1}$$

ansetzen, wobei $\mathfrak{v}_m$ einer der Vektoren $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ ist. Nun prüft man leicht nach, daß

$$\mathfrak{p} + M\,\mathfrak{u} - 2b\,\mathfrak{a}$$

das auf $\mathfrak{a}$ folgende Glied der GODEAUX-Kette in der v-Richtung ist, denn es ist

$$\mathfrak{a}_2 = (\mathfrak{p} + M\,\mathfrak{u} - 2b\,\mathfrak{a}) + 2b\,\mathfrak{a}, \qquad (\mathfrak{p} + M\,\mathfrak{u} - 2b\,\mathfrak{a})_1 = 4c\,d\,\mathfrak{a}.$$

Ebenso ist

$$\mathfrak{q} + L\,\mathfrak{v} - 2a\,\mathfrak{b}$$

das auf $\mathfrak{b}$ folgende Glied in der u-Richtung.

Die Vektoren $\mathfrak{u}_{-1}, \mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2$ sind daher (44) entsprechend normiert, wenn wir

$$(45) \qquad \mathfrak{u}_{-1} = -2L\,\mathfrak{v}, \qquad \mathfrak{u}_0 = c\,\mathfrak{u}, \qquad \mathfrak{u}_1 = \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{u}_2 = \mathfrak{p} + M\,\mathfrak{u} - 2b\,\mathfrak{a}$$

setzen. Damit wird

$$(46) \qquad \begin{cases} \mathfrak{u}_1 = \mathfrak{c} + \tfrac{1}{2}L^{-1}d\,\mathfrak{u}_{-1} + b\,c^{-1}\,\mathfrak{u}_0, \\ \mathfrak{u}_2 = \mathfrak{c} + 2M\,c^{-1}\,\mathfrak{u}_0 - 2b\,\mathfrak{u}_1 \end{cases}$$

und

$$(47)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{u}_1)_1 = Q c^{-1} \mathfrak{u}_0, & (\mathfrak{u}_0)_2 = 2c\,\mathfrak{u}_1 + \frac{c_2}{c}\,\mathfrak{u}_0, \\ (\mathfrak{u}_2)_1 = 4c\,d\,\mathfrak{u}_1, & (\mathfrak{u}_1)_2 = \mathfrak{u}_2 + 2b\,\mathfrak{u}_1. \end{cases}$$

Aus dem Ansatz

$$\mathfrak{u}_3 = \mathfrak{d} + g_3\,\mathfrak{u}_1 + h_3\,\mathfrak{u}_2$$

folgt jetzt nach (36), (47), wenn wir $\mathfrak{c}$ mittels (46) ersetzen:

$$(\mathfrak{u}_3)_1 = \beta(\mathfrak{u}_2 - 2M c^{-1}\mathfrak{u}_0 + 2b\,\mathfrak{u}_1) + Q c^{-1} g_3\,\mathfrak{u}_0 + 4c\,d\,h_3\,\mathfrak{u}_1 + (g_3)_1\,\mathfrak{u}_1 + (h_3)_1\,\mathfrak{u}_2.$$

Es wird also $(\mathfrak{u}_3)_1$ eine Linearkombination von $\mathfrak{u}_2$ und $\mathfrak{u}_3$, wie es sein soll, wenn wir g_3 und h_3 bestimmen aus

$$-2\beta M c^{-1} + Q c^{-1} g_3 = 0, \qquad 2b\beta + 4c\,d\,h_3 + (g_3)_1 = 0.$$

Daraus finden wir

$$g_3 = -2d, \qquad h_3 = -a c^{-1},$$

also

$$(48)\qquad \mathfrak{u}_3 = \mathfrak{d} - 2d\,\mathfrak{u}_1 - a c^{-1}\mathfrak{u}_2.$$

Da für diesen Vektor nach (46), (47), (36)

$$(49)\qquad (\mathfrak{u}_3)_1 = -2L c^{-1}\mathfrak{u}_2, \qquad (\mathfrak{u}_2)_2 = \gamma\,\mathfrak{u}_3 + \frac{c_2}{c}\,\mathfrak{u}_2,$$

stellt er wirklich die LAPLACE-Transformierte von $\mathfrak{u}_2$ in der v-Richtung dar.

Die nächsten Schritte liefern in der gleichen Weise

$$(50)\qquad \begin{cases} \mathfrak{u}_4 = \mathfrak{f} - \frac{1}{2c}\,\mathfrak{u}_2 - \frac{a}{2L}\,\mathfrak{u}_3, \\ \mathfrak{u}_5 = \mathfrak{e} + \frac{d}{2L}\,\mathfrak{u}_3 + \frac{b}{c}\,\mathfrak{u}_4, \end{cases}$$

$$(51)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{u}_4)_1 = -\frac{\beta c}{2L}\,\mathfrak{u}_3 - 2a\,\mathfrak{u}_4, & (\mathfrak{u}_3)_2 = 2P\left(\mathfrak{u}_4 + \frac{a}{L}\,\mathfrak{u}_3\right), \\ (\mathfrak{u}_5)_1 = Q c^{-1}\mathfrak{u}_4, & (\mathfrak{u}_4)_2 = 2c\,\mathfrak{u}_5 + \frac{c_2}{c}\,\mathfrak{u}_4. \end{cases}$$

Wie man sieht, treten nach 4 Schritten die gleichen Koeffizienten wieder auf. Jetzt bestätigt man leicht durch Induktion nach k, daß allgemein

$$(52)\qquad \begin{cases} \mathfrak{u}_{4k+1} = \mathfrak{e} + \frac{d}{2L}\,\mathfrak{u}_{4k-1} + \frac{b}{c}\,\mathfrak{u}_{4k}, \\ \mathfrak{u}_{4k+2} = \mathfrak{c} + \frac{2M}{c}\,\mathfrak{u}_{4k} - 2b\,\mathfrak{u}_{4k+1}, \\ \mathfrak{u}_{4k+3} = \mathfrak{d} - 2d\,\mathfrak{u}_{4k+1} - \frac{a}{c}\,\mathfrak{u}_{4k+2}, \\ \mathfrak{u}_{4k+4} = \mathfrak{f} - \frac{1}{2c}\,\mathfrak{u}_{4k+2} - \frac{a}{2L}\,\mathfrak{u}_{4k+3}, \end{cases}$$

$$(53)\quad \begin{cases} (\mathfrak{u}_{4k+1})_1 = \frac{Q}{c}\,\mathfrak{u}_{4k}, & (\mathfrak{u}_{4k+1})_2 = \mathfrak{u}_{4k+2} + 2b\,\mathfrak{u}_{4k+1}, \\ (\mathfrak{u}_{4k+2})_1 = 4cd\,\mathfrak{u}_{4k+1}, & (\mathfrak{u}_{4k+2})_2 = \gamma\,\mathfrak{u}_{4k+3} + \frac{c_2}{c}\,\mathfrak{u}_{4k+2}, \\ (\mathfrak{u}_{4k+3})_1 = -\frac{2L}{c}\,\mathfrak{u}_{4k+2}, & (\mathfrak{u}_{4k+3})_2 = 2P\left(\frac{a}{L}\,\mathfrak{u}_{4k+3} + \mathfrak{u}_{4k+4}\right) \\ (\mathfrak{u}_{4k+4})_1 = -\frac{\beta c}{2L}\,\mathfrak{u}_{4k+3} - 2a\,\mathfrak{u}_{4k+4}, & (\mathfrak{u}_{4k+4})_2 = 2c\,\mathfrak{u}_{4k+5} + \frac{c_2}{c}\,\mathfrak{u}_{4k+4}, \end{cases}$$

und zwar sowohl für positive als für negative k[14]).

(52) besagt offenbar, daß in (44)

$$(54)\qquad \mathfrak{v}_{m+4} = \mathfrak{v}_m, \qquad g_{m+4} = g_m, \qquad h_{m+4} = h_m.$$

Aus (52) folgt, daß an jeder Flächenstelle die Vektoren $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{u}_n, \mathfrak{u}_{n+1}$ für jedes n linear unabhängig sind. Würden sie nämlich in einer Hyperebene liegen, so müßte diese sämtliche $\mathfrak{u}_m$ enthalten, und damit wegen (53) auch ihre Ableitungen. Die Flächen der GODEAUX-Kette würden dann sämtlich in dieser Hyperebene liegen. Das ist aber nicht möglich; beispielsweise gehören niemals sämtliche Schmiegtangenten einer Schar einer Fläche, die nicht Regelfläche ist, einem linearen Komplex an.

Für die Vektoren

$$(55)\qquad \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{u}_{4k+1}, \mathfrak{u}_{4k+2}$$

gelten die Ableitungsgleichungen (36) und

$$(56)\quad \begin{cases} (\mathfrak{u}_{4k+1})_1 = \frac{Q}{2M}\,(\mathfrak{u}_{4k+2} - \mathfrak{c} + 2b\,\mathfrak{u}_{4k+1}), \\ (\mathfrak{u}_{4k+2})_1 = 4cd\,\mathfrak{u}_{4k+1}, \end{cases}$$

$$(57)\quad \begin{cases} (\mathfrak{u}_{4k+1})_2 = \mathfrak{u}_{4k+2} + 2b\,\mathfrak{u}_{4k+1}, \\ (\mathfrak{u}_{4k+2})_2 = \frac{c_2}{c}\,\mathfrak{u}_{4k+2} + \gamma\left(\mathfrak{d} - 2d\,\mathfrak{u}_{4k+1} - \frac{a}{c}\,\mathfrak{u}_{4k+2}\right). \end{cases}$$

Hierin sind die Koeffizienten von k unabhängig. Es gibt daher eine von u, v unabhängige Projektivität π des R_5 in sich, die die Vektoren (55) der Reihe nach abbildet auf die zu den gleichen Parameterwerten gehörigen

$$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{u}_{4k+5}, \mathfrak{u}_{4k+6}.$$

Aus (52) folgt, daß π jeden Vektor $\mathfrak{u}_n$ auf $\mathfrak{u}_{n+4}$ abbildet.

Bei jeder Kongruenzfläche gestattet daher die GODEAUX-*Kette eine im allgemeinen unendliche zyklische Gruppe $\mathfrak{Z}$ von Projektivitäten des R_5 in sich, die von der Abbildung π erzeugt wird.*

[14]) Für positive k genügt nach einem weiteren Schritt der Hinweis, daß bei der Herleitung nur die Koeffizienten in (46), (47) verwendet wurden, so daß diese sich dauernd weiter reproduzieren müssen. Für negative k beachte man, daß sich die $\mathfrak{u}_{-n}$ mittels (52) eindeutig rekursiv definieren lassen.

Wir zeigen weiter:

Die GODEAUX*-Kette unserer Fläche ist dann und nur dann geschlossen, wenn die Gruppe* $\mathfrak{Z}$ *endlich ist; ist ihre Ordnung* n*, so hat die* GODEAUX*-Kette genau* $4n$ *verschiedene Glieder.*

Daß die GODEAUX-Kette geschlossen ist, wenn $\pi^n = E$, ist evident, denn in diesem Fall ist

$$\mathfrak{u}_{m+4n} = \mathfrak{u}_m. \tag{58}$$

Ist umgekehrt die GODEAUX-Kette geschlossen, so muß ihre Periode durch 4 teilbar sein. Andernfalls würde sich nämlich nach einem Umlauf ergeben, daß nicht nur $\mathfrak{c}$, sondern auch einer der Punkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{d}$ in der Ebene durch $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}$ liegen müßte, was offenbar nicht zutrifft.

Ist $4n$ die Periode, so kann man zunächst nur folgern, daß

$$\mathfrak{u}_{m+4n} = \varrho_m \mathfrak{u}_m$$

mit von 0 verschiedenen Ortsfunktionen $\varrho_m(u, v)$. Setzt man dies ein in die wegen (44), (54) gültige Gleichung

$$\mathfrak{u}_{m+4n} = \mathfrak{v}_m + g_m \mathfrak{u}_{m+4n-2} + h_m \mathfrak{u}_{m+4n-1},$$

so findet man

$$\varrho_m \mathfrak{u}_m = \mathfrak{v}_m + g_m \varrho_{m-2} \mathfrak{u}_{m-2} + h_m \varrho_{m-1} \mathfrak{u}_{m-1}$$

und daraus durch Vergleich mit (44)

$$(\varrho_m - 1)\,\mathfrak{u}_m = g_m(\varrho_{m-2} - 1)\,\mathfrak{u}_{m-2} + h_m(\varrho_{m-1} - 1)\,\mathfrak{u}_{m-1}.$$

Da aber nicht 3 aufeinanderfolgende Glieder der GODEAUX-Kette an jeder Flächenstelle auf einer Geraden liegen können, folgt daraus, daß alle ϱ_m den Wert 1 haben. Also gilt (58) und damit

$$\pi^n = E \tag{59}$$

wie behauptet wurde.

Wir wollen dieses Ergebnis noch etwas erweitern. Dazu setzen wir

$$\mathfrak{w}_m = \mathfrak{u}_{m+4} - \mathfrak{u}_m. \tag{60}$$

Aus (44), (54) folgt dann

$$\mathfrak{w}_m = g_m \mathfrak{w}_{m-2} + h_m \mathfrak{w}_{m-1}. \tag{61}$$

Die Punkte $\mathfrak{w}_m$ liegen daher auf einer Geraden. Wir wollen zeigen, daß diese die schon in § 1 erwähnte Polare $\boldsymbol{g}$ des linearen Raumes $\boldsymbol{G}$ durch $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ in bezug auf $\boldsymbol{Q}$ ist.

Nach Anwendung von (52) auf $\mathfrak{u}_0$ und $\mathfrak{u}_{-1}$ findet man nämlich unter Verwendung von (45)

$$\mathfrak{u}_{-2} = 2c\,\mathfrak{d}, \qquad \mathfrak{u}_{-3} = \frac{1}{2d}(\mathfrak{q} + L\,\mathfrak{v} - 2a\,\mathfrak{d}) \tag{62}$$

und daraus nach (40)

$$\mathfrak{w}_{-2} = \mathfrak{r}, \qquad \mathfrak{w}_{-3} = -\frac{1}{2d}\mathfrak{s}. \tag{63}$$

Darin ist die Behauptung enthalten, denn $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{F}$ spannen nach § 1 die Gerade $\boldsymbol{g}$ auf.

Nach (44), (54) ist

$$\pi\,\mathfrak{w}_m = \mathfrak{w}_{m+4}, \tag{64}$$

die Projektivität π induziert also eine Projektivität von $\boldsymbol{g}$ in sich, die wir mit $\pi_{\boldsymbol{g}}$ bezeichnen.

Die Bedingung (58) ist offenbar gleichbedeutend mit

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \pi_{\boldsymbol{g}}^{\nu}\,\mathfrak{w}_m = 0. \tag{65}$$

$\pi_{\boldsymbol{g}}^{0} = E$ soll dabei die zweizeilige Einheitsmatrix darstellen. Da die Vektoren $\mathfrak{w}_m$ nach (63) nicht alle proportional sind, ist (65) gleichwertig mit

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \pi_{\boldsymbol{g}}^{\nu} = 0. \tag{66}$$

Durch Multiplikation mit $\pi_{\boldsymbol{g}} - E$ kann man aus (66) die Beziehung

$$\pi_{\boldsymbol{g}}^{n} = E \tag{67}$$

folgern, die auch aus (59) hervorgeht. (66) besagt aber mehr. Aus (67) folgt nämlich, daß sich die Matrix $\pi_{\boldsymbol{g}}$ auf eine Normalgestalt der Form

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix} \tag{68}$$

transformieren läßt, in der ξ_1 und ξ_2 n-te Einheitswurzeln sind[15]). Die Matrix (68) genügt aber nur dann auch (66), wenn diese Einheitswurzeln von 1 verschieden sind. Wir können daraus den Satz folgern:

Wenn die GODEAUX-*Kette einer Kongruenzfläche geschlossen ist mit der Periode* $4n$, *so ist die zugehörige Kongruenz K nicht parabolisch.*

Diese Kongruenz ist nämlich genau dann parabolisch, wenn $\boldsymbol{g}$ die Quadrik $\boldsymbol{Q}$ berührt, also wenn $\boldsymbol{g}$ den polaren Raum $\boldsymbol{G}$ durch $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ trifft. Der Schnittpunkt bleibt bei π fest, er ist also Eigenvektor von $\pi_{\boldsymbol{g}}$ zum Eigenwert 1! Wir haben aber eben gesehen, daß die Eigenwerte von $\pi_{\boldsymbol{g}}$ von 1 verschieden sind, wenn die GODEAUX-Kette geschlossen ist.

Die GODEAUX-*Kette einer Kongruenzfläche ist dann und nur dann geschlossen mit der Periode* $4n$, *wenn* $\pi_{\boldsymbol{g}}$ *der Bedingung* (66) *genügt.*

Aus (66) folgt nämlich (67); da 1 nicht Wurzel der charakteristischen Gleichung von $\pi_{\boldsymbol{g}}$ ist, sind $\boldsymbol{g}$ und der Raum $\boldsymbol{G}$ windschief und es folgt (59). Die Bedingung ist daher auch hinreichend.

Es ist jetzt nicht mehr schwer, die Bedingungen anzugeben, die zwischen den Invarianten einer Kongruenzfläche bestehen müssen, damit ihre GODEAUX-Kette geschlossen ist und die Periode $4n$ hat.

[15]) Bekanntlich hat die JORDANsche Normalform einer zweizeiligen Matrix entweder Diagonalgestalt oder sie hat die Form $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Von der letzten Matrix ist aber keine Potenz die Einheitsmatrix.

Zunächst folgt nämlich aus (52), (60) daß

$$(69)\quad \begin{cases} \mathfrak{w}_{-1} = -2d\,\mathfrak{w}_{-3} - \frac{a}{c}\,\mathfrak{w}_{-2}, & \mathfrak{w}_1 = \frac{d}{2L}\,\mathfrak{w}_{-1} + \frac{b}{c}\,\mathfrak{w}_0 \\ \mathfrak{w}_0 = \frac{a\,d}{L}\,\mathfrak{w}_{-3} + \frac{a^2 - L}{2Lc}\,\mathfrak{w}_{-2}, & \mathfrak{w}_2 = -\frac{b\,d}{L}\,\mathfrak{w}_{-1} + \frac{2(M-b^2)}{c}\,\mathfrak{w}_0. \end{cases}$$

Setzen wir also

$$(70)\qquad S = \begin{pmatrix} \frac{d}{2L} & \frac{b}{c} \\ -\frac{b\,d}{L} & \frac{2(M-b^2)}{c} \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} -2d & -\frac{a}{c} \\ \frac{a\,d}{L} & \frac{a^2-L}{2Lc} \end{pmatrix},$$

so ist bei Verwendung von $\mathfrak{w}_{-3}$ und $\mathfrak{w}_{-2}$ als Basisvektoren

$$(71)\quad \pi_g = S\,T = \frac{1}{L\,c^2}\begin{pmatrix} A\,c\,d & \frac{1}{2}(a\,A - b\,L) \\ -2c\,d\,(b\,A - a\,M) & -a\,b\,A + L\,b^2 + M\,a^2 - L\,M) \end{pmatrix},$$

wobei wir zur Abkürzung

$$(72)\qquad A = a\,b - c\,d$$

gesetzt haben.

Es sind also die Bedingungen dafür aufzustellen, daß sich die Matrix (71) auf die Gestalt (68) transformieren läßt. Wir unterscheiden 2 Fälle:

A: $\xi_1 = \xi_2$. π_g ist hier ein Vielfaches der Einheitsmatrix, und das gilt bei jeder Wahl der Basisvektoren. Jedenfalls ist also

$$(73)\qquad a\,A - b\,L = 0, \qquad b\,A - a\,M = 0.$$

Hieraus folgt aber schon, wie man leicht nachprüft, daß die Diagonalglieder in (71) gleich sind[16]).

Wenn also neben (73) *die Bedingung erfüllt ist*

$$(74)\qquad A\,d = L\,c\,e^{\frac{2\pi i\nu}{n}}$$

mit zu n teilerfremdem ν, so ist die GODEAUX-*Kette geschlossen und hat genau* $4n$ *Glieder.*

B: $\xi_1 \neq \xi_2$. Hier genügt es, wenn die charakteristische Gleichung

$$(75)\qquad |\pi_g - \xi\,E| = 0$$

oder

$$(76)\qquad \xi^2 - p\,\xi + q = 0$$

der Matrix (71) die Wurzeln ξ_1 und ξ_2 hat.

[16]) Das sieht man sofort, wenn etwa $a \neq 0$. Ist $a = 0$, so ist wegen $L \neq 0$ auch $b = 0$, aus (31), (35) folgt dann $P = Q = 2c\,d$, $\beta\,c + 2L = 0$, $\gamma\,d + 2M = 0$ und daraus mittels (29) die Behauptung.

p und q sind die Spur und die Determinante der Matrix π_g, da nach (70)

$$|S| = \frac{M\,d}{L\,c}, \qquad |T| = \frac{d}{c} \tag{77}$$

finden wir

$$p = \frac{1}{L\,c^2}\,(-A^2 + L\,b^2 + M\,a^2 - L\,M), \qquad q = \frac{M\,d^2}{L\,c^2}. \tag{78}$$

Die GODEAUX-*Kette ist also geschlossen mit der Periode* $4n$, *wenn für diese Invarianten gilt*

$$p = \xi_1 + \xi_2, \qquad q = \xi_1\,\xi_2 \tag{79}$$

mit zwei von 1 *verschiedenen n-ten Einheitswurzeln* ξ_1 *und* ξ_2.

Da die Normalgestalt der Matrix π_g vom Ort auf der Fläche unabhängig ist, genügt es, wenn die Bedingungen (73) und (74) oder (79) an einer Stelle auf der Fläche befriedigt sind; sie gelten dann überall[17]). Richtet man daher die Anfangswerte des in § 1 diskutierten Systems von Differentialgleichungen so ein, daß solche Bedingungen erfüllt sind, so hat die zur Lösung gehörige Fläche eine geschlossene GODEAUX-Kette.

Gibt man also ξ_1 *und* ξ_2 *vor, so hängt die zugehörige Klasse von Kongruenzflächen mit geschlossener* GODEAUX-*Kette der Periode* $4n$ *von zwei beliebigen Funktionen einer Veränderlichen ab.*

Werfen wir noch einen Blick auf die Realitätsverhältnisse. Bei hyperbolisch gekrümmten Flächen sind die Wurzeln von (76) entweder reell oder konjugiert komplex. Fall A kann hier also nur auftreten für $n = 2$. Im Falle B hat man

$$\xi_1 = e^{\frac{2\pi i\nu}{n}}, \qquad \xi_2 = e^{-\frac{2\pi i\nu}{n}} \tag{80}$$

mit zu n teilerfremdem ν. Nach (78), (79) führt das auf die Bedingungen

$$M\,d^2 = L\,c^2, \qquad -A^2 + L\,b^2 + M\,a^2 - L\,M = 2L\,c^2\cos\frac{2\pi\nu}{n}. \tag{81}$$

Für elliptisch gekrümmte Flächen können ξ_1 und ξ_2 beliebig gewählt werden; im Fall B gelten hier, wenn wir

$$\xi_1 = e^{\frac{2\pi i\nu_1}{n}}, \qquad \xi_2 = e^{\frac{2\pi i\nu_2}{n}} \tag{82}$$

setzen, Bedingungen der Form

$$\begin{cases} L\,c^2 = \varrho\,e^{-\frac{\pi(\nu_1+\nu_2)i}{n}}, \qquad M\,d^2 = \varrho\,e^{\frac{\pi(\nu_1+\nu_2)i}{n}}, \\ -A^2 + L\,b^2 + M\,a^2 - L\,M = 2\varrho\cos\frac{(\nu_1-\nu_2)\pi}{n} \end{cases} \tag{83}$$

mit reellem von Null verschiedenem $\varrho(u, v)$.

[17]) Das läßt sich auch leicht mittels der Gleichungen aus § 1 verifizieren; insbesondere sind p und q Konstanten.

§ 3. M-Transformation.

Die Punkte

$$(84)\qquad \begin{cases} \mathfrak{z}_0 = \mathfrak{y} + K\mathfrak{x}_1 + H\mathfrak{x}_2 + HK\mathfrak{x}, \\ \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{y} + K\mathfrak{x}_1 - H\mathfrak{x}_2 - HK\mathfrak{x}, \\ \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{y} - K\mathfrak{x}_1 + H\mathfrak{x}_2 - HK\mathfrak{x}, \\ \mathfrak{z}_3 = \mathfrak{y} - K\mathfrak{x}_1 - H\mathfrak{x}_2 + HK\mathfrak{x} \end{cases}$$

sind die Ecken des Vierseits von DEMOULIN unserer Fläche, die Geraden $(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_1)$, $(\mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3)$; $(\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_2)$, $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_3)$ die Kanten dieses Vierseits; denn aus (84) folgt nach (16)

$$(85)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_1) = 2H(\mathfrak{p} + 2K\mathfrak{a} + M\mathfrak{u}), & (\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_2) = 2K(\mathfrak{q} + 2H\mathfrak{b} + L\mathfrak{v}), \\ (\mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3) = 2H(\mathfrak{p} - 2K\mathfrak{a} + M\mathfrak{u}), & (\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_3) = 2K(\mathfrak{q} - 2H\mathfrak{b} + L\mathfrak{v}). \end{cases}$$

Wir wollen die vom Punkte $\mathfrak{z}_0$ erzeugte Hüllfläche der LIE-Quadriken unserer Fläche untersuchen; statt $\mathfrak{z}_0$ schreiben wir dabei der Kürze halber $\mathfrak{z}$. Obwohl die Rechnung sich im Prinzip für beliebige Projektivminimalflächen genau so führen ließe, wollen wir der Einfachheit halber gleich von vornherein voraussetzen, daß unsere Fläche eine Kongruenzfläche ist.

Nach (25), (28) ist

$$(86)\qquad H_1 = K_2 = 0, \qquad H_2 = a\,P\,H^{-1}, \qquad K_1 = b\,Q\,K^{-1},$$

wir finden daher

$$(87)\qquad \begin{cases} \mathfrak{z}_1 = H\mathfrak{z} + Q\,K^{-1}[(K+b)(\mathfrak{x}_1 + H\mathfrak{x}) - d(\mathfrak{x}_2 + K\mathfrak{x})], \\ \mathfrak{z}_2 = K\mathfrak{z} + P\,H^{-1}[-c(\mathfrak{x}_1 + H\mathfrak{x}) + (H+a)(\mathfrak{x}_2 + K\mathfrak{x})]. \end{cases}$$

Aus (84), (87) folgt

$$(88)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1) = -Q\,K^{-1}[-d(\mathfrak{p} + 2K\mathfrak{a} + M\mathfrak{u}) + (K+b)(\mathfrak{q} + 2H\mathfrak{b} + L\mathfrak{v})], \\ (\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_2) = -P\,H^{-1}[(H+a)(\mathfrak{p} + 2K\mathfrak{a} + M\mathfrak{u}) - c(\mathfrak{q} + 2H\mathfrak{b} + L\mathfrak{v})]. \end{cases}$$

Die Vektoren (88) stellen die Schmiegtangenten unserer Hüllfläche dar. Denn bei jeder Projektivminimalfläche entsprechen bekanntlich die Asymptotenlinien der Hüllflächen der LIE-Quadriken denen der Fläche selbst[18]).

Setzen wir noch

$$(89)\qquad \varrho = \varrho_0 = c\,d - (H+a)(K+b),$$

so ist

$$(90)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1) = Q\,K^{-1}[d\,\mathfrak{r} - (K+b)\,\mathfrak{s} + 2\varrho\,\mathfrak{b}], \\ (\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_2) = P\,H^{-1}[-(H+a)\,\mathfrak{r} + c\,\mathfrak{s} + 2\varrho\,\mathfrak{a}]; \end{cases}$$

$\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ sind hierbei durch (40) erklärt.

---

[18]) Vgl. etwa G. THOMSEN, l. c. [12]). Man beweist den Satz am einfachsten, indem man zeigt, daß jeder der Vektoren (20) einer LAPLACE-Gleichung bezüglich u, v genügt; nach einem Satze von DARBOUX über W-Kongruenzen folgt daraus die Behauptung. Vgl. PD I, § 34.

Für die Ableitungen von ϱ findet man aus (31), (35), (86)

$$\varrho_1 = \varrho(Q K^{-1} + 2H - 2a), \qquad \varrho_2 = \varrho(P H^{-1} + 2K - 2b). \tag{91}$$

Verschwindet also ϱ an einer Stelle unserer Hüllfläche, so gilt das gleiche überall. Die Hüllfläche entartet dann nach (90) in eine Leitgerade der von den Diagonalen der Vierseite von DEMOULIN erzeugten linearen Kongruenz.

Nehmen wir also weiterhin an, daß $\varrho \neq 0$! Durch nochmalige Differentiation folgt aus (87)

$$\mathfrak{z}_{12} \equiv -P Q H^{-1} K^{-1} \varrho \mathfrak{x} \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1 + H\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2 + K\mathfrak{x}). \tag{92}$$

Daher wird

$$(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_{12}) = P^2 Q^2 H^{-2} K^{-2} \varrho^2 (\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1 + H\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2 + K\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = -P^2 Q^2 H^{-2} K^{-2} \varrho^2 \varkappa.$$

Führen wir also die Abkürzung ein

$$\Theta = \left(\frac{H K \varepsilon}{P Q \varrho}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{93}$$

wobei $\varepsilon = \pm 1$ bei hyperbolisch gekrümmten Flächen so gewählt wird, daß Θ reell ist, während bei elliptisch gekrümmten $\varepsilon = 1$ gesetzt werden kann, und setzen wir

$$\breve{\mathfrak{x}} = \Theta \mathfrak{z}, \tag{94}$$

so ist $\breve{\mathfrak{x}}$ der nach (3) normierte Flächenvektor der Hüllfläche und es ist

$$\breve{\varkappa} = -\varkappa. \tag{95}$$

Setzen wir noch

$$\mathfrak{m} = d\,\mathfrak{x} - (K + b)\,\mathfrak{y}, \qquad \mathfrak{n} = -(H + a)\,\mathfrak{x} + c\,\mathfrak{y}, \tag{96}$$

so ist weiter nach (88)

$$\begin{cases} \breve{\mathfrak{u}} = \Theta^2(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1) = \varepsilon H P^{-1} \varrho^{-1}(\mathfrak{m} + 2\varrho\,\mathfrak{b}), \\ \breve{\mathfrak{v}} = \Theta^2(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_2) = \varepsilon K Q^{-1} \varrho^{-1}(\mathfrak{n} + 2\varrho\,\mathfrak{a}). \end{cases} \tag{97}$$

Für die Vektoren $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ gilt

$$\begin{cases} \mathfrak{m}_1 = (Q K^{-1} - 2a)\,\mathfrak{m}, & \mathfrak{m}_2 = 2(K - b)\,\mathfrak{m}, \\ \mathfrak{n}_1 = 2(H - a)\,\mathfrak{n}, & \mathfrak{n}_2 = (P H^{-1} - 2b)\,\mathfrak{n}, \end{cases} \tag{98}$$

sie stellen also feste Punkte von $\boldsymbol{g}$ dar.

Aus (97) folgt mittels (91), (98), (28), (86), (88)

$$\breve{\mathfrak{u}}_1 = 2\varepsilon H d P^{-1} \varrho^{-1}[-(H + a)(\mathfrak{p} + 2K\mathfrak{a} + M\mathfrak{u}) + c(\mathfrak{q} + 2H\mathfrak{b} + L\mathfrak{v})],$$

wobei diese Ableitung von $\breve{\mathfrak{u}}$ nach (38) die gewöhnliche ist. Andererseits ist nach (18)

$$\breve{\mathfrak{u}}_1 = \breve{\beta}\breve{\mathfrak{v}}.$$

Wegen (29) wird daher

$$\breve{\beta} = \frac{2d H Q}{K P} = -2\frac{\beta H K}{P}. \tag{99}$$

Ebenso ergibt sich

$$\breve{\gamma} = \frac{2c\,K\,P}{H\,Q} = -\,2\gamma\,H\,K\,Q^{-1}. \tag{100}$$

Um $\breve{\mathfrak{a}}$ und $\breve{\mathfrak{b}}$ zu bestimmen, beachten wir, daß nach (18), (10)

$$2\,\mathfrak{a}\,\beta^{-1} = (\mathfrak{u}\,\beta^{-1})_2, \qquad 2\,\mathfrak{b}\,\gamma^{-1} = (\mathfrak{v}\,\gamma^{-1})_1,$$

wobei die Ableitungen wieder die gewöhnlichen sind. Wenden wir das an auf die Fläche $\breve{\mathfrak{z}}$, so finden wir

$$\varepsilon\,\breve{\mathfrak{a}} = -\frac{1}{2\varrho}\,\mathfrak{m} + H\,\mathfrak{v}, \qquad \varepsilon\,\breve{\mathfrak{b}} = -\frac{1}{2\varrho}\,\mathfrak{n} + K\,\mathfrak{u} \tag{101}$$

und daraus durch nochmalige Differentiation

$$\begin{cases} \breve{Q}\,\breve{\mathfrak{u}} = \breve{\mathfrak{a}}_1 = \varepsilon\,H\,\varrho^{-1}(\mathfrak{m} + 2\varrho\,\mathfrak{b}) \\ \breve{P}\,\breve{\mathfrak{v}} = \breve{\mathfrak{b}}_2 = \varepsilon\,K\,\varrho^{-1}(\mathfrak{n} + 2\varrho\,\mathfrak{a}) \end{cases} \tag{102}$$

$$\begin{cases} \breve{\mathfrak{p}} + \breve{M}\,\breve{\mathfrak{u}} = \breve{\mathfrak{a}}_2 = \tfrac{1}{2}\,P\,H^{-1}(-\,2\varepsilon\,\mathfrak{f} + P\,H^{-1}\,\breve{\mathfrak{u}}) \\ \breve{\mathfrak{q}} + \breve{L}\,\breve{\mathfrak{v}} = \breve{\mathfrak{b}}_1 = \tfrac{1}{2}\,Q\,K^{-1}(-\,2\varepsilon\,\mathfrak{e} + Q\,K^{-1}\,\breve{\mathfrak{v}}). \end{cases} \tag{103}$$

Durch Vergleichen mit (97) ergibt sich aus (102)

$$\breve{P} = Q, \qquad \breve{Q} = P, \tag{104}$$

während man aus (103)

$$2\breve{M}\,\breve{\varkappa} = \breve{\mathfrak{a}}_2 \circ \breve{\mathfrak{a}}_2 = P^2\,L^{-1}(\mathfrak{f} \circ \mathfrak{f} - \varepsilon\,P\,H^{-1}\,\mathfrak{f} \circ \breve{\mathfrak{u}}) = -\,\tfrac{1}{2}\,P^2\,L^{-1}\,\varkappa$$

und eine entsprechende Gleichung für $\breve{L}$ folgert. Also ist

$$\breve{M} = \tfrac{1}{4}\,P^2\,L^{-1}, \qquad \breve{L} = \tfrac{1}{4}\,Q^2\,M^{-1}. \tag{105}$$

Aus (105), (103) und (97) folgt weiter

$$\breve{\mathfrak{c}} = \breve{\mathfrak{p}} - \breve{M}\,\breve{\mathfrak{u}} = -\,\varepsilon\,P\,H^{-1}\,\mathfrak{f}, \qquad \breve{\mathfrak{d}} = \breve{\mathfrak{q}} - \breve{L}\,\breve{\mathfrak{v}} = -\,\varepsilon\,Q\,K^{-1}\,\mathfrak{e}. \tag{106}$$

Nach (105), (19) kann man setzen

$$\breve{H} = -\,\tfrac{1}{2}\,Q\,K^{-1}, \qquad \breve{K} = -\,\tfrac{1}{2}\,P\,H^{-1}. \tag{107}$$

Aus (103), (107) folgt dann für die Kanten des Vierseits von DEMOULIN der Fläche $\breve{\mathfrak{z}}$

$$\begin{cases} \breve{\mathfrak{p}} - 2\breve{K}\,\breve{\mathfrak{a}} + \breve{M}\,\breve{\mathfrak{u}} = \varepsilon\,P\,H^{-1}\,[-\,c\,\mathfrak{u} + (H + a)\,\mathfrak{v}\,], \\ \breve{\mathfrak{q}} - 2\breve{H}\,\breve{\mathfrak{b}} + \breve{L}\,\breve{\mathfrak{v}} = \varepsilon\,Q\,K^{-1}\,[(K + b)\,\mathfrak{u} - d\,\mathfrak{v}\,], \\ \breve{\mathfrak{p}} + 2\breve{K}\,\breve{\mathfrak{a}} + \breve{M}\,\breve{\mathfrak{u}} = \varepsilon\,P\,H^{-1}\,[\varrho^{-1}\,\mathfrak{m} - c\,\mathfrak{u} + (-\,H + a)\,\mathfrak{v}\,], \\ \breve{\mathfrak{q}} + 2\breve{H}\,\breve{\mathfrak{b}} + \breve{L}\,\breve{\mathfrak{v}} = \varepsilon\,Q\,K^{-1}\,[\varrho^{-1}\,\mathfrak{n} + (-\,K + b)\,\mathfrak{u} - d\,\mathfrak{v}\,]. \end{cases} \tag{108}$$

Durch Anwendung der Gleichungen

$$(L\,\gamma^2)_1 = 2\beta\,\gamma^2\,N; \qquad (Q\,\beta)_2 = 2b\,Q\,\beta, \qquad (P\,\gamma)_1 = 2a\,P\,\gamma,$$

in denen die Ableitungen wieder die gewöhnlichen sind, und von (29) auf $\mathfrak{z}$ findet man

$$(109) \qquad \breve{N} = 0, \quad \breve{a} = \frac{b\,Q}{2M}, \quad \breve{b} = \frac{a\,P}{2L}, \quad \breve{c} = -\frac{P\,c}{2H\,K}, \quad \breve{d} = -\frac{Q\,d}{2H\,K}.$$

Schließlich ergibt sich etwa durch Anwendung der Gln. (36) für $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ auf $\mathfrak{z}$

$$(110) \qquad \breve{\mathfrak{c}} = -\frac{\varepsilon}{2} H^{-1}\mathfrak{d}, \qquad \breve{\mathfrak{f}} = -\frac{\varepsilon}{2} K^{-1}\mathfrak{c}.$$

Gehen wir über zur geometrischen Deutung unserer Formeln! Zunächst folgt aus $\breve{N} = 0$, daß jede Hüllfläche der LIE-Quadriken unserer Fläche wieder Projektivminimalfläche ist[19]). Darüber hinaus gilt aber:

Jede Hüllfläche der LIE-*Quadriken einer Kongruenzfläche ist wieder Kongruenzfläche, sie gehört zur gleichen linearen Kongruenz K.*

Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß die Bildpunkte der Diagonalen des Vierseits von DEMOULIN der neuen Fläche im R_5 in dem von $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ aufgespannten linearen Raum liegen. Das folgt aber sofort aus (106) in Verbindung mit (22).

Der GODEAUX-*Kette der neuen Fläche ist dieselbe geschlossene* LAPLACE-*Kette der Periode 4 einbeschrieben wie derjenigen der alten, gegenüberliegende Flächen der einbeschriebenen Kette tauschen dabei die Rollen.*

Auch das folgt sofort aus (106), (110).

Den Übergang von einer Fläche zu einer von ihr verschiedenen Hüllfläche ihrer LIE-Quadriken wollen wir eine M-Transformation nennen. Dann gilt:

Bei den Kongruenzflächen ist die M-Transformation eine umkehrbare Beziehung, in unserem Fall ist also auch $\mathfrak{x}$ *eine M-Transformierte von* $\mathfrak{z}$[19]).

Die beiden ersten Gln. (108) zeigen nämlich, daß 2 der Kanten des Vierseits von DEMOULIN von $\mathfrak{z}$ durch $\mathfrak{x}$ gehen, naturgemäß berühren sie sogar die Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$.

Wir wollen die Flächen $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$ die nullte, erste, zweite und dritte M-Transformierte von $\mathfrak{x}$ nennen. Diese Numerierung hängt natürlich ab von der getroffenen Wahl der Vorzeichen von H und K, sie ist aber festgelegt, wenn die Nummer *einer* M-Transformierten von $\mathfrak{x}$ vorgeschrieben wird.

Wir wollen für unsere Kongruenzfläche $\mathfrak{x}$ die Vorzeichen von H und K beliebig festgelegt denken; die entsprechenden Vorzeichen bei den M-Transformierten sollen dann bestimmt werden nach der Regel:

Ist $\mathfrak{p}(u, v)$ *die k-te M-Transformierte von* $\mathfrak{q}(u, v)$, *so soll* $\mathfrak{q}(u, v)$ *die* $(3-k)$*-te M-Transformierte von* $\mathfrak{p}(u, v)$ *sein.*

Dadurch sind dann die Vorzeichen für unsere M-Transformierten eindeutig festgelegt, und das gleiche gilt für die M-Transformierten höherer Ordnung,

[19]) Diese Sätze gelten für beliebige Projektivminimalflächen. Vgl. MAYER, O.: l. c.[3]).

die man durch wiederholte M-Transformation unserer Fläche erhält. Im Einklang mit dieser Regel wurden die Vorzeichen in (107) gewählt.

Zwei M-Transformierte nennen wir benachbart, wenn die Verbindungsgerade entsprechender Flächenpunkte eine Kante des Vierseits von DEMOULIN der transformierten Fläche ist. Im anderen Fall nennen wir sie gegenüberliegend. $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_3$ sind also gegenüberliegende M-Transformierte, ebenso $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$. Entsprechende Punkte solcher gegenüberliegenden Transformierten werden durch eine Diagonale des Vierseits von DEMOULIN verbunden.

Je zwei benachbarte M-Transformationen einer Kongruenzfläche sind vertauschbar[19]).

Beispielsweise ist zu zeigen, daß die erste M-Transformierte von $\mathfrak{z}_0$ mit der nullten von $\mathfrak{z}_1$ identisch ist. Nach der obigen Regel ist $\mathfrak{x}$ die dritte M-Transformierte von $\mathfrak{z}_0$. Die Gerade $\breve{\mathfrak{q}} - 2\breve{H}\breve{\mathfrak{b}} + \breve{L}\breve{\mathfrak{v}}$ verbindet diese nach (85) mit der ersten und berührt diese. Die erste M-Transformierte von $\mathfrak{z}_0$ ist also nach (108) die von $\mathfrak{x}$ verschiedene Brennfläche der von den Geraden $(K+b)\,\mathfrak{u} - d\,\mathfrak{v}$ erzeugten Kongruenz.

Die Formeln für $\mathfrak{z}_1$ erhalten wir aus denen für $\mathfrak{z}$, indem wir überall H durch $-H$ ersetzen. Ändern wir weiter nichts, so ist dann $\mathfrak{x}$ auch die dritte M-Transformierte von $\mathfrak{z}_1$. Damit $\mathfrak{x}$ die zweite Transformierte wird, wie es nach der Regel sein soll, müssen wir noch $\breve{H}$ mit dem negativen Vorzeichen versehen. Dann wird nach (107), (108) für $\mathfrak{z}_1$

$$\breve{H} = \tfrac{1}{2} Q K^{-1}, \qquad \breve{K} = \tfrac{1}{2} P H^{-1}, \tag{111}$$

$$\begin{cases} \breve{\mathfrak{p}} - 2\breve{K}\breve{\mathfrak{a}} + \breve{M}\breve{\mathfrak{u}} = -\varepsilon P H^{-1}[-c\,\mathfrak{u} + (-H + a)\,\mathfrak{v}] \\ \breve{\mathfrak{q}} + 2\breve{H}\breve{\mathfrak{b}} + \breve{L}\breve{\mathfrak{v}} = \varepsilon Q K^{-1}[(K + b)\,\mathfrak{u} - d\,\mathfrak{v}]. \end{cases} \tag{112}$$

Nach (85) berühren die Vektoren in (112) die zweite M-Transformierte von $\mathfrak{z}_1$, diese ist also die Fläche $\mathfrak{x}$, wie es sein soll. Die zweite Brennfläche der obengenannten Kongruenz wird mit $\mathfrak{x}$ verbunden durch die Geraden $\breve{\mathfrak{q}} + 2\breve{H}\breve{\mathfrak{b}} + \breve{L}\breve{\mathfrak{v}}$, sie ist also nach (85) die nullte M-Transformierte von $\mathfrak{z}_1$. Damit ist die behauptete Vertauschbarkeit bewiesen.

Zeigen wir noch, daß wir auf beiden Wegen für die Transformierte zweiter Ordnung nach der obigen Regel die gleichen Werte von H und K bekommen! Zunächst folgt aus (107), (111):

Zu benachbarten M-Transformierten einer Kongruenzfläche gehören entgegengesetzt gleiche Werte von $\breve{H}$ und $\breve{K}$.

Unsere Transformierte zweiter Ordnung ist nun aber auf beiden Wegen eine zu $\mathfrak{x}$ benachbarte M-Transformierte, das eine Mal von $\mathfrak{z}$, das andere von $\mathfrak{z}_1$. Also ist für sie in beiden Fällen

$$\mathring{H} = -H, \qquad \mathring{K} = -K. \tag{113}$$

Aus (108) erhält man für die M-Transformierten von $\mathfrak{z}$ im Begleittetraeder der Fläche $\mathfrak{x}$ die Darstellungen[20])

$$(114)\qquad \begin{cases} \breve{\mathfrak{z}}_0 (=) \mathfrak{y} + (c-b)\,\mathfrak{x}_1 + (d-a)\,\mathfrak{x}_2 + (A + Hc + Kd)\,\mathfrak{x} \\ \breve{\mathfrak{z}}_1 (=) -(K+b)\,[\mathfrak{x}_1 - (a+d)\,\mathfrak{x}] + d\,[\mathfrak{x}_2 - (b+c)\,\mathfrak{x}] \\ \breve{\mathfrak{z}}_2 (=) c\,[\mathfrak{x}_1 - (a+d)\,\mathfrak{x}] - (H+a)\,[\mathfrak{x}_2 - (b+c)\,\mathfrak{x}] \\ \breve{\mathfrak{z}}_3 (=) \mathfrak{x}\,. \end{cases}$$

Die Diagonalen des Vierseits von DEMOULIN von $\mathfrak{z}$ werden nach (106) im R_5 dargestellt von den Schnittpunkten der Geraden $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ mit $\boldsymbol{Q}$, also von den Vektoren

$$(115)\qquad \begin{cases} \mathfrak{e} + \mathfrak{f} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + (c-b)\,\mathfrak{u} + (d-a)\,\mathfrak{v} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y} + (c-b)\,\mathfrak{x}_1 + (d-a)\,\mathfrak{x}_2) \\ \mathfrak{e} - \mathfrak{f} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b} - (c+b)\,\mathfrak{u} + (d+a)\,\mathfrak{v} = -(\mathfrak{x}_1 - (a+d)\,\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2 - (b+c)\,\mathfrak{x}). \end{cases}$$

Die erste dieser Geraden, die durch $\mathfrak{x}$ geht, nennen wir die *erste Hauptnormale* der Fläche $\mathfrak{x}$, die zweite, die in der Tangentenebene von $\mathfrak{x}$ liegt, die *zweite Hauptnormale* von $\mathfrak{x}$.

Diese Hauptnormalen der Fläche $\mathfrak{x}$ sind also die Diagonalen des Vierseits von DEMOULIN jeder M-Transformierten von $\mathfrak{x}$. Umgekehrt sind die Diagonalen des Vierseits von DEMOULIN von $\mathfrak{x}$ die Hauptnormalen jeder M-Transformierten.

Wir beweisen schließlich noch den Satz:

Die GODEAUX*-Kette jeder nichtentarteten M-Transformierten $\mathfrak{z}$ einer Kongruenzfläche $\mathfrak{x}$ ist mit der* GODEAUX*-Kette von $\mathfrak{x}$ projektiv gleichwertig; es gibt eine Projektivität π_0 des R_5, die jede Fläche $\mathfrak{u}_m(u, v)$ der* GODEAUX*-Kette von $\mathfrak{x}$ abbildet auf die Fläche $\breve{\mathfrak{u}}_{m+2}(u, v)$ der* GODEAUX*-Kette von $\mathfrak{z}$, wobei sich Punkte entsprechen, die zu den gleichen Werten der Parameter gehören.*

Diese Projektivität läßt natürlich $\boldsymbol{Q}$ nicht invariant, sie gehört also nicht zu einer Projektivität oder Korrelation des R_3.

Die Richtigkeit unseres Satzes ergibt sich sofort daraus, daß die Ableitungsgleichungen des Vektorsystems

$$(116)\qquad \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \qquad \mathfrak{b}, H\mathfrak{v},$$

nämlich (36) und die leicht aus (18) folgenden

$$\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{d} + 2H(H\mathfrak{v}), \qquad \mathfrak{b}_2 = P\,H^{-1}(H\mathfrak{v}),$$
$$(H\mathfrak{v})_1 = 2H\,\mathfrak{b}, \qquad (H\mathfrak{v})_2 = H\gamma\,c^{-1}(\mathfrak{f} - \mathfrak{b})$$

[20]) Der Punkt mit den Koordinaten (p_0, p_1, p_2, p_3) liegt dann und nur dann auf der Geraden mit den Geradenkoordinaten g_{ik}, wenn $\sum_i g_{ik} p_i = 0$. Bei Verwendung der Koordinaten im Begleittetraeder mit den Basisvektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}$ prüft man leicht nach, daß etwa der in (114) zuerst genannte Punkt auf den beiden letzten Geraden (108) liegt.

Das Zeichen $(=)$ soll darauf hinweisen, daß zwischen beiden Seiten nur Gleichheit bis auf einen von Null verschiedenen Faktor besteht, sofern auf die Normierung der Vektoren geachtet wird. Es bedeutet also, daß beide Seiten den gleichen Punkt darstellen.

die gleichen Koeffizienten haben, wie die analog gebildeten für das System

(117) $$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \qquad -\varepsilon \breve{K} \breve{\mathfrak{u}}, \qquad \varepsilon \breve{\mathfrak{a}}.$$

Es gibt daher eine Projektivität π_0 des R_5, die jede Fläche (116) auf die entsprechende (117) abbildet, für die also insbesondere

(118) $$\pi_0 \mathfrak{d} (=) \breve{\mathfrak{a}}.$$

Diese bildet dann auch entsprechende LAPLACE-Transformierte der beiden Flächen aufeinander ab und ist daher die gesuchte.

Aus unserem Satz folgt:

Sind 2 Flächen M-Transformierte voneinander, so lassen sich die zu ihren GODEAUX-*Ketten nach § 3 gehörigen Projektivitäten π ineinander transformieren.*

In unserem Fall ist nämlich, wenn $\breve{\pi}$ die zu $\mathfrak{z}$ gehörige π entsprechende Projektivität bezeichnet

(119) $$\breve{\pi} = \pi_0 \pi \pi_0^{-1}.$$

Das gleiche gilt für die zu beiden gehörigen Transformationen π_g. Das folgt aus (119), wenn noch gezeigt wird, daß $\boldsymbol{g}$ bei π_0 invariant ist. Dies ist nicht selbstverständlich, weil $\boldsymbol{Q}$ bei π_0 nicht festbleibt. $\boldsymbol{g}$ hat aber die Eigenschaft, daß jede Verbindungsgerade entsprechender Punkte von $\mathfrak{u}_n$ und $\mathfrak{u}_{n+4}$ für jedes n sie trifft; der Schnittpunkt ist dabei nicht immer der gleiche Punkt von $\boldsymbol{g}$, denn beispielsweise sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ stets verschieden. $\boldsymbol{g}$ ist daher die einzige Gerade mit der genannten Eigenschaft; gäbe es zwei, so müßte jede unserer Verbindungsgeraden, sofern sie nicht durch einen eventuell vorhandenen Schnittpunkt von beiden ginge, in dem von ihnen aufgespannten höchstens dreidimensionalen linearen Unterraum des R_5 liegen. Das gleiche müßte dann für die Flächen der GODEAUX-Kette gelten, was nicht möglich ist.

Für die GODEAUX-Kette der M-Transformierten hat $\breve{\boldsymbol{g}}$ die gleiche Eigenschaft. Also führt π_0 jedenfalls $\boldsymbol{g}$ in $\breve{\boldsymbol{g}}$ über. $\breve{\boldsymbol{g}}$ ist aber als Polare des Raumes durch $\breve{\mathfrak{c}}, \breve{\mathfrak{d}}, \breve{\mathfrak{e}}, \breve{\mathfrak{f}}$ in bezug auf $\boldsymbol{Q}$ mit $\boldsymbol{g}$ identisch. Damit ist unser Satz bewiesen.

§ 4. *M*-Diagramm und *M*-System.

Der auf S. 116 bewiesene Vertauschbarkeitssatz gibt uns die Möglichkeit, die M-Transformierten verschiedener Ordnung einer Kongruenzfläche in sehr übersichtlicher Weise durch Punkte einer Euklidischen Ebene zu repräsentieren[19]). Das geschieht nach den folgenden Regeln:

1. Der Fläche $\mathfrak{x}$ wird der Punkt $(0, 0)$ eines festgewählten Parallelkoordinatensystems zugeordnet.

2. Ist einer Fläche der Punkt (x, y) der Ebene zugeordnet, so sollen ihren nullten, ersten, zweiten und dritten M-Transformierten der Reihe nach die Punkte $(x+1, y+1)$, $(x-1, y+1)$, $(x+1, y-1)$, $(x-1, y-1)$ entsprechen.

Den Flächen $\mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3$ ordnen wir also der Reihe nach die Punkte $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$ zu (vgl. Fig. 1, jeder Kreis bedeutet eine Fläche). Der oben betrachteten M-Transformierten zweiter Ordnung von $\mathfrak{x}$ ist der

Punkt (0, 2) zugeordnet. Man beachte, daß das Verfahren im Einklang steht mit der weiter oben definierten Regel für die gegenseitige Beziehung zweier Flächen, die M-Transformierte erster Ordnung voneinander sind: So entspricht die Lage der Bildpunkte von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}_0$ der Tatsache, daß die erstgenannte Fläche die dritte Transformierte der zweitgenannten ist.

Im Gitter der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten unserer Ebene werden also die M-Transformierten der verschiedenen Ordnungen unserer Kongruenzfläche dargestellt durch die Punkte, deren Koordinatensumme gerade ist. Wir nennen diese Figur das M-Diagramm unserer Kongruenzfläche, das zugehörige Flächensystem ihr M-System. Offenbar sind die Punkte des Diagrammes so wie die Flächen des Systems untereinander völlig gleichberechtigt.

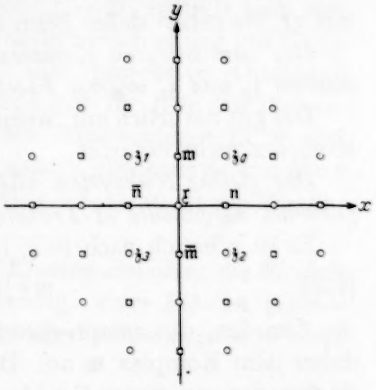

Fig. 1. Jeder Kreis stellt eine Fläche dar, jedes Quadrat einen linearen Komplex.

Allerdings besteht natürlich noch die Möglichkeit, daß verschiedene Punkte des Diagrammes in Wirklichkeit die gleiche Fläche darstellen. Auch können Entartungen vorkommen.

Zwischen den Flächen des im Diagramm dargestellten Systems bestehen sehr enge Zusammenhänge. Wir zeigen zunächst:

Benachbarte nichtentartete M-Transformierte einer Kongruenzfläche entsprechen sich bei einer Korrelation, gegenüberliegende bei einer Projektivität.

Das hängt damit zusammen, daß die von den Diagonalen des Vierseits von DEMOULIN unserer Fläche erzeugten Kongruenzen ein schichtbildendes Paar (couple stratifiable) sind. Wir erinnern an die Definition solcher Paare: Sind 2 Kongruenzen $\mathfrak{g}(u, v)$ und $\mathfrak{h}(u, v)$ durch gleiche Parameterwerte eineindeutig aufeinander bezogen, und wählt man auf jeder Geraden von $\mathfrak{g}(u, v)$ einen Punkt $\mathfrak{p}(u, v)$, der stetig von u und v abhängt, so erzeugen diese Punkte eine Fläche. Man kann nun fragen ob sich unsere Punkte so wählen lassen, daß jede Tangentenebene dieser Fläche die entsprechende Gerade $\mathfrak{h}(u, v)$ der anderen Kongruenz enthält. Gibt es unendlich viele Flächen dieser Art, so bilden diese ein einparametriges System und wir nennen dann die Kongruenz $\mathfrak{h}(u, v)$ für $\mathfrak{g}(u, v)$ schichtbildend[21]). Die Flächen des Systems bilden die Geraden von $\mathfrak{g}(u, v)$ projektiv aufeinander ab. Ist gleichzeitig auch $\mathfrak{g}(u, v)$ für $\mathfrak{h}(u, v)$ schichtbildend, so spricht man von einem schichtbildenden Kongruenzpaar.

In unserem Fall sind die von den Ecken des Vierseits von DEMOULIN erzeugten Flächen solche Schichtflächen für die Diagonalenkongruenzen. Aus jeder solchen Fläche entstehen aber unendlich viele weitere der anderen Schar, wenn man auf die Figur das Nullsystem der linearen Komplexe anwendet,

[21]) Der Begriff stammt von L. BIANCHI.

die die Kongruenz enthalten. Je 2 Kongruenzen, die aus Teilen der gleichen linearen Kongruenz bestehen, sind daher stets dann ein schichtbildendes Paar, wenn es wenigstens eine nichtentartete Schichtfläche gibt. Je 2 Flächen verschiedener Scharen entsprechen sich beim Nullsystem eines linearen Komplexes; je 2 der gleichen Schar erhält man auseinander, indem man 2 solche Nullsysteme nacheinander anwendet, sie entsprechen sich daher bei einer Projektivität. Damit ist der angekündigte Satz bewiesen.

Betrachten wir in unserem Fall einmal den vom Punkte $\mathfrak{m}$ dargestellten linearen Komplex. Nach (96) gehört dieser in der gleichen Weise wie zu $\mathfrak{z}_0$ auch zur Fläche $\mathfrak{z}_1$. Die Schmiegtangenten $\breve{\mathfrak{u}}$ der Flächen $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_1$ werden nach (97) dargestellt von den Schnittpunkten der Geraden $(\mathfrak{m}, \mathfrak{b})$ des R_5 mit $\boldsymbol{Q}$, sie gehen daher beim zu $\mathfrak{m}$ gehörigen Nullsystem ineinander über[22]).

Das zum linearen Komplex $\mathfrak{m}$ gehörige Nullsystem führt die M-Transformierten $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_1$ unserer Fläche ineinander über.

Das gilt natürlich nur, wenn $\mathfrak{m}$ nicht auf $\boldsymbol{Q}$ liegt, also der zugehörige lineare Komplex nicht entartet.

Das gleiche Nullsystem bildet $\mathfrak{x}$ ab auf die vom Punkte (0, 2) des M-Diagrammes dargestellte M-Transformierte zweiter Ordnung von $\mathfrak{x}$.

Es ist nämlich nach (96), (40), (17)

$$\mathfrak{m} \circ [(K + b)\,\mathfrak{u} - d\,\mathfrak{v}] = 0, \tag{120}$$

die Geraden, die entsprechende Punkte beider Flächen verbinden, gehören daher dem Komplex $\mathfrak{m}$ an. Das zugehörige Nullsystem bildet beide Brennflächen der von diesen Geraden erzeugten Kongruenz aufeinander ab; wie wir gesehen haben, sind das aber genau die genannten Flächen. Allgemeiner gilt:

Dem Nullsystem des Komplexes $\mathfrak{m}$ entspricht im M-Diagramm die Spiegelung am Punkte (0, 1); zwei Punkte, die bei dieser Spiegelung ineinander übergehen, entsprechen Flächen, die bei diesem Nullsystem einander entsprechen.

Zum Beweis möge der Hinweis genügen, daß eine Korrelation, die 2 Flächen aufeinander abbildet, auch die M-Transformierten der einen auf die der anderen abbildet, und zwar benachbarte auf benachbarte und gegenüberliegende auf gegenüberliegende. Da nun die Fläche (0, 0) auf (0, 2), (1, 1) auf (−1, 1) abgebildet wird, wird (2, 2) in (−2, 0) und allgemein (n, n) in $(-n, 2-n)$ übergeführt. Ebenso sieht man, daß sich $(-n, n)$ und $(n, 2-n)$ entsprechen. Durch nochmalige vollständige Induktion mittels der gleichen Regel folgt die allgemeine Gültigkeit der Behauptung.

Offenbar ist es zweckmäßig, dem Komplex $\mathfrak{m}$ den Punkt (0, 1) des M-Diagrammes zuzuordnen; ebenso gehört zu (1, 0) der Komplex $\mathfrak{n}$. Das läßt sich wieder verallgemeinern:

Von Entartungsfällen abgesehen, kann man jedem Gitterpunkt mit ungerader Koordinatensumme des M-Diagrammes einen linearen Komplex zuordnen; dem Nullsystem des Komplexes entspricht die Spiegelung des Diagrammes an dessen Bildpunkt.

Diese Komplexe sind in den Figuren durch Quadrate dargestellt.

[22]) Vgl. etwa PD I, § 20, Aufg. 1.

Setzen wir noch

$$\overline{\mathfrak{m}} = d\,\mathfrak{x} + (K - b)\,\mathfrak{z}, \qquad \overline{\mathfrak{n}} = (H - a)\,\mathfrak{x} + c\,\mathfrak{z}, \tag{121}$$

so ist dem Komplex $\overline{\mathfrak{m}}$, der durch Vorzeichenwechsel von K aus $\mathfrak{m}$ entsteht, der Punkt $(0, -1)$ zugeordnet, während zu $(-1, 0)$ der Komplex $\overline{\mathfrak{n}}$ gehört.

Spiegelt man eine Ebene der Reihe nach an 2 Punkten, so ist das Endergebnis eine Parallelverschiebung um den doppelten Verbindungsvektor dieser Punkte. Andererseits erhält man durch aufeinanderfolgende Ausübung zweier Nullsysteme eine Projektivität.

Spiegelt man insbesondere das M-Diagramm zuerst an $(0, 1)$, dann an $(1, 0)$, so erhält man die Parallelverschiebung um $(2, -2)$; spiegelt man erst an $(-1, 0)$, dann an $(0, 1)$, so erhält man die Parallelverschiebung um $(2, 2)$. Jeder dieser Parallelverschiebungen entspricht eine projektive Abbildung unseres Flächensystems auf sich, und das gleiche gilt für jede Parallelverschiebung um einen Vektor des Gitters mit den Basisvektoren $(2, 2)$ und $(2, -2)$. Jede Fläche des Systems ist daher projektiv gleichwertig mit einer der 4 Flächen, die von den Punkten $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(0, 2)$ des M-Diagrammes dargestellt werden.

Die Flächen unseres Systems lassen sich in 4 Klassen einteilen; die Flächen jeder Klasse sind untereinander projektiv gleichwertig. Zwei Flächen gehören dann und nur dann der gleichen Klasse an, wenn der Verbindungsvektor ihrer Bildpunkte im M-Diagramm die Form

$$(2k + 2l, \qquad 2k - 2l) \tag{122}$$

mit ganzzahligen k, l hat.

Je 2 dieser Systeme hängen dadurch zusammen, daß die zu ihnen gehörigen Flächen durch Korrelationen ineinander übergeführt werden können; für 2 Flächen des M-Systems ist das dann der Fall, wenn der Verbindungsvektor ihrer Bildpunkte gerade Komponenten, aber nicht die Form (122) hat.

Nach § 3 sind die Hauptnormalen unserer Kongruenzfläche $\mathfrak{x}$ die Diagonalen des Vierseits von DEMOULIN jeder ihrer M-Transformierten. Umgekehrt sind die Diagonalen des Vierseits von DEMOULIN der Fläche $\mathfrak{x}$ die Hauptnormalen jeder ihrer M-Transformierten. Geht man von einer M-Transformierten zu einer benachbarten über, so vertauschen offenbar beide Hauptnormalen ihre Rollen. Das gleiche geschieht daher im M-Diagramm bei einer Verschiebung um $(2, 0)$ oder $(0, 2)$. Daraus folgt:

Von den Flächen jeder unserer 4 Klassen liegen entsprechende Punkte auf einer Geraden — ihrer gemeinsamen Hauptnormale erster Art — und entsprechende Tangentenebenen gehen durch eine zweite Gerade, nämlich ihre gemeinsame Hauptnormale zweiter Art.

Diese Flächen gehören also einer Schar von Schichtflächen der beiden von den Hauptnormalen erzeugten Kongruenzen an. Die zweite Klasse des gleichen Paares — sie besteht aus zu diesen korrelativen Flächen — besteht aus Schichtflächen der anderen Schar.

Die gleichen Hauptnormalen sind die Diagonalen des entsprechenden Vierseits von DEMOULIN für sämtliche Flächen der beiden anderen Klassen.

Die erste Hauptnormale ist die Gerade der Kongruenz K unserer Kongruenzfläche, die durch den Punkt $\mathfrak{x}$ geht. Die zweite Hauptnormale ist diejenige Gerade dieser Kongruenz, die in der Tangentenebene der Fläche liegt. Für die Schnittpunkte der ersten Hauptnormalen mit den Leitgeraden der Kongruenz findet man[23]) mittels (40), (42) die Darstellung

$$\mathfrak{y} + (c-b)\,\mathfrak{x}_1 + (d-a)\,\mathfrak{x}_2 + (A \pm g)\,\mathfrak{x}, \tag{123}$$

in der

$$g^2 = A^2 + M(d^2 - a^2) + L(c^2 - b^2) + L\,M \tag{124}$$

die Diskriminante von (42) bedeutet.

§ 5. Entartungen.

Wir hatten bisher vorausgesetzt, daß die Komplexe $\mathfrak{m}$, $\bar{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{n}$, $\bar{\mathfrak{n}}$ nicht speziell sein sollten, ihre Bildpunkte im R_5 also nicht auf Q liegen sollten. Auch sollten die M-Transformierten unserer Fläche $\mathfrak{x}$ nicht entarten. Über das Vorkommen solcher Entartungsfälle gilt der Satz:

Die M-Transformierte $\mathfrak{z}_0$ der Fläche $\mathfrak{x}$ entartet dann und nur dann, wenn $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ den gleichen linearen Komplex darstellen; dieser ist dann speziell. Ist umgekehrt etwa $\mathfrak{m}$ ein spezieller linearer Komplex, so fällt dieser mit $\mathfrak{n}$ oder mit $\bar{\mathfrak{n}}$ zusammen; im ersten Fall entartet nach dem Vorangehenden $\mathfrak{z}_0$, im zweiten $\mathfrak{z}_1$.

Nach (96), (89) fallen nämlich die Komplexe $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ dann und nur dann zusammen, wenn $\varrho = 0$, also wenn $\mathfrak{z}_0$ entartet. Nach S. 113 stellen die Schnittpunkte der Geraden $(\mathfrak{m}, \mathfrak{b})$ mit Q die Schmiegtangenten $\breve{\mathfrak{u}}$ der Flächen $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_1$ dar. Stellt $\mathfrak{m}$ einen speziellen linearen Komplex dar, so fällt dieser Punkt in einen der beiden genannten Schnittpunkte, für die zugehörige Fläche ist dann nach (97) $\varrho = 0$. Damit ist alles bewiesen.

Untersuchen wir noch, welche Besonderheiten das M-System aufweist, wenn etwa $\mathfrak{z}_1$ entartet. $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_3$ entarten in diesem Falle nicht; würde etwa $\mathfrak{z}_0$ entarten, so wäre nach (89) neben $\varrho = 0$ auch

$$c\,d - (-H + a)\,(K + b) = 0;$$

daraus könnte man aber auf $H(K+b) = 0$, also wegen $H \neq 0$ auf $K + b = 0$ schließen, was wegen $c\,d \neq 0$ auf einen Widerspruch führt.

Da andererseits die Komplexe $\mathfrak{m}$, $\bar{\mathfrak{n}}$ speziell sind, müssen von den Flächen $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_3$ die M-Transformierten entarten, die durch die Punkte $(0, 2)$ und $(-2, 0)$ des M-Diagrammes dargestellt werden. Nach dem oben formulierten Satz entarten dann auch die zu den Punkten $(1, 2)$ und $(-2, -1)$ des Diagrammes gehörigen linearen Komplexe und sind mit $\mathfrak{m}$ und $\bar{\mathfrak{n}}$ identisch. Schließt man so weiter, so findet man:

[23]) Zur Nachprüfung kann man die in [20]) angegebene Regel verwenden.

Entartet $\mathfrak{d}_1$, so stellen alle Punkte des M-Diagrammes, für die $y = x + 1$ ist, den gleichen linearen Komplex dar. Die von den Punkten der Geraden $y = x$ dargestellten Flächen entarten nicht. Die von den Punkten der Geraden $y = x + 2$ dargestellten Flächen entarten sämtlich.

Von diesen letzten Flächen fallen im übrigen diejenigen, für die x ungerade ist, mit $\mathfrak{d}_1$ zusammen, während auch von den übrigen, für die also x gerade ist, entsprechende Punkte zusammenfallen. Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß die von $(0, 2)$ und $(-2, 0)$ dargestellten Flächen punktweise identisch sind. Nun ist die erstgenannte Fläche die zweite Brennfläche derjenigen Berührkongruenz von $\mathfrak{x}$, deren Strahlen $\mathfrak{m}$ angehören; für die zweite gilt das gleiche in bezug auf $\bar{\mathfrak{n}}$. Da $\mathfrak{m}$ und $\bar{\mathfrak{n}}$ den gleichen Komplex darstellen, sind beide Flächen wirklich identisch, der zugehörige Flächenpunkt ist der Schnittpunkt der Tangentenebene von $\mathfrak{x}$ mit der Leitgeraden des Komplexes.

Dann und nur dann entartet eine der M-Transformierten der Fläche $\mathfrak{x}$, wenn die Matrix der zur GODEAUX*-Kette gehörigen Projektivität π_g zusammenfallende charakteristische Wurzeln hat.*

Einerseits folgt nämlich aus $\varrho = 0$ zunächst

$$A + HK = -Hb - Ka. \tag{125}$$

Quadriert man dies, so ergibt sich nach (78)

$$Lc^2 p = -A^2 - LM + Lb^2 + Ma^2 = -2HKcd \tag{126}$$

und deshalb

$$p^2 - 4q = 0, \tag{127}$$

so daß (76) zusammenfallende Wurzeln hat.

Andererseits führt (127) zunächst auf

$$p = \pm 2\sqrt{q} = \pm 2\frac{Kd}{Hc}. \tag{128}$$

Gilt hier das Minuszeichen, so folgt (126) und daraus entweder (125) oder

$$A + HK = Hb + Ka. \tag{129}$$

Im ersten Fall entartet $\mathfrak{d}_0$, im zweiten $\mathfrak{d}_3$, denn (129) entsteht aus (125) durch Vorzeichenwechsel von H und K. Gilt aber in (128) das Pluszeichen, so bedeutet das einen Vorzeichenwechsel etwa von H allein in unseren Bedingungen, also entartet dann $\mathfrak{d}_1$ oder $\mathfrak{d}_2$.

Im übrigen ist

$$p^2 - 4q = L^2 c^4 \varrho_0 \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3, \tag{130}$$

wobei $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ die ϱ_0 entsprechenden zu $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$ und $\mathfrak{d}_3$ gehörigen Invarianten sind. Weiter bemerken wir, daß (126) nach (124) gleichbedeutend ist mit

$$g^2 = (Kd + Hc)^2. \tag{131}$$

Nehmen wir weiterhin an, daß $\mathfrak{d}_1$ entartet. Für die weitere Diskussion unterscheiden wir 2 Fälle.

a) $\mathfrak{z}_2$ entartet nicht. Die Komplexe $\mathfrak{n}$ und $\overline{\mathfrak{m}}$ sind dann nicht speziell und fallen nicht zusammen. Wenden wir nun auf unser System das zum Komplex $\mathfrak{n}$ gehörige Nullsystem an, so gehen Flächen ineinander über, deren Bildpunkte in bezug auf $(1, 0)$ gespiegelt liegen. Daher stellen die Punkte der Geraden $y = x - 4$ in diesem Fall ebenfalls entartete Flächen dar. Die von den Punkten der Geraden $y = x - 3$ dargestellten linearen Komplexe sind speziell und fallen zusammen. Nur die Flächen entarten nicht, die von den Punkten der Geraden $y = x$ und $y = x - 2$ dargestellt werden. Jede dieser

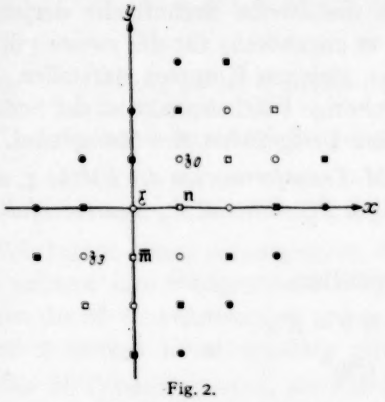

Fig. 2.

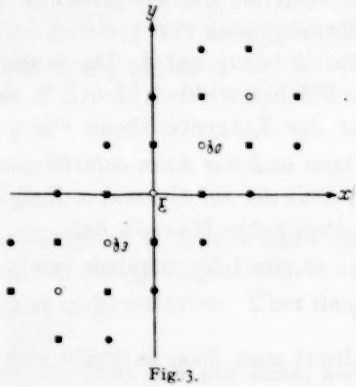

Fig. 3.

Flächen hat eine entartete M-Transformierte, gehört also ebenfalls zum betrachteten Fall a). Nur die Punkte der Geraden $y = x - 1$ stellen nichtspezielle lineare Komplexe dar. Man vergleiche die Fig. 2, in der entartete Flächen und Komplexe durch ausgefüllte Kreise und Quadraten dargestellt sind.

b) $\mathfrak{z}_2$ entartet ebenfalls. In diesem Fall sind nicht nur die von den Punkten der Geraden $y = x + 1$ dargestellten Komplexe speziell, sondern auch die von den Punkten der Geraden $y = x - 1$ (Fig. 3). Die Punkte, für die $y = x - 2$ stellen entartete Flächen dar, nur die Flächen für die $y = x$ sind nichtentartet. Da von jeder dieser Flächen 2 gegenüberliegende M-Transformierte entarten, gehören sämtliche Flächen des M-Systems ebenfalls zu b).

Kennzeichnend für die Flächen dieser Unterklasse ist, daß die Matrix (71) *der Projektivität* π_g *mit der Einheitsmatrix proportional ist.*

Die Flächen $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ entarten nämlich dann und nur dann, wenn analog zu (125)

$$A - HK = Hb - Ka, \qquad A - HK = -Hb + Ka. \tag{132}$$

Diese Bedingungen sind gleichwertig mit

$$A - HK = 0, \qquad Hb - Ka \doteq 0, \tag{133}$$

aus denen sich sofort (73) schließen läßt. Umgekehrt folgt aus (73) entweder (132) oder

$$A + HK = Hb + Ka, \qquad A + HK = -Hb - Ka^{16}). \tag{134}$$

Die letzteren Bedingungen bedeuten, daß $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_3$ entarten.

§ 6. Klasseneinteilung.

Bei der Klassifikation der reellen Kongruenzflächen können, insbesondere wenn die Realitätsverhältnisse beachtet werden, mehrere Merkmale herangezogen werden; dadurch ergeben sich zahlreiche Klassen und Unterklassen.

1. Mit der Einteilung der Flächen in hyperbolisch und elliptisch gekrümmte verbinden wir die nach der Beschaffenheit ihrer M-Transformierten:

I) Elliptisch gekrümmte Flächen. Zwei gegenüberliegende M-Transformierte, etwa $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_3$ sind hier stets reell. Je 2 sich in $\mathfrak{z}_0$ oder $\mathfrak{z}_3$ schneidende Kanten des Vierseits von DEMOULIN sind konjugiert komplex, die Diagonalen dieses Vierseits aber reell.

II) Hyperbolisch gekrümmte Flächen mit 4 reellen M-Transformierten. Kanten und Diagonalen der DEMOULINschen Vierseite sind sämtlich reell. Für diese Flächen ist $L > 0$, $M > 0$.

III) Hyperbolisch gekrümmte Flächen mit komplexen M-Transformierten. Das Vierseit von DEMOULIN hat reelle Diagonalen, je 2 gegenüberliegende Kanten sind konjugiert komplex. Hier ist $L < 0$, $M < 0$.

IV) Hyperbolisch gekrümmte Flächen mit komplexen M-Transformierten. Jedes Vierseit von DEMOULIN hat konjugiert komplexe Diagonalen, 2 gegenüberliegende Kanten sind reell, die beiden andern konjugiert komplex. Hierfür ist $LM < 0$ kennzeichnend.

2. Beschaffenheit der Kongruenz K. Wir haben folgende Fälle:

E) K ist elliptisch, die Schnittpunkte von $\boldsymbol{g}$ mit $\boldsymbol{Q}$ sowie die Leitgeraden von K sind konjugiert komplex. $g^2 < 0$.

H) K ist hyperbolisch. Die genannten Schnittpunkte sind reell verschieden, ebenso die Leitgeraden von K. $g^2 > 0$.

P) K ist parabolisch. $\boldsymbol{g}$ berührt $\boldsymbol{Q}$. $g^2 = 0$.

S) K ist singulär, eine Diagonale des Vierseits von DEMOULIN liegt in einer festen Ebene, die andere geht durch einen festen Punkt. Bei diesen Flächen ist

$$L - a^2 + d^2 = 0, \qquad a\,c - b\,d = 0, \qquad M - b^2 + c^2 = 0.$$

Natürlich ist S) ein Sonderfall von P).

3. Beschaffenheit der Fixpunkte und Eigenwerte von π_g. Diese können sein

a) verschieden: $p^2 - 4q \neq 0$;

b) zusammenfallend: $p^2 - 4q = 0$.

c) Die Eigenwerte fallen zusammen, die Fixpunkte bilden eine Gerade: $a\,A - b\,L = 0$, $b\,A - a\,M = 0$.

Dieser Fall ist ein Sonderfall von b).

Es fragt sich, ob die sich durch Kombination der 3 Einteilungen ergebenden 48 Möglichkeiten alle vorkommen. Zunächst ist zu beachten, daß jede Fläche der Klasse S) zu c) gehört. Denn es liegt $\boldsymbol{g}$ ganz im Raum durch $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ und deshalb ist $\pi_g = E$.

Weiter ist Fall IV) nicht mit b) oder c) vereinbar. Denn es gäbe eine entartete M-Transformierte, die konjugiert komplexe wäre zu ihr benachbart und müßte ebenfalls entarten. Nach § 5 ist das nicht möglich.

Fall b) ist nur dann möglich, ohne daß c) gilt, wenn die entartete M-Transformierte reell ist. Andernfalls müßte ja die konjugiert komplexe M-Transformierte ebenfalls entarten. Also sind die Fälle III) und IV) mit b) nicht vereinbar. Da weiter die entartete M-Transformierte Teil einer Leitgeraden von K ist, sind diese Leitgeraden reell, so daß b) auch nicht mit E) vereinbar ist.

Im Falle c) sind 2 gegenüberliegende M-Transformierte entartet; da beide auf Leitgeraden von K liegen, kann die Fläche nicht zu P) gehören, ohne schon in S) zu liegen. Gehört die Fläche zu II), so sind diese M-Transformierten reell und E) ist daher nicht möglich. Gehört sie zu III), so sind die M-Transformierten konjugiert komplex. Da sie von den Schnittpunkten einer reellen Geraden mit den Leitgeraden von K erzeugt werden, sind diese konjugiert komplex und die Fläche gehört zu E) oder zu S), während H) und P) nicht möglich sind.

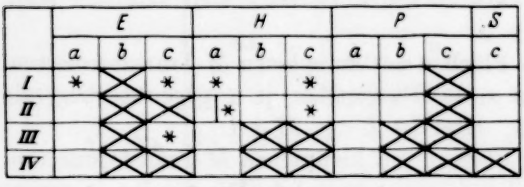

Fig. 4.

Die Kombinationen, die auf Grund dieser Bemerkungen nicht vorkommen können, sind in der folgenden Tabelle mit einem Kreuz versehen. Es bleiben 23 Möglichkeiten; von diesen kann man durch Wahl geeigneter Werte von L, M, a, b, c, d in einem Anfangspunkt zeigen, daß sie alle wirklich realisierbar sind. Wir wollen das jedoch hier nicht durchführen[24]).

Bei hyperbolisch gekrümmten Flächen ist π eine reelle Abbildung des Geradenraumes. Für sie ist es also sinnvoll, Klasse a) weiter zu unterteilen in

a_r) π_g hat reelle Fixpunkte: $p^2 - 4q > 0$;

a_k) π_g hat konjugiert komplexe Fixpunkte: $p^2 - 4q < 0$.

Der letztgenannte Fall kann aber nur vorkommen bei Flächen, die zu II) und H) gehören. Die Fixpunkte von π_g trennen nämlich nach § 9, 2. die Schnittpunkte von g mit Q harmonisch, von beiden Punktepaaren ist also mindestens eines reell. Daher ist a_k) mit E) nicht vereinbar; ebensowenig aber mit P), denn hier fällt ein Fixpunkt in den reellen Berührungspunkt von g mit Q. Schließlich sind bei III) oder IV) die Größen $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ paarweise konjugiert komplex und daher ist nach (130) auch hier $p^2 - 4q > 0$.

Daß eine Fläche der Klasse II H) tatsächlich sowohl zu a_r) als zu a_k) gehören kann, zeigt man wieder durch Beispiele.

Die Klassen, in denen Flächen mit geschlossener GODEAUX-Kette vorkommen, sind in der Tabelle mit einem Stern bezeichnet. Die hyperbolisch gekrümmten, deren GODEAUX-Kette nicht die Periode 8 hat, gehören alle zur Klasse II H a_k).

Die reellen nichtentarteten Flächen eines M-Systems gehören alle der gleichen Klasse an.

[24]) Man vgl. auch § 9, Bemerkungen 5 und 6.

Daß die reellen M-Transformierten einer elliptisch gekrümmten Kongruenzfläche wieder elliptisch gekrümmt sind, folgt aus der Invarianz der Asymptotenlinien; entsprechendes gilt bei hyperbolischer Krümmung. Die Invarianz der Klassen II), III), IV) bei M-Transformation ergibt sich aus (105), die der Klasseneinteilung 2. daraus, daß die Kongruenz K bei M-Transformation invariant ist. Die Invarianz der Klasseneinteilung 3. folgt aus dem in § 3 nachgewiesenen Transformationsverhalten von π_g.

§ 7. Die Gruppe des M-Systems.

Wir haben in § 4 gesehen, daß jeder Parallelverschiebung des M-Diagrammes um einen der Vektoren

$$k(2, 2) + l(2, -2) \tag{135}$$

eine projektive Abbildung des M-Systems auf sich entspricht. Die von diesen Projektivitäten gebildete Gruppe wollen wir jetzt noch untersuchen. Sie ist isomorph zur Gruppe der Translationen (135); diese Isomorphie ist aber immer dann mehrstufig, wenn gewissen der Parallelverschiebungen die identische Projektivität entspricht.

Bezeichnet $\mathfrak{T}$ die Gruppe der Verschiebungen (135), so bilden diejenigen ihrer Elemente, denen die identische Projektivität entspricht, eine Untergruppe $\mathfrak{T}_0$, und die Gruppe $\mathfrak{G}$ der Projektivitäten des M-Systems in sich ist dann einstufig isomorph zur Faktorgruppe $\mathfrak{T}/\mathfrak{T}_0$. Die zu den Elementen von $\mathfrak{T}_0$ gehörigen Vektoren (135) bilden einen Untermodul dieses Vektorsystems. Wir nennen diese Vektoren die Perioden des M-Systems.

Wir setzen uns zum Ziel, die Gruppe $\mathfrak{G}$ zu den absoluten Invarianten p und q der Kongruenzfläche in Beziehung zu setzen, bzw. zu den Wurzeln ξ_1 und ξ_2 der zugehörigen charakteristischen Gl. (76).

Betrachten wir zunächst die in § 5 untersuchten Entartungsfälle. Hier gehören nur zu den Vektoren $k(2, 2)$ Projektivitäten, und es fragt sich, ob zu einem solchen Vektor für $k \neq 0$ die identische Projektivität gehören kann.

Jede unserer Projektivitäten läßt sämtliche Geraden der Kongruenz K fest. Man überzeugt sich nun leicht, daß 2 derartige Projektivitäten P_1, P_2 identisch sind, wenn sie auf *einer* Geraden g dieser Kongruenz die gleiche Wirkung haben. Betrachtet man nämlich eine Quadrik, von der eine Geradenschar aus Geraden von K besteht, unter denen auch g vorkommt, so bleibt bei $P_1 P_2^{-1}$ jede Gerade der anderen Schar von Q fest, da das für ihren Schnittpunkt mit g gilt. Also bleibt jeder Punkt von Q bei $P_1 P_2^{-1}$ fest und diese Projektivität ist die identische[25]).

Es genügt daher in unserem Fall, die Wirkung der zu (2, 2) gehörigen Projektivität auf eine feste Hauptnormale unserer Fläche zu kennen. Offenbar wird in dieser eine Projektivität Γ induziert, deren Fixpunkte die Schnittpunkte i und j unsrer Normalen mit den Leitgeraden der Kongruenz K sind.

[25]) Dieser Beweis versagt, wenn K singulär ist. Statt der Quadriken kann man hier aber die Büschel des zu K gehörigen Geradenbündels verwenden.

Sie werden durch (123) dargestellt, es ist also etwa

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{p} + g\,\mathfrak{x}, \qquad \mathfrak{j} = \mathfrak{p} - g\,\mathfrak{x}, \tag{136}$$

wobei

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{y} + (c-b)\,\mathfrak{x}_1 + (d-a)\,\mathfrak{x}_2 + A\,\mathfrak{x}. \tag{137}$$

Nehmen wir zunächst an, daß die Kongruenz K nicht parabolisch ist, so daß $g \neq 0$. Ist dann $\mathfrak{q}$ ein von den Fixpunkten verschiedener Punkt unserer Hauptnormalen, so ist das Doppelverhältnis

$$D = (\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{q}, \Gamma\mathfrak{q}) \tag{138}$$

von der Wahl von $\mathfrak{q}$ unabhängig und kennzeichnet Γ. Setzen wir $\mathfrak{q} = \mathfrak{x}$, so ist nach der ersten Gl. (114)

$$\Gamma\mathfrak{q} = \mathfrak{p} + (H\,c + K\,d)\,\mathfrak{x} \tag{139}$$

und wir finden

$$D = \frac{g + H\,c + K\,d}{g - H\,c - K\,d}. \tag{140}$$

Da δ_1 entartet, ist in unserm Fall analog zu (126), (131)

$$p = 2\,\frac{K\,d}{H\,c}, \qquad g^2 = (K\,d - H\,c)^2; \tag{141}$$

legen wir das Vorzeichen von g fest durch

$$g = K\,d - H\,c \tag{142}$$

und beachten wir, daß $\xi_1 = \xi_2$, so finden wir

$$D = \frac{K\,d}{H\,c} = \xi_1 = \xi_2. \tag{143}$$

Entartet eine Fläche des M-Systems, so ist die Gruppe des M-Systems genau dann endlich, wenn es die Gruppe der GODEAUX*-Kette ist; beide Gruppen haben die gleiche Ordnung.*

Die Projektivität Γ hat nämlich genau dann die Ordnung n, wenn $D^n = 1$.

Hat K zusammenfallende Leitlinien, so versagt die Kennzeichnung von Γ durch das Doppelverhältnis D. In diesem Fall läßt sich aber Γ darstellen durch

$$\Gamma\mathfrak{p} = \mathfrak{p}, \qquad \Gamma\mathfrak{x} = \mathfrak{x} + \frac{1}{H\,c + K\,d}\,\mathfrak{p}, \tag{144}$$

denn dies ist bis auf Umnormungen die einzige Projektivität unserer Hauptnormalen in sich mit dem doppelten Fixpunkt $\mathfrak{p}$, die den Punkt $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{p} + (H\,c + K\,d)\,\mathfrak{x}$ abbildet.

In diesem Fall haben also sowohl π wie Γ stets unendliche Ordnung und der obige Satz bleibt richtig[26]).

Wenden wir uns jetzt dem allgemeinen Fall zu, nehmen wir also an, daß sämtliche Punkte des M-Diagrammes nichtentartete Flächen darstellen. Zu-

[26]) Er gilt auch, wenn K singulär ist. $\mathfrak{p}$ ist dann fest, also das Zentrum des zu K gehörigen Geradenbündels.

nächst sei K wieder parabolisch. Zum Vektor (2, 2) des M-Diagrammes gehört dann wieder die durch (144) dargestellte Projektivität Γ unserer Hauptnormalen in sich, zu $(-2, 2)$ ebenso die Projektivität Γ_1 für die

$$\Gamma_1 \mathfrak{p} = \mathfrak{p}, \qquad \Gamma_1 \mathfrak{x} = \mathfrak{x} + \frac{1}{-Hc + Kd}\,\mathfrak{p}. \tag{145}$$

Zum Vektor (135) gehört daher dann und nur dann die identische Projektivität, wenn

$$\frac{k}{Hc + Kd} + \frac{l}{-Hc + Kd} = 0.$$

Ist die Kongruenz K parabolisch, so besteht $\mathfrak{T}_0$ genau dann nicht nur aus der Identität, wenn die Zahl $\frac{Kd}{Hc} = R$ rational ist; ist

$$\frac{R+1}{R-1} = -\frac{r}{s}$$

mit ganzzahligen teilerfremden r, s, so besteht $\mathfrak{T}_0$ aus allen Vielfachen des Vektors

$$r(2, 2) + s(-2, 2).$$

Die Bedingung bedeutet nach (78), daß $q = \xi_1 \xi_2$ Quadrat einer rationalen Zahl sein soll.

Ist K nicht parabolisch, so gehört zu (2, 2) wieder die Projektivität mit dem Doppelverhältnis (140) unserer Hauptnormalen in sich, die i und j festläßt. Ebenso gehört zu $(-2, 2)$ eine ebensolche Projektivität Γ_1 mit dem Doppelverhältnis

$$D_1 = \frac{g - Hc + Kd}{g + Hc - Kd}. \tag{146}$$

Zum Vektor (135) gehört dann und nur dann die identische Abbildung unserer Hauptnormalen, wenn

$$D^k D_1^l = 1. \tag{147}$$

Dieses Ergebnis ist jedoch wenig übersichtlich und wir wollen deshalb noch etwas anders vorgehen. Der Anschaulichkeit halber setzen wir dabei voraus, daß K elliptisch ist. Die Formeln, die wir erhalten, lassen sich aber auch im hyperbolischen Fall verwenden.

Die Schnittpunkte I und J der Geraden $\boldsymbol{g}$ des R_5 mit $\boldsymbol{Q}$ sind in diesem Fall konjugiert komplex; die Schnittpunkte der von diesen Punkten dargestellten Leitgeraden der Kongruenz K mit unserer Hauptnormalen seien wieder durch i, j bezeichnet.

Die Projektivitäten der Gruppe $\mathfrak{G}$ werden nach § 4 erzeugt von den Nullsystemen gewisser linearer Komplexe, deren Bildpunkte im R_5 auf $\boldsymbol{g}$ liegen.

Ist nun $\mathfrak{k}$ ein Punkt von $\boldsymbol{g}$, der nicht auf $\boldsymbol{Q}$ liegt, $\mathfrak{l}$ der zu $\mathfrak{k}$ in bezug auf $\boldsymbol{Q}$ konjugierte Punkt von $\boldsymbol{g}$, so bewirkt das zum Komplex $\mathfrak{k}$ gehörige Nullsystem im R_5 eine Projektivität π_1, für die bei geeigneter Normierung

$$\pi_1 \mathfrak{c} = \mathfrak{c}, \quad \pi_1 \mathfrak{d} = \mathfrak{d}, \quad \pi_1 \mathfrak{e} = \mathfrak{e}, \quad \pi_1 \mathfrak{f} = \mathfrak{f}, \quad \pi_1 \mathfrak{l} = \mathfrak{l}, \quad \pi_1 \mathfrak{k} = -\mathfrak{k}. \tag{148}$$

Zu jeder von unseren Nullsystemen erzeugten Projektivität oder Korrelation des R_3 gehört eine Projektivität des R_5, die bei geeigneter Normierung ebenfalls die Vektoren $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ festläßt. Stellen wir die Punkte von $\boldsymbol{g}$ in der Form $\lambda\,\mathfrak{r}+\mu\,\mathfrak{s}$ dar, so bewirkt diese Projektivität eine homogene lineare Transformation von λ, μ, die sie vollständig festlegt und die die Determinante ± 1 hat. Denn das gilt für jede der Projektivitäten (148), von denen sie erzeugt wird.

Wir betrachten nun λ, μ als affine Koordinaten einer Hilfsebene. Jedem Punkt von $\boldsymbol{g}$ entspricht dann in dieser Hilfsebene eine Gerade durch den Nullpunkt. Die Gerade, die in dieser Weise dem Punkte $\mathfrak{k}$ entspricht, wollen wir auch als Bild des linearen Komplexes $\mathfrak{k}$ in unserer Hilfsebene auffassen.

Wir führen nun in unserer Hilfsebene, die wir auch das Komplexbild der Kongruenzfläche nennen, eine Euklidische Metrik ein, bei der die Bildgeraden von I und J die isotropen sind. Da diese bei jeder unserer Transformationen festbleiben oder vertauscht werden, sind dann die zu ihnen gehörigen Affinitäten der Determinante ± 1 des Komplexbildes in dieser Metrik Bewegungen. Insbesondere läßt die zu (148) gehörige Affinität die Bildgerade von $\mathfrak{l}$ punktweise fest, sie ist also die Spiegelung an dieser Bildgeraden.

Dem Nullsystem eines linearen Komplexes, dem die Geraden unserer linearen Kongruenz angehören, entspricht also im Komplexbild die Spiegelung an der Senkrechten zur Bildgeraden dieses Komplexes.

Der Projektivität des R_3, die durch aufeinanderfolgende Ausübung der Nullsysteme zweier unserer Komplexe entsteht, entspricht die Bewegung des Komplexbildes, die durch nacheinanderfolgende Spiegelung an den Senkrechten zu den Bildgeraden dieser Komplexe entsteht, also die Drehung um den doppelten Winkel dieser Senkrechten, oder auch der Bildgeraden selbst.

Zur Drehung des Komplexbildes um 180° gehört insbesondere die Spiegelung des R_3 an den Leitgeraden der Kongruenz K; denn diese ist die einzige involutorische Projektivität des R_3, die die Kongruenzgeraden einzeln festläßt.

Seien nun $m, n, \overline{m}, \overline{n}$ die Bildgeraden der Komplexe $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \overline{\mathfrak{m}}, \overline{\mathfrak{n}}$. Die Projektivität, die der Verschiebung des M-Diagrammes um den Vektor (2, 2) entspricht, erhält man als Produkt der Nullsysteme von $\overline{\mathfrak{n}}$ und $\mathfrak{m}$, aber auch von denjenigen von $\overline{\mathfrak{m}}$ und $\mathfrak{n}$. Im Komplexbild entspricht ihr also Drehung um den doppelten Winkel von $\overline{n}$ nach m, aber auch Drehung um den doppelten Winkel von $\overline{m}$ nach n. Beide Winkel sind also gleich. Das bedeutet, daß die Geradenpaare $(m, \overline{m})$ und $(n, \overline{n})$ die gleichen Winkelhalbierenden haben. Projektiv gesprochen heißt das, daß sie mit den Isotropen einer Involution angehören. Das läßt sich auch rechnerisch leicht bestätigen, denn nach (96), (121) genügen die zum Paare $\mathfrak{m}, \overline{\mathfrak{m}}$ gehörigen Werte von λ, μ der Gleichung

$$f(\lambda,\mu) = (M - b^2)\,\lambda^2 - 2b\,d\,\lambda\mu - d^2\mu^2 = 0, \tag{149}$$

die zu $\mathfrak{n}, \overline{\mathfrak{n}}$ gehörigen der Gleichung

$$g(\lambda,\mu) = -\,c^2\,\lambda^2 - 2a\,c\,\lambda\mu + (L - a^2)\,\mu^2 = 0, \tag{150}$$

während die Punkte I, J nach (42) dargestellt werden durch

$$f(\lambda,\mu) - g(\lambda,\mu) = 0. \tag{151}$$

Wir verwenden die Winkelhalbierenden jetzt noch als Achsen eines Cartesischen Koordinatensystems im Komplexbild; die Koordinaten x, y dieses Systems hängen dann durch eine homogene affine Transformation mit λ, μ zusammen.

Schließen $m, \bar{m}$ mit der x-Achse dieses Systems die Winkel $\pm\varphi$; $n, \bar{n}$ die Winkel $\pm\psi$ ein, so wird das erste Geradenpaar dargestellt durch

$$F(x,y) = \cos^2\varphi\, y^2 - \sin^2\varphi\, x^2 = 0, \tag{152}$$

das zweite durch

$$G(x,y) = \cos^2\psi\, y^2 - \sin^2\psi\, x^2 = 0. \tag{153}$$

Bei der obengenannten affinen Transformation ist

$$F(x,y) = r\, f(\lambda,\mu), \qquad G(x,y) = r\, g(\lambda,\mu). \tag{154}$$

Daß hier in beiden Gleichungen der gleiche Proportionalitätsfaktor steht, folgt daraus, daß $F(x,y) - G(x,y)$ mit $x^2 + y^2$ proportional ist, gleich Null gesetzt also die Isotropen darstellt, und beim Umrechnen in (151) übergehen muß.

Für unsere Involution haben wir jetzt die Darstellung

$$F(x,y) - \xi\, G(x,y) = r\,[f(\lambda,\mu) - \xi\, g(\lambda,\mu)] = 0. \tag{155}$$

Die zu ihren Doppelelementen gehörigen Werte von ξ sind nach (149), (150) die Wurzeln der Gleichung

$$L\, c^2\, \xi^2 - (-A^2 + L\, b^2 + M\, a^2 - L\, M)\, \xi + M\, d^2 = 0; \tag{156}$$

sie sind also identisch mit den Wurzeln ξ_1, ξ_2 der charakteristischen Gl. (76) von π_g.

Andererseits ist nach (152), (153) etwa

$$\xi_1 = \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\psi}, \qquad \xi_2 = \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\psi}: \tag{157}$$

Zwischen den Winkeln φ, ψ und den Wurzeln der charakteristischen Gleichung von π_g bestehen die Beziehungen (157).

Aus (157) folgt durch Auflösen

$$\sin^2\varphi = \frac{\xi_2(1-\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1}, \qquad \sin^2\psi = \frac{1-\xi_1}{\xi_2 - \xi_1}; \tag{158}$$

daraus sieht man, daß die Figur der Geraden $m, \bar{m}, n, \bar{n}$ bis auf die Vertauschungen, die dem Wechseln der Vorzeichen von H und K entsprechen, eindeutig festgelegt ist.

Der zum Vektor (2, 2) des M-Diagrammes gehörigen Projektivität entspricht im Komplexbild das Produkt der Spiegelungen an n und m, also die

Drehung um $2(\varphi+\psi)$. Ebenso bewirkt die zu $(-2, 2)$ gehörige Projektivität eine Drehung um $2(\varphi-\psi)$.

Zum Vektor (135) gehört also dann und nur dann die identische Projektivität, wenn

$$2k(\varphi+\psi)+2l(\varphi-\psi)=2N\pi \tag{159}$$

mit ganzzahligem N:

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ des M-Systems ist dann und nur dann endlich, wenn φ und ψ beide zu π rational sind.

Denn das tritt dann und nur ein, wenn (159) zwei linear unabhängige Lösungen für k, l hat; die zu $\mathfrak{T}_0$ gehörigen Vektoren bilden dann ein Teilgitter von (135).

Es sei noch hervorgehoben, daß sämtliche betrachteten Fälle wirklich vorkommen. Man kann ja die Anfangswerte des in § 1 aufgestellten Systems von Differentialgleichungen so wählen, daß p und q für die zugehörige Fläche beliebige Werte haben, nur $q=0$ ist auszuschließen. Es gibt daher auch Kongruenzflächen, für die ξ_1 und ξ_2 beliebig vorgegebene von 0 verschiedene Werte haben; sie hängen von 2 beliebigen Funktionen einer Veränderlichen ab.

Im zuletzt behandelten Fall lassen sich daher auch die Werte von φ und ψ beliebig vorschreiben. Wir zeigen:

Zu jedem Wertepaar φ, ψ, für das die Geraden $m, \bar{m}, n, \bar{n}$ alle verschieden ausfallen, und nur zu solchen Paaren, gehören Kongruenzflächen mit nichtentartetem M-System. Sie hängen von 2 beliebigen Funktionen einer Veränderlichen ab.

ξ_1 und ξ_2 sind nämlich genau dann endlich und $\neq 0$, wenn φ und ψ keine Vielfachen von $\pi/2$, also m und $\bar{m}$, n und $\bar{n}$ verschieden sind. Entartungen treten stets dann ein, wenn $\xi_1=\xi_2$, also

$$\operatorname{tg}\varphi=\pm\operatorname{tg}\psi.$$

Das ist aber genau dann der Fall, wenn $\psi=\pm\varphi+N\pi$, also wenn m mit n oder mit $\bar{n}$ zusammenfällt.

Wählt man φ und ψ beliebig, so besteht im allgemeinen keine Beziehung (159), die Punkte des M-Diagrammes stellen dann lauter verschiedene Flächen dar[27]).

Nach (157) ist

$$q=\xi_1\xi_2=\frac{\sin^2 2\varphi}{\sin^2 2\psi}. \tag{160}$$

$q=1$ führt daher auf

$$\psi=\pm\varphi+N\frac{\pi}{2}:$$

Kennzeichnend für die Kongruenzflächen unserer Klasse mit $q=1$ ist, daß die Geraden $m, \bar{m}, n, \bar{n}$ paarweise aufeinander senkrecht stehen.

[27]) Zwei nichtentartete Flächen verschiedener Klassen des M-Systems sind stets verschieden. Eine gemeinsame Fläche zweier Systeme müßte nämlich erzeugt werden von einem Schnittpunkt einer Hauptnormalen von $\mathfrak{x}$ mit einer Diagonalen des Vierseits von DEMOULIN. Da durch einen solchen Schnittpunkt zwei Geraden von K gehen würden, müßte er auf einer Leitgeraden von K liegen und die fragliche Fläche wäre entartet.

Da die Vorzeichen unwesentlich sind, können wir etwa

$$\psi = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

annehmen. Dann ist $k=0, l=2$ eine Lösung von (159). Zum Vektor $(-4, 4)$ gehört also die identische Projektivität. Zu $(-2, 2)$ gehört die Drehung des Komplexbildes um π, also im R_3 die Spiegelung an den Leitgeraden von K.

Einen besonders einfachen Fall haben wir, wenn $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $\psi = -\frac{\pi}{6}$. Die Lösungen von (159) sind dann die ganzzahligen Linearkombinationen von $k=0, l=2$ und $k=3, l=1$. Jede Klasse des M-Systems besteht aus 6 verschiedenen Flächen, auch unter den im M-Diagramm dargestellten linearen Komplexen gibt es 6 verschiedene. Kennzeichnend für diese Flächen sind die Bedingungen $p=10/3$, $q=1$; denn es ist $\xi_1 = \frac{1}{3}$, $\xi_2 = 3$.

§ 8. Die Gegenfläche.

Wenden wir uns jetzt wieder den Kongruenzflächen zu, bei denen die GODEAUX-Kette geschlossen ist. Hat diese $4n$ Glieder, so stellen bekanntlich[28]) die $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{u}$ gegenüberliegenden Flächen $\mathfrak{u}_{2n-1}$ und $\mathfrak{u}_{2n}$ ebenfalls die Schmiegtangenten einer Fläche des R_3 dar, die wir die Gegenfläche der vorgegebenen nennen. Wir zeigen zunächst:

Die Gegenfläche gehört einem der 4 in § 4 betrachteten Systeme von Schichtflächen an, zu denen auch sämtliche Flächen des M-Systems von $\mathfrak{x}$ gehören. Ist n gerade, so gehört sie zu einer der beiden Flächenscharen, deren Flächen zu $\mathfrak{x}$ projektiv oder korrelativ sind, ist n ungerade, so zu einer der beiden anderen Scharen; sie ist dann projektiv zu einer M-Transformierten von $\mathfrak{x}$.

Deuten wir nämlich die zur Gegenfläche gehörigen Größen und Vektoren durch ein darübergesetztes $\hat{}$ an, so ist

$$\hat{\mathfrak{u}}\,(=)\,\mathfrak{u}_{2n}, \qquad \hat{\mathfrak{v}}\,(=)\,\mathfrak{u}_{2n-1}, \qquad \hat{\mathfrak{a}}\,(=)\,\mathfrak{u}_{2n+1}, \qquad \hat{\mathfrak{b}}\,(=)\,\mathfrak{u}_{2n-2}.$$

Ist also n gerade, so liegt in der Ebene durch $\hat{\mathfrak{u}}, \hat{\mathfrak{v}}, \hat{\mathfrak{a}}$ der Punkt $\mathfrak{e}$, in der Ebene durch $\hat{\mathfrak{u}}, \hat{\mathfrak{v}}, \hat{\mathfrak{b}}$ der Punkt $\mathfrak{f}$. Wie in (115) ergibt sich hieraus, daß von den Schnittpunkten $\mathfrak{e}+\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{e}-\mathfrak{f}$ von $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ mit Q einer eine Gerade in der Tangentenebene der Gegenfläche, der andere eine Gerade durch den Flächenpunkt $\hat{\mathfrak{x}}$ dieser Fläche darstellt. Die Gegenfläche ist also in diesem Fall Schichtfläche der beiden Hauptnormalenkongruenzen von $\mathfrak{x}$.

Ist n ungerade, so liegt $\mathfrak{d}$ in der Ebene durch $\hat{\mathfrak{u}}, \hat{\mathfrak{v}}, \hat{\mathfrak{a}}$; $\mathfrak{c}$ in der Ebene durch $\hat{\mathfrak{u}}, \hat{\mathfrak{v}}, \hat{\mathfrak{b}}$; man sieht dann genau so, daß die Gegenfläche Schichtfläche der von den Diagonalen des Vierseits von DEMOULIN von $\mathfrak{x}$ erzeugten Kongruenzen ist.

Es liegt auf der Hand, zu fragen, ob die Gegenfläche im M-System von $\mathfrak{x}$ vorkommen kann. Hierüber gilt der Satz:

Wenn die Gegenfläche mit der vom Punkte (x, y) des M-Diagrammes dargestellten Fläche des M-Systems identisch ist, so ist der Vektor $(2x, 2y)$ Periodenvektor dieses Systems.

[28]) Vgl. etwa G, p. 18.

Da nämlich die Gegenfläche von der Wahl der Vorzeichen von H und K unabhängig ist, wird sie auch durch den Punkt $(-x, -y)$ des M-Diagrammes dargestellt, dieser und (x, y) stellen daher die gleiche Fläche dar.

Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht: Ist die GODEAUX-Kette einer Kongruenzfläche geschlossen und hat ihr M-System Perioden, so braucht die Gegenfläche dem M-System nicht anzugehören. Beispiele werden sich im folgenden ergeben.

Für die weitere Untersuchung sind Fallunterscheidungen nötig, und zwar nach verschiedenen Gesichtspunkten:

a) Hyperbolisch oder elliptisch gekrümmte Flächen,

b) Zugehörigkeit zur Klasse A oder B nach § 2,

c) n gerade oder ungerade.

Wir verzichten auf eine erschöpfende Darstellung und bringen nur einige allgemeine Sätze.

Jeder Fläche mit geschlossener GODEAUX-*Kette der Klasse B, deren Gegenfläche dem M-System angehört, entsprechen 2 Winkel φ und ψ, zwischen denen eine Beziehung der Form*

$$k\varphi + l\psi + m\pi = 0 \tag{161}$$

mit ganz rationalen k, l, m besteht und für die die Größen

$$\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\psi} = \xi_1, \qquad \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\psi} = \xi_2 \tag{162}$$

von 1 verschiedene n-te Einheitswurzeln sind.

Das folgt sofort aus dem oben hervorgehobenen Satz. Die Umkehrung gilt daher nicht.

Offenbar handelt es sich bei der Auffindung solcher Winkelpaare im Grunde um einen Satz der algebraischen Zahlentheorie. Aus (162) folgt nämlich

$$\sin^2\varphi = \frac{\xi_2(1-\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}, \qquad \sin^2\psi = \frac{1-\xi_1}{\xi_2-\xi_1}, \tag{163}$$

die Winkelfunktionen von φ und ψ sind daher algebraische Zahlen. Es dürfte wohl nicht leicht sein, sämtliche Lösungen anzugeben.

Hat das M-System einer Kongruenzfläche 2 linear unabhängige Perioden, so ist die GODEAUX-*Kette nicht geschlossen.*

Es gibt dann nämlich 2 linear unabhängige Beziehungen (161), daraus folgt aber, daß φ und ψ reell sind. ξ_1 und ξ_2 können dann keine von 1 verschiedenen Einheitswurzeln sein.

Beschränken wir uns auf hyperbolisch gekrümmte Flächen vom Typus B, so können wir nach S. 133

$$\psi = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

setzen. Für $k+l \neq 0$ würde dann aus (161) folgen, daß φ und ψ reell wären, im Widerspruch zu (162). Das M-System hat also nur $(-4, 4)$ und Vielfache dieses Vektors als Perioden; der erstgenannte Vektor ist ja nach § 7 für $q=1$ stets Periodenvektor.

Als Bildpunkt der Gegenfläche im M-Diagramm kommt daher nur $(-2, 2)$ in Frage; die Gegenfläche kann daher bei hyperbolisch gekrümmten Flächen vom Typus B nur dann im M-System vorkommen, wenn sie aus der Fläche selbst durch Spiegelung an den Leitgeraden der Kongruenz K hervorgeht. Denn die Fläche des M-Systems mit dem Bildpunkt $(-2, 2)$ hat in unserem Fall nach § 7 diese Eigenschaft.

Nach dem ersten Satz dieses Paragraphen muß dazu n gerade sein. Aber auch die Umkehrung gilt:

Die Gegenfläche einer hyperbolisch gekrümmten Fläche mit geschlossener GODEAUX-*Kette vom Typus B gehört dann und nur dann dem M-System an, wenn n gerade, also die Periode* $4n$ *der* GODEAUX-*Kette durch 8 teilbar ist. Sie wird im M-Diagramm durch den Punkt* $(-2, 2)$ *dargestellt, wenn H und K so normiert sind, daß* $(-4, 4)$ *eine Periode des M-Systems ist.*

Ist nämlich n gerade, so ist nach § 2, da ξ_1 und ξ_2 konjugiert komplexe n-te Einheitswurzeln sind, die nicht schon zum Exponenten $n/2$ gehören,

$$\pi_g^{n/2} = -E.$$

Die Abbildung $\pi^{n/2}$ führt daher $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ in sich über, während jeder Vektor, der einen Punkt von $\boldsymbol{g}$ darstellt, ein Minuszeichen erhält. Im Geradenraum handelt es sich also um eine Spiegelung an $\boldsymbol{g}$ und dem Raum durch $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$. Im R_3 entspricht dieser Abbildung aber, wie man leicht nachprüft, die Spiegelung an den Leitgeraden von K. Diese führt daher die Schmiegtangenten beider Gegenflächen und daher auch die Gegenflächen selbst ineinander über.

Die gleichen Sätze gelten offenbar für elliptisch gekrümmte Flächen vom Typus B, bei denen ξ_1 und ξ_2 konjugiert komplex sind. Wir erwähnen in diesem Zusammenhang noch den Satz:

Ist die GODEAUX-*Kette einer elliptisch gekrümmten Fläche vom Typus B geschlossen und n gerade, so ist die Gegenfläche stets dann zur Fläche selbst projektiv gleichwertig und entsteht aus ihr durch Spiegelung an den Leitgeraden von K, wenn weder* ξ_1 *noch* ξ_2 *eine zum Exponenten* $n/2$ *gehörige Einheitswurzel ist. Ist jedoch etwa* $\xi_1^{n/2} = 1$, *so entsprechen sich beide Gegenflächen beim Nullsystem eines linearen Komplexes, dem die Kongruenz K angehört; der Bildpunkt dieses Komplexes im* R_5 *ist der zur Wurzel* ξ_2 *gehörige Fixpunkt der Projektivität* π_g.

Den ersten Teil der Behauptung beweist man wie den vorangehenden Satz. Zum Nachweis des zweiten Teiles seien $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ die zu ξ_1 und ξ_2 gehörigen Fixpunkte von π_g; diese Punkte liegen nach § 9, 2. konjugiert in bezug auf die absolute Quadrik $\boldsymbol{Q}$ des Geradenraumes. Es ist dann

$$\pi_g^{n/2}\,\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t}_1, \qquad \pi_g^{n/2}\,\mathfrak{t}_2 = -\mathfrak{t}_2$$

und daher bleiben $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{t}$ bei $\pi^{n/2}$ fest, während der zur Hyperebene durch diese Punkte polare Punkt $\mathfrak{t}_2$ in $-\mathfrak{t}_2$ übergeht. $\pi^{n/2}$ ist also die Spiegelung an $\mathfrak{t}_2$ und dieser Hyperebene, diese stellt aber im R_3 das Nullsystem des von beiden dargestellten linearen Komplexes dar. Daraus folgt die Behauptung.

Übersichtlicher sind die Verhältnisse bei den Flächen vom Typus A:

Bei jeder Fläche mit geschlossener GODEAUX-*Kette der Periode* $4n$ *vom Typus A gehört die Gegenfläche dem M-System an; normiert man H und K so, daß* ϑ_1 *und* ϑ_2 *entarten, so wird sie durch den Punkt* (n, n) *des M-Diagrammes dargestellt. Ist n gerade, so entstehen beide Gegenflächen auseinander durch Spiegelung an den Leitgeraden der Kongruenz K.*

Nach § 5 sind bei unseren Flächen bei der gewählten Normierung die Bedingungen

$$A = HK, \qquad Hb = Ka \tag{164}$$

kennzeichnend, in(128) gilt das Pluszeichen. Die charakteristische Gl. (76) hat daher die doppelte Wurzel

$$\xi = \frac{Kd}{Hc}. \tag{165}$$

Ist n gerade, so sind sowohl $\pi^{n/2}$ wie die Projektivität, die $\mathfrak{x}$ auf die Fläche (n, n) abbildet, involutorisch und lassen jede Gerade von K fest. Daher sind beide Projektivitäten mit der Spiegelung an den Leitgeraden von K identisch und unser Satz ist bewiesen.

Etwas komplizierter ist der Nachweis für ungerades n. Geben wir die zur i-ten M-Transformierten gehörenden Größen durch den angehängten eingeklammerten Index i an, so ist nach § 3

$$\mathfrak{c}_{(0)} = -\varepsilon_{(0)} P H^{-1} \mathfrak{f}, \qquad \mathfrak{d}_{(0)} = -\varepsilon_{(0)} Q K^{-1} \mathfrak{e},$$

$$\mathfrak{e}_{(0)} = -\frac{\varepsilon_{(0)}}{2} H^{-1} \mathfrak{d}, \qquad \mathfrak{f}_{(0)} = -\frac{\varepsilon_{(0)}}{2} K^{-1} \mathfrak{c}.$$

Bei unseren Flächen ist weiter

$$\mathfrak{m}_{(0)} = -\frac{\varepsilon_{(0)}}{2} \cdot \frac{PQ}{LM\varrho_{(0)}} Kd \cdot \mathfrak{m}, \qquad \bar{\mathfrak{m}}_{(0)} = \frac{\varepsilon_{(0)}}{4} \frac{PQ}{LM} \mathfrak{n},$$

$$\mathfrak{n}_{(0)} = -\frac{\varepsilon_{(0)}}{2} \frac{PQ}{LM\varrho_{(0)}} Hc\,\mathfrak{n}, \qquad \bar{\mathfrak{n}}_{(0)} = \frac{\varepsilon_{(0)}}{4} \frac{PQ}{LM} \mathfrak{m}.$$

Analoge Formeln gelten für ϑ_3; um sie zu erhalten, kann man in den obigen H durch $-H$, K durch $-K$, $\mathfrak{m}$ durch $\bar{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{n}$ durch $\bar{\mathfrak{n}}$ und umgekehrt ersetzen. Man findet

$$\mathfrak{c}_{(3)} = \varepsilon_{(3)} P H^{-1} \mathfrak{f}, \qquad \mathfrak{d}_{(3)} = \varepsilon_{(3)} Q K^{-1} \mathfrak{e}, \qquad \mathfrak{e}_{(3)} = \frac{\varepsilon_{(3)}}{2} H^{-1} \mathfrak{d}, \qquad \mathfrak{f}_{(3)} = \frac{\varepsilon_{(3)}}{2} K^{-1} \mathfrak{c}$$

$$\bar{\mathfrak{m}}_{(3)} = \frac{\varepsilon_{(3)}}{2} \frac{PQ}{LM\varrho_{(3)}} Kd \cdot \bar{\mathfrak{m}}, \qquad \mathfrak{m}_{(3)} = \frac{\varepsilon_{(3)}}{4} \frac{PQ}{LM} \bar{\mathfrak{n}},$$

$$\bar{\mathfrak{n}}_{(3)} = \frac{\varepsilon_{(3)}}{2} \frac{PQ}{LM\varrho_{(3)}} Hc\,\bar{\mathfrak{n}}, \qquad \mathfrak{n}_{(3)} = \frac{\varepsilon_{(3)}}{4} \frac{PQ}{LM} \bar{\mathfrak{m}}.$$

Beachten wir noch, daß in unserem Fall

$$\bar{\mathfrak{n}} = \frac{H-a}{d} \mathfrak{m}, \qquad \bar{\mathfrak{m}} = \frac{K-b}{c} \mathfrak{n},$$

$$\varrho_{(0)} = 2H(b-K), \qquad \varrho_{(3)} = -2H(b+K),$$

so sehen wir, daß die Projektivität, die im M-Diagramm zum Vektor $(2, 2\rangle$ gehört, im R_5 eine projektive Abbildung bewirkt, die $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ festläßt und $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ der Reihe nach auf $\xi\,\mathfrak{m}$ und $\xi^{-1}\,\mathfrak{n}$ abbildet.

Die in § 2 betrachteten Projektivitäten π und π_0 lassen ebenfalls $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ fest, π_0 bildet $\mathfrak{u}_{-2}$ und $\mathfrak{u}_{-1}$ ab auf $\breve{\mathfrak{u}}_0$ und $\breve{\mathfrak{u}}_1$, während $\pi^{(n+1)/2}$ die gleichen Punkte abbildet auf $\mathfrak{u}_{2n}$ und $\mathfrak{u}_{2n+1}$, also auf die Punkte $\hat{\mathfrak{u}}_0$, $\hat{\mathfrak{u}}_1$ der GODEAUX-Kette der Gegenfläche. Die Projektivität

$$\pi^{n+1/2}\,\pi_0^{-1}$$

bildet also entsprechende Flächen der GODEAUX-Ketten von $\mathfrak{z}_0$ und von der Gegenfläche aufeinander ab.

Man findet

$$\pi_0\,\mathfrak{m} = \xi\,\mathfrak{m}, \qquad \pi_0\,\mathfrak{n} = \mathfrak{n},$$

während

$$\pi\,\mathfrak{m} = \xi\,\mathfrak{m}, \qquad \pi\,\mathfrak{n} = \xi\,\mathfrak{n}.$$

Daher ist

$$\pi^{(n+1)/2}\,\pi_0^{-1}\,\mathfrak{m} = \xi^{(n-1)/2}\,\mathfrak{m}, \qquad \pi^{(n+1)/2}\,\pi_0^{-1}\,\mathfrak{n} = \xi^{(n+1)/2}\,\mathfrak{n}.$$

Die gleiche Wirkung hat aber die $(n-1)/2$-te Potenz der zum Vektor $(2, 2\rangle$ des M-Diagrammes gehörigen Projektivität. Da diese $\mathfrak{z}_0$ auf die zum Punkte (n, n) des M-Diagrammes gehörige Fläche des M-Systems abbildet, folgt auch hier die Behauptung des Satzes.

Offenbar enthält das M-System in unserem Fall $2n$ verschiedene Flächen, die paarweise Gegenflächen voneinander und zu je n projektiv gleichwertig sind.

§ 9. Ergänzende Bemerkungen. Beispiele.

1. Aus (124), (78), (79) folgt

$$g^2 = L\,c^2(1 + q - p) = L\,c^2(1 - \xi_1)\,(1 - \xi_2). \tag{166}$$

Die Kongruenz K ist daher dann und nur dann parabolisch, wenn 1 eine Wurzel der charakteristischen Gl. (76) ist. Daß die Bedingung notwendig ist, wurde schon in § 2 gezeigt.

Entartet K, so ist $\pi_g = E$ und (76) hat dann 2 Wurzeln 1. Letzteres kann aber auch vorkommen, wenn K nicht singulär ist, nämlich bei sämtlichen Flächen der Klassen IPb) und IIPb).

2. $\lambda\,\mathfrak{r} + \mu\,\mathfrak{s}$ ist dann und nur dann Fixpunkt von π_g, wenn

$$\begin{cases} d\,(a\,A - L\,b)\,\mu^2 + 2\,(a^2\,b^2 - c^2\,d^2 - M\,a^2 - L\,b^2 + L\,M)\,\lambda\mu + \\ \qquad + c\,(b\,A - M\,a)\,\lambda^2 = 0. \end{cases} \tag{167}$$

Mit Hilfe dieser Formel und von (42) läßt sich leicht bestätigen, daß die Fixpunkte von π_g die Schnittpunkte der Geraden g mit Q harmonisch trennen. Im Komplexbild entsprechen ihnen die Winkelhalbierenden von $m, \overline{m}$ und $n, \overline{n}$.

3. Projiziert man die GODEAUX-Kette einer Kongruenzfläche aus g als Projektionszentrum auf einen zu g windschiefen dreidimensionalen linearen Raum R, so haben $\mathfrak{u}_m$ und $\mathfrak{u}_{m+4}$ nach (60) die gleiche Projektion, es entsteht also eine geschlossene LAPLACE-Kette der Periode 4. Diese steht zu der von den Flächen $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{f}, \mathfrak{e}$ gebildeten Kette in einem engen Zusammenhang: Es gibt eine Korrelation, die sie überführt in die zur letztgenannten Kette dualen Kette[29]). Diese Korrelation ist die Polarenbildung an Q, sie bildet jeden Punkt von R ab auf den Schnitt von G mit der zu R in bezug auf Q polaren Hyperebene.

Die GODEAUX-Kette ist nämlich bekanntlich autopolar in bezug auf Q; die Hyperebene durch $\mathfrak{u}_{m-2}, \mathfrak{u}_{m-1}, \mathfrak{u}_m, \mathfrak{u}_{m+1}, \mathfrak{u}_{m+2}$ ist polar zu $\mathfrak{v}_{-m}$, also $\mathfrak{u}_{-m-1}$. Diese Hyperebene trifft G in einer zweidimensionalen Ebene, denn ihr Pol liegt nicht auf der Polaren g von G. Nach (44) wird diese Ebene aufgespannt von den Punkten $\mathfrak{v}_m, \mathfrak{v}_{m+1}, \mathfrak{v}_{m+2}$ unserer LAPLACE-Kette in G. Diese Ebene der dualen Kette ist also polar zu g und $\mathfrak{u}_{-m-1}$ und damit auch zur Projektion von $\mathfrak{u}_{-m-1}$, wie gezeigt werden sollte.

Den Projektionen von $\mathfrak{b}, \mathfrak{v}, \mathfrak{u}, \mathfrak{a}$ entsprechen bei unserer Korrelation der Reihe nach die Ebenen $(\mathfrak{e}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$, $(\mathfrak{f}, \mathfrak{e}, \mathfrak{c})$, $(\mathfrak{d}, \mathfrak{f}, \mathfrak{e})$, $(\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{f})$.

Die Projektion der GODEAUX-Kette hat die gleichen DARBOUX-Invarianten wie diese. Die GODEAUX-Kette hat also die gleichen DARBOUX-Invarianten — die mit der Periode 4 wiederkehren —, wie die Kette der Flächen $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ in Ebenenkoordinaten.

Bekanntlich kann man die DARBOUX-Invarianten der Flächen einer LAPLACE-Kette eindeutig den Verbindungskongruenzen aufeinanderfolgender Flächen der Kette zuordnen: Zu jeder Kongruenz gehört auf den beiden Flächen, die sie verbindet, die gleiche Invariante.

Zur Kongruenz $(\mathfrak{u}_{-n}, \mathfrak{u}_{-n-1})$ der GODEAUX-Kette gehört aber die gleiche Invariante wie zur Kongruenz $(\mathfrak{v}_n, \mathfrak{v}_{n+1})$ der Kette in G in Ebenenkoordinaten, insbesondere also zu den Kongruenzen

$$(\mathfrak{b}, \mathfrak{v}), \qquad (\mathfrak{v}, \mathfrak{u}), \qquad (\mathfrak{u}, \mathfrak{a}), \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{u}_2)$$

der GODEAUX-Kette der Reihe nach die gleichen wie zu

$$(\mathfrak{e}, \mathfrak{c}), \qquad (\mathfrak{f}, \mathfrak{e}), \qquad (\mathfrak{d}, \mathfrak{f}), \qquad (\mathfrak{c}, \mathfrak{d}).$$

Diese Invarianten haben in dieser Reihenfolge die Werte

$$2P, \quad \beta\gamma, \quad 2Q, \quad 4cd. \tag{168}$$

Wie man leicht nachprüft, gehört bei einer beliebigen geschlossenen LAPLACE-Kette der Periode 4 zu jeder Kongruenz in Ebenenkoordinaten die gleiche Invariante wie zur gegenüberliegenden in Punktkoordinaten. Die

[29]) Zum Begriff der dualen Kette vgl. man etwa PD I, § 32. Sie wird gebildet von den zweiparametrigen Ebenensystemen, die entstehen, wenn man je drei entsprechende Punkte von aufeinanderfolgenden Flächen der vorgegebenen Kette durch eine Ebene verbindet. Spannt diese einen n-dimensionalen Raum auf, so sind entsprechend n aufeinanderfolgende Glieder durch Hyperebenen zu verbinden.

Invarianten (168) gehören also in Punktkoordinaten der Reihe nach zu den Kongruenzen

$$(\mathfrak{d}, \mathfrak{f}), \qquad (\mathfrak{c}, \mathfrak{d}), \qquad (\mathfrak{e}, \mathfrak{c}), \qquad (\mathfrak{f}, \mathfrak{e})$$

der Kette in G.

4. Für die isotherm-asymptotischen unter den Kongruenzflächen gilt außer den Bedingungen aus § 1 die Regel

(169) $$P = Q.$$

Nach (29) führt das auf

(170) $$\beta_1 = 3 b \beta^2 d^{-1}, \qquad \gamma_2 = 3 a \gamma^2 c^{-1}.$$

Bei isotherm-asymptotischen Flächen kann man u und v so normieren, daß $\beta = \gamma$; u und v sind dann bis auf Transformationen

(171) $$u = c_1 u^* + c_2, \qquad v = c_1 v^* + c_3$$

mit konstanten c_i festgelegt. Bei elliptisch gekrümmten Flächen ist dabei c_1 reell, c_2 und c_3 sind konjugiert komplex, außerdem sind hier noch Umnormungen

(172) $$u = \varepsilon u^*, \qquad v = \varepsilon^2 v^*$$

möglich, wobei ε eine dritte Einheitswurzel ist.

Die Gln. (25), (28), (31), (35), (170) mit den Nebenbedingungen (29), (169) bilden jetzt ein vollständiges System, die Lösungen hängen von 6 Konstanten ab. Da die Flächen unserer Klasse im allgemeinen keine Gruppe von projektiven Transformationen in sich gestatten, hängen sie von 3 Konstanten ab.

Die M-Transformierten einer isotherm-asymptotischen Kongruenzfläche sind nach (104) ebenfalls isotherm-asymptotisch.

5. Die Flächen, für die $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ist, pflegt man Koinzidenzflächen zu nennen, weil für sie die von WILCZYNSKI, GREEN, FUBINI u. a. angegebenen „Projektivnormalen" alle miteinander identisch sind. Aus (10), (8), (12), (28) folgt für sie weiter

(173) $$\sigma = \tau = 0, \qquad P = Q = \tfrac{1}{2}\beta\gamma, \qquad a = b = 0.$$

Normiert man u und v wieder so, daß $\beta = \gamma$, so wird diese Größe eine Konstante, und man kann die Parameter noch so einrichten, daß $\beta = \gamma = 2$. Dann sind nur noch Transformationen (171) mit $c_1 = 1$ möglich. Die halbinvariante Differentiation ist jetzt die gewöhnliche.

Für die Kongruenzflächen unter den Koinzidenzflächen ist nach (29), (31), (35)

(174) $$\beta c + 2L = 0, \qquad \gamma d + 2M = 0, \qquad P = Q = 2cd$$

und weiter

(175) $$L_1 = L_2 = M_1 = M_2 = c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0.$$

Alle Invarianten der Fläche sind konstant; sie läßt daher eine zweigliedrige, Abelsche Gruppe von Projektivitäten in sich zu, die durch

(176) $$u = \hat{u} + k_1, \qquad v = \hat{v} + k_2$$

mit konstanten k_1, k_2 beschrieben werden kann, und ist eine W-Fläche im Sinne von KLEIN und LIE.

Bei der obigen Normierung ist

$$(177) \qquad \beta = \gamma = 2, \qquad P = Q = 2, \qquad cd = 1, \qquad L = -c, \qquad M = -d.$$

Unsere Fläche ist dann eine Lösung der Gleichungen

$$(178) \qquad \mathfrak{x}_{uu} = 2\mathfrak{x}_v + L\mathfrak{x}, \qquad \mathfrak{x}_{vv} = 2\mathfrak{x}_u + M\mathfrak{x}.$$

Unsere Flächen gehören sämtlich der Klasse c) an. Sind $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_3$ die nichtentarteten M-Transformierten, so ist nach (133)

$$HK = -cd = -1.$$

Für $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{z}_3$ gilt also nach (99), (100), (104), (105)

$$\breve{\beta} = \breve{\gamma} = 2, \qquad \breve{P} = \breve{Q} = 2, \qquad \breve{L} = L, \qquad \breve{M} = M.$$

Diese Flächen genügen daher ebenfalls den Gln. (178), sie sind mit der Fläche $\mathfrak{x}$ projektiv gleichwertig. Dabei entsprechen sich Punkte, die zu den gleichen Werten der Parameter gehören.

Nach (44), (52) ist für unsere Flächen $h_m = 0$. Sämtliche zu geraden m e'ı örigen Punkte $\mathfrak{u}_m$ der GODEAUX-Kette liegen also mit $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{f}$ in einer Ebene, sämtliche mit ungeradem m ebenso mit $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{e}$.

Die GODEAUX-Kette unserer Flächen gestattet eine Projektivität des R_5 in sich, die jede Fläche auf die nächstfolgende abbildet. Die Ableitungsgleichungen für die Vektoren

$$\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{b}, \mathfrak{v}$$

sind nämlich die gleichen wie die für

$$\gamma\mathfrak{d}, \quad 2P\mathfrak{f}, \quad \mathfrak{c}, \quad 2c\mathfrak{e}, \quad P\mathfrak{v}, \quad \gamma\mathfrak{u}.$$

Das Bild von $\boldsymbol{Q}$ bei dieser Projektivität ist eine von $\boldsymbol{Q}$ verschiedene Quadrik $\boldsymbol{Q}_1$; da $\mathfrak{v}$ auf $\boldsymbol{Q}$ liegt, enthält diese das Bild $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{v}$. Sämtliche Schmiegtangenten $\mathfrak{u}$ der Fläche gehören daher dem von $\boldsymbol{Q}_1$ dargestellten quadratischen Strahlenkomplex an, ebenso liegen die Schmiegtangenten der anderen Schar in einem quadratischen Komplex.

Der Ansatz

$$(179) \qquad x_k = e^{m_k u + n_k v}; \qquad k = 0, 1, 2, 3 \text{ [30]}$$

für die Komponenten von $\mathfrak{x}$ führt auf die Bedingungen

$$m_k^2 = 2n_k + L, \qquad n_k^2 = 2m_k + M;$$

sie lassen sich befriedigen durch

$$(180) \qquad m_k = \alpha_k^2 + \alpha_k^{-1}\sqrt{2}, \qquad n_k = \alpha_k^{-2} + \alpha_k\sqrt{2},$$

[30] Vgl. FUBINI-ČECH: Geometria Proiettiva Differenziale I, § 27. Bologna 1927.

wobei α_k eine Wurzel der Gleichung

$$\alpha^4 = L \tag{181}$$

darstellt. Verwendet man für die 4 Koordinaten die 4 Wurzeln von (181), so gibt also (179) eine Parameterdarstellung unserer Fläche in einem geeignet gewählten projektiven Koordinatensystem, sofern die zugehörigen Werte von m_k und n_k nicht für 2 Wurzeln die gleichen sind.

Letzteres tritt dann und nur dann ein, wenn

$$L^3 = -1.$$

Durch eine Umnormung (172) kann man dann erreichen, daß

$$L = M = -1 \tag{182}$$

wird. Die zugehörigen Flächen haben die Parameterdarstellung

$$x_0 = e^{u+v}, \quad x_1 = 2(u+v)e^{u+v}, \quad x_2 = e^{-(u+v)-2i(u-v)}, \quad x_3 = e^{-(u+v)+2i(u-v)}. \tag{183}$$

Führt man die inhomogenen Koordinaten

$$x = \frac{x_2}{x_0}, \qquad y = \frac{x_3}{x_0}, \qquad z = -\frac{x_1}{x_0}$$

ein, so erhält man für sie die Gleichung

$$x\,y = e^{2z}. \tag{184}$$

Durch die Ersetzung

$$x \to x + i\,y, \qquad y \to x - i\,y, \tag{185}$$

der eine komplexe Projektivität entspricht, wird daraus

$$x^2 + y^2 = e^{2z}. \tag{186}$$

Die Fläche (184) ist elliptisch, die Fläche (186) hyperbolisch gekrümmt. Faßt man x, y, z als Cartesische Koordinaten auf, so ist (186) die Fläche, die durch Rotation der Exponentialkurve um die Asymptote entsteht. Sämtliche reellen Flächen unseres Ausnahmefalles sind zu (184) oder (186) reell projektiv gleichwertig. Diese Flächen sind die einzigen unserer Klasse, bei denen die Kongruenz K parabolisch ist; sie ist sogar singulär. Also geht eine Diagonale des Vierseits von DEMOULIN durch einen festen Punkt, die andere liegt in einer festen Ebene.

Wenn der Ausnahmefall nicht vorliegt, so können wir die Konstanten ν_k bis auf einen gemeinsamen Faktor eindeutig so bestimmen, daß

$$\sum_0^3 \nu_k = 0, \qquad \sum_0^3 \nu_k m_k = 0, \qquad \sum_0^3 \nu_k n_k = 0. \tag{187}$$

Die Fläche hat dann die in den x_k homogene Gleichung

$$x_0^{\nu_0} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} x_3^{\nu_3} = 1, \tag{188}$$

sie ist eine spezielle Tetraedralfläche.

Setzt man

$$\alpha_0 = \alpha, \quad \alpha_1 = i\alpha, \quad \alpha_2 = -\alpha, \quad \alpha_3 = -i\alpha, \tag{189}$$

so findet man

$$\begin{cases} \nu_0 = \alpha^3 + \alpha^{-3} - \sqrt{2}, & \nu_1 = i(\alpha^3 - \alpha^{-3}) + \sqrt{2}, \\ \nu_2 = -\alpha^3 - \alpha^{-3} - \sqrt{2}, & \nu_3 = -i(\alpha^3 - \alpha^{-3}) + \sqrt{2}. \end{cases} \tag{190}$$

Ist die Fläche elliptisch gekrümmt, so sind L und M konjugiert komplex. Da $LM = 1$, ist $|L| = 1$ und wir können

$$\alpha = e^{i\Theta}$$

setzen. Die ν_k sind dann proportional zu

$$\cos 3\Theta - \cos\frac{\pi}{4}, \quad -\sin 3\Theta + \sin\frac{\pi}{4}, \quad -\cos 3\Theta - \cos\frac{\pi}{4}, \quad \sin 3\Theta + \sin\frac{\pi}{4}$$

und daher zu

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(3\Theta + \frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(3\Theta - \frac{\pi}{4}\right), \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(3\Theta - \frac{\pi}{4}\right), \quad 1, \quad -\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(3\Theta + \frac{\pi}{4}\right).$$

Setzen wir

$$x_0 = 1, \quad x_1 = y, \quad x_2 = z, \quad x_3 = x; \tag{191}$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(3\Theta + \frac{\pi}{4}\right) = C, \tag{192}$$

so erhalten wir für unsere Fläche die Gleichung

$$z = x^C y^{\frac{1-C}{1+C}}. \tag{193}$$

Ist die Fläche hyperbolisch gekrümmt und gehört sie zur Klasse II, ist also $L > 0$, so können wir α reell und positiv wählen. Setzen wir

$$x_0 = 1, \quad x_1 = r e^{-i\varphi}, \quad x_2 = z, \quad x_3 = r e^{i\varphi}, \tag{194}$$

$$\alpha^3 = e^C, \tag{195}$$

so erhalten wir für unsere Fläche eine Gleichung von der Form

$$z^{2\,Ch\,C+\sqrt{2}} = r^{2\sqrt{2}}\, e^{4\,Sh\,C\cdot\varphi}. \tag{196}$$

r, φ und z können hier als Zylinderkoordinaten einer Euklidischen Metrik aufgefaßt werden.

Für die Flächen von unserem Typus der Klasse III läßt sich anscheinend keine so einfache reelle Darstellung angeben. Klasse IV kann nicht vorkommen.

Die Flächen der hier betrachteten Art, deren GODEAUX-Kette geschlossen ist, gehören zum Typus A aus § 2. Man findet für sie

$$\xi_1 = \xi_2 = c^{-3} = -L^{-3} = -\alpha^{-12}$$

und daher, wenn

$$\xi_1 = \xi_2 = e^{i\omega}$$

gesetzt wird,

$$\omega = -12\Theta - \pi.$$

Bei geeigneter Wahl von α ist also

$$3\Theta + \frac{\pi}{4} = -\frac{\omega}{4}$$

und

$$C = -\operatorname{tg}\frac{\omega}{8}.$$

Die GODEAUX-Kette der Fläche (193) hat also genau dann die Periode $4n$ und keine kleinere, wenn

$$C = \operatorname{tg}\frac{\nu\pi}{4n}$$

mit zu n teilerfremdem ganzzahligem ν.

Wählt man $n=2$, so kann man etwa $\nu=1$ setzen. Dann ist

$$\frac{1-C}{1+C} = C$$

und wir erhalten die Gleichung

$$z = (xy)^C; \qquad C = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}. \tag{197}$$

Andere Gleichungsformen für die gleiche Fläche[31]) bekommt man, wenn man $\nu = 1, 3, 5$ setzt.

Durch die Substitution (185) wird aus (197) die hyperbolisch gekrümmte Rotationsfläche

$$z = (x^2 + y^2)^C, \qquad C = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}, \tag{198}$$

deren GODEAUX-Kette also ebenfalls die Periode 8 hat.

Da

$$g^2 = 2 - \xi_1^3 - \xi_1^{-3} > 0,$$

ist die Kongruenz K bei allen diesen Flächen hyperbolisch.

6. Kann eine Kongruenzfläche auf eine ihrer M-Transformierten projektiv abwickelbar sein? Zwei Flächen sind bekanntlich genau dann aufeinander projektiv abwickelbar, wenn β und γ bei beiden die gleichen Funktionen der Parameter sind. δ_0 und χ haben nach (99), (100) diese Eigenschaft dann und nur dann, wenn

$$P = Q = -2HK. \tag{199}$$

Aus (105) folgt dann

$$\overset{\circ}{L} = L, \qquad \overset{\circ}{M} = M,$$

was bedeutet, daß beide Flächen sogar durch eine Projektivität ineinander überzuführen sind.

Aus (199) folgt durch Differentiation mittels (28), (86)

$$Hb + Ka = 0. \tag{200}$$

[31]) Sie wurde 1952 von M. CARTON (M. CARTON, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **22**, 101—111) angegeben und war das erste Beispiel für eine Fläche mit geschlossener GODEAUX-Kette einer Periode > 6.

Da $\mathfrak{z}_0$ nicht entarten soll, ist nach (125)

$$A + HK \neq 0,$$

$\mathfrak{z}_3$ entartet also ebenfalls nicht. Naturgemäß ist diese Fläche ebenfalls zu $\mathfrak{x}$ projektiv gleichwertig, während $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$, sofern sie nicht entarten, durch Korrelationen aus $\mathfrak{x}$ hervorgehen.

Aus (29), (199) folgt für unsere Flächen

$$\beta = 2HK^{-1}d, \qquad \gamma = 2KH^{-1}c. \tag{201}$$

Da $P = Q$ können wir nach Bemerkung 4 die Parameter so normieren, daß γ/β eine Konstante wird. Da Kd/Hc nach § 2 stets konstant ist, folgt aus (201), daß auch K^3/H^3 eine Konstante ist. Durch Multiplikation von u und v mit konstanten Faktoren können wir erreichen, daß

$$K = -H \tag{202}$$

wird. Bei dieser Normierung ist

$$a = b, \qquad \beta = -2d, \qquad \gamma = -2c, \qquad c = k_1 d, \qquad \gamma = k_1 \beta \tag{203}$$

mit konstantem $k_1 \neq 0$, und weiter nach (12)

$$2L = 2M = P = Q = \tfrac{1}{2}[k_1\beta^2 - (\log\beta)_{uv}]. \tag{204}$$

Da die erste Gewichtszahl von c und die zweite von d Null sind, sind c_1 und d_2 gewöhnliche Ableitungen. Aus (31), (203) folgt daher

$$\frac{\beta_u}{\beta} = \frac{c_u}{c} = -2a = -2b = \frac{d_v}{d} = \frac{\beta_v}{\beta}. \tag{205}$$

Daher ist

$$\beta(u, v) = \beta(u + v)$$

eine Funktion von $u + v$ allein und das gleiche gilt für die übrigen Invarianten.

Jede unserer Flächen gestattet daher eine eingliedrige Gruppe von projektiven Transformationen in sich mit den Bahnkurven

$$u + v = \text{const}, \qquad du + dv = 0.$$

Wir führen die neuen Parameter

$$\lambda = u + v, \quad \mu = u - v \tag{206}$$

ein und geben Ableitung nach λ durch einen Strich an.

Da $P\gamma$ die erste Gewichtszahl 0 hat, ist

$$(P\gamma)_u = (P\gamma)_1 = 2aP\gamma = -P\gamma(\log\beta)_u$$

und daher

$$2P\beta^2 = k_3 = \text{const} \neq 0. \tag{207}$$

Für β folgt daraus die Differentialgleichung

$$(\log\beta)'' = k_1\beta^2 - k_3\beta^{-2}. \tag{208}$$

Durch Integration ergibt sich daraus

$$\beta'^2 = k_1\beta^4 + k_2\beta^2 + k_3 \tag{209}$$

mit konstanten k_i und $k_1 \neq 0$, $k_3 \neq 0$.

Offenbar führt (209) auf elliptische Funktionen; man verwendet am einfachsten die von JACOBI. Bei geeigneter Vorzeichenverteilung der k_i kann man setzen

$$\beta(\lambda) = c_1 \operatorname{sn} \frac{\lambda}{c_2}. \tag{210}$$

Die konstanten Lösungen von (209) führen auf die in Bemerkung 5 betrachteten Koinzidenzflächen, brauchen also hier nicht noch einmal berücksichtigt zu werden.

Da λ noch mit einem konstanten Faktor multipliziert werden kann, sind von den Konstanten in (209) nur 2 wesentlich. Unsere Flächen hängen daher von 2 Konstanten ab.

Setzt man

$$\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}} \sqrt{|\beta|},$$

so genügt der Vektor $\bar{\mathfrak{x}}$ den Bedingungen

$$\begin{cases} \bar{\mathfrak{x}}_{uu} = -(\log\beta)'\,\bar{\mathfrak{x}}_u + \beta\,\bar{\mathfrak{x}}_v + \frac{1}{4}k_3\beta^{-2}\,\bar{\mathfrak{x}}, \\ \bar{\mathfrak{x}}_{vv} = k_1\beta\,\bar{\mathfrak{x}}_u - (\log\beta)'\,\bar{\mathfrak{x}}_v + \frac{1}{4}k_3\beta^{-2}\,\bar{\mathfrak{x}} \end{cases} \tag{211}$$

oder umgeschrieben auf λ, μ:

$$\begin{cases} 4\,\bar{\mathfrak{x}}_{\lambda\mu} = (1-k_1)\beta\,\bar{\mathfrak{x}}_\lambda - [(1+k_1)\beta + 2(\log\beta)']\,\bar{\mathfrak{x}}_\mu, \\ 2(\bar{\mathfrak{x}}_{\lambda\lambda} + \bar{\mathfrak{x}}_{\mu\mu}) = [(1+k_1)\beta - 2(\log\beta)']\,\bar{\mathfrak{x}}_\lambda + (k_1-1)\beta\,\bar{\mathfrak{x}}_\mu + \frac{1}{2}k_3\beta^{-2}\,\bar{\mathfrak{x}}. \end{cases} \tag{212}$$

Für die zur Klasseneinteilung wichtigen Invarianten findet man

$$\begin{cases} A = \frac{1}{4}(k_2 + k_3\beta^{-2}), \qquad q = k_1^{-2}, \qquad p = k_1^{-2}k_3^{-1}(2k_1k_3 - k_2^2), \\ p^2 - 4q = k_1^{-4}k_3^{-2}k_2^2(k_2^2 - 4k_1k_3), \\ g^2 = \frac{1}{16}[k_2^2 + k_3(1-k_1)^2]. \end{cases} \tag{213}$$

Die Fläche gehört also genau dann zum Typus c), wenn $k_2 = 0$; zum Typus b), aber nicht zu c), wenn

$$k_2^2 - 4k_1k_3 = 0. \tag{214}$$

In diesem Fall kann man (209) mit einfach periodischen Funktionen integrieren.

Die Kongruenz K ist singulär, wenn $k_1 = 1$, $k_2 = 0$. Unter unseren Flächen kommen solche aus 18 der in § 6 aufgezählten 24 Klassen vor; ausgenommen sind nur die zu IV), II E) und II P) gehörigen.

Aus dem Ansatz (210) ergeben sich für c_1, c_2 und den Modul k^2 der elliptischen Funktion die Beziehungen

$$k_1 = k^2 c_1^{-2} c_2^{-2}, \qquad k_2 = -c_2^{-2}(1+k^2), \qquad k_3 = c_1^2 c_2^{-2}. \tag{215}$$

Für c_1 ergibt sich daraus die Bedingung

$$k_1 c_1^4 + k_2 c_1^2 + k_3 = 0 \tag{216}$$

und für

$$k^2 = k_1 k_3^{-1} c_1^4$$

die Gleichung

$$k_1 k_3 (k^4 + 1) + (2 k_1 k_3 - k_2^2) k^2 = 0. \tag{217}$$

Setzt man

$$\xi = - k_1^{-1} k^2,$$

so geht (217) in die charakteristische Gl. (76) über. Wir können daher etwa

$$k^2 = - k_1 \xi_1 \tag{218}$$

setzen. Lassen wir auch elliptische Funktionen zu, bei denen k^2 negativ oder komplex ist, so ist unser Ansatz in allen Fällen brauchbar; für $k^2 = 1$ entarten allerdings unsere Funktionen in einfach periodische.

Da

$$\xi_1 \xi_2 = q = k_1^{-2}, \tag{219}$$

ist

$$k^4 = \xi_1 \xi_2^{-1}.$$

Wir können daher den Modul k^2 in Beziehung setzen zum Komplexbild des § 7: Nach (157) ist

$$k^2 = \pm \frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \varphi}. \tag{220}$$

Die Nullstellen des Polynoms auf der rechten Seite von (209) haben also das gleiche Doppelverhältnis wie die Bildpunktpaare der Komplexe $\mathfrak{m}$, $\overline{\mathfrak{m}}$; $\mathfrak{n}$, $\overline{\mathfrak{n}}$ mit den Doppelelementen der Involution, der sie angehören.

Die GODEAUX-Kette unserer Fläche ist dann und nur dann geschlossen mit der Periode $4n$, wenn k_1^2 und $-k^2 k_1^{-1}$ beide n-te Einheitswurzeln sind. Aus (215) folgt

$$(k + k^{-1})^2 = k_2^2 k_1^{-1} k_3^{-1}. \tag{221}$$

Setzen wir daher

$$k_1 = - e^{i\Theta}, \qquad k_2^2 k_1^{-1} k_3^{-1} = 4 \cos^2 \chi, \tag{222}$$

so ist die GODEAUX-Kette dann und nur dann geschlossen und hat die Periode $4n$, wenn 2Θ und $2\chi - \Theta$ reell und ganzzahlige Vielfache von $2\pi/n$ sind und χ kein Vielfaches von π ist. Im letztgenannten Fall gehört die Fläche zur Klasse b) und hat keine geschlossene GODEAUX-Kette.

Umgekehrt kann man ξ_1 und ξ_2 als n-te Einheitswurzeln beliebig wählen und findet stets eine Fläche der hier betrachteten Art, für die die Gl. (76) diese Wurzeln hat.

Ist die Fläche hyperbolisch gekrümmt und sind ξ_1 und ξ_2 verschieden, so kann sie nach § 6 nur dann eine geschlossene GODEAUX-Kette haben, wenn $L > 0$, $M > 0$. Nach (204), (207) ist dann $k_3 > 0$ und wegen (222) auch $k_1 > 0$.

Nach § 2 ist $q = 1$ und es folgt $k_1 = 1$. Wie wir gleich zeigen, sind diese Flächen daher spezielle PETERSONsche Flächen.

Eine interessante Sonderklasse bilden diejenigen unserer Flächen, bei denen die Bahnkurven der Gruppe DARBOUX-Kurven sind, also der Gleichung

$$\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3 = 0$$

genügen. Dazu ist offenbar

$$k_1 = 1$$

notwendig und hinreichend. Die Gln. (212) vereinfachen sich dann zu

$$\text{(223)} \qquad \begin{cases} \bar{\mathfrak{x}}_{\lambda\mu} = -\frac{1}{2}\,[\beta + (\log\beta)']\,\bar{\mathfrak{x}}_\mu \\ \bar{\mathfrak{x}}_{\lambda\lambda} + \bar{\mathfrak{x}}_{\mu\mu} = [\beta - (\log\beta)']\,\bar{\mathfrak{x}}_\lambda + \frac{1}{4}\,k_3\,\beta^{-2}\,\bar{\mathfrak{x}}. \end{cases}$$

Setzt man

$$\bar{\mathfrak{x}} = \varphi\,\hat{\mathfrak{x}}$$

mit

$$\text{(224)} \qquad \frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{1}{2}\,(\beta + (\log\beta)'),$$

so wird

$$\text{(225)} \qquad \hat{\mathfrak{x}}_{\lambda\mu} = 0, \qquad \hat{\mathfrak{x}}_{\lambda\lambda} + \hat{\mathfrak{x}}_{\mu\mu} = 2\beta\,\hat{\mathfrak{x}}_\lambda + \frac{1}{4}\,k_2\,\hat{\mathfrak{x}}.$$

Die erste Gleichung hat die allgemeine Lösung

$$\text{(226)} \qquad \hat{\mathfrak{x}} = \mathfrak{a}(\lambda) + \mathfrak{b}(\mu),$$

aus der zweiten folgt, daß

$$\text{(227)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{a}'' - 2\beta\,\mathfrak{a}' - \frac{1}{4}\,k_2\,\mathfrak{a} = \mathfrak{c} \\ \mathfrak{b}'' - \frac{1}{4}\,k_2\,\mathfrak{b} = -\mathfrak{c} \end{cases}$$

mit festem $\mathfrak{c}$.

(226) besagt, daß unsere Flächen einer von PETERSON hervorgehobenen Klasse angehören[32]; die Bahnkurven der Gruppe und die dazu konjugierte Schar bilden ein Netz mit der Eigenschaft, daß die Tangentenebenen der Fläche längs jeder Netzkurve einen Kegel berühren. Aus (227) folgt aber, daß die Netzkurven eben sind, unsere Flächen sind daher im Sinne von W. Süss Projektivrotationsflächen.

Die Kurven $\mathfrak{a}'(\lambda)$ und $\mathfrak{b}'(\mu)$, die von den zu jeder Netzschar gehörigen Kegelspitzen beschrieben werden, sind Geraden, wie das bei einer gewöhnlichen Rotationsfläche für das Netz der Meridiankurven und Parallelkreise der Fall ist.

Diese Geraden schneiden sich in dem vom Vektor $\mathfrak{c}$ dargestellten Punkte, wenn $k_2 = 0$[33]. Ist $k_2 \neq 0$, so können wir durch Änderung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ um einen gemeinsamen konstanten Vektor erreichen, daß $\mathfrak{c} = 0$ wird. Der Punkt $\mathfrak{a}$ liegt dann stets auf der von $\mathfrak{a}'$ beschriebenen Geraden, $\mathfrak{b}$ auf der von $\mathfrak{b}'$ beschriebenen. Diese Geraden sind jetzt windschief, da sonst unsere Fläche eine Ebene wäre. Wir können das Koordinatensystem so wählen, daß die

[32] PETERSON, K.: Über Curven und Flächen. Moskau u. Leipzig 1868.

[33] Wenn $k_2 = 0$, so ist $\mathfrak{c} \neq 0$, da sonst $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ feste Punkte wären, was nicht angeht.

erste die Gleichungen $x_1 = x_2 = 0$, die zweite die Gleichungen $x_0 = x_3 = 0$ hat. Wir erhalten dann für unsere Fläche eine Parameterdarstellung von der Form

$$x_0 = a_0(\lambda), \quad x_1 = b_1(\mu), \quad x_2 = b_2(\mu), \quad x_3 = a_3(\lambda). \tag{228}$$

Ist $k_2 < 0$ und fassen wir

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}, \quad z = \frac{x_3}{x_0}$$

als Cartesische Koordinaten auf, so ist die Fläche eine Rotationsfläche, die Meridiankurve hat die Parameterdarstellung

$$x = \frac{1}{a_0(\lambda)}, \quad z = \frac{a_3(\lambda)}{a_0(\lambda)}. \tag{229}$$

Ist $k_2 = 0$, so ist $\mathfrak{c} \neq 0$, da sonst $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ feste Punkte wären, was offenbar nicht möglich ist. Die von $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ durchlaufenen Geraden treffen sich im Punkte $\mathfrak{c}$. (225) hat hier die Lösung $x_0 = 1$; wählt man die Ebene $x_0 = 0$ als uneigentliche, so ist die Fläche eine Translationsfläche. Eine Leitkurve ist eine Parabel, die andere eben.

7. Wenn die von $\mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ gebildete Kette eine Projektivität des dreidimensionalen Raumes G in sich gestattet, die jede Fläche in die gegenüberliegende überführt, so haben gegenüberliegende Kongruenzen dieser Kette die gleiche DARBOUX-Invariante.

Eine Geradenkongruenz eines R_3 hat in der von ihr erzeugten LAPLACE-Kette dann und nur dann in Punkt- und in Ebenenkoordinaten die gleiche DARBOUX-Invariante, wenn sie eine W-Kongruenz ist. Nach Bemerkung 3 und 4 sind also die isotherm-asymptotischen unter den Kongruenzflächen dadurch ausgezeichnet, daß die Geraden $(\mathfrak{c}, \mathfrak{e})$ und $(\mathfrak{b}, \mathfrak{f})$ im Raume G W-Strahlensysteme erzeugen. Ebenso haben $(\mathfrak{c}, \mathfrak{b})$ und $(\mathfrak{e}, \mathfrak{f})$ dann und nur dann diese Eigenschaft, wenn

$$\beta\gamma = 4cd. \tag{230}$$

Nach Bemerkung 3 sind die isotherm-asymptotischen unter unseren Flächen auch dadurch gekennzeichnet, daß bei Projektion des R_5 aus $\mathfrak{g}$ auf einen zu $\mathfrak{g}$ windschiefen R_3 aus den Kongruenzen $(\mathfrak{b}, \mathfrak{v})$ und $(\mathfrak{u}, \mathfrak{a})$ der GODEAUX-Kette W-Strahlensysteme entstehen. Gilt das für eine von beiden Kongruenzen, so auch für die andere.

Ebenso bedeutet (230), daß die Projektion von $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ eine W-Kongruenz ist.

Sind sämtliche Kongruenzen der von $\mathfrak{c}, \mathfrak{b}, \mathfrak{f}, \mathfrak{e}$ gebildeten Kette W-Strahlensysteme, so gilt das gleiche für die Projektion der GODEAUX-Kette. In diesem Fall ist

$$P = Q, \quad \beta\gamma = 4cd. \tag{231}$$

Mittels (29) folgt daraus

$$PQ = 4LM,$$

und bei geeigneter Vorzeichenwahl von H und K kann man auf (199) schließen. Das bedeutet aber, daß eine der M-Transformierten unserer Fläche zu dieser

selbst projektiv gleichwertig ist. Nach § 2 gestattet dann die GODEAUX-Kette eine Projektivität des R_5, bei der jede Fläche $\mathfrak{u}_m$ in $\mathfrak{u}_{m+2}$ übergeht.

Entsprechendes gilt dann für ihre Projektion und damit auch für die von $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{e}$ gebildete Kette. Aus der eingangs gemachten Bemerkung folgt, daß auch die Umkehrung gilt.

Gestattet die von $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{e}$ gebildete Kette eine Projektivität, die jede Fläche in die nächstfolgende überführt, so ist

$$2P = 2Q = \beta\gamma = 4cd.$$

Die Fläche gehört also zum in Bemerkung 6 behandelten Typus, und nach (207) ist β konstant, sie ist also eine Koinzidenzfläche.

8. Wenn die von $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{e}$ gebildete Kette durch eine Korrelation von $\boldsymbol{G}$ in sich selbst übergeführt wird, so ändert sich dabei ihr Umlaufsinn. Da jetzt die Invariante in Punktkoordinaten jeder Kongruenz der Invariante der Bildkongruenz in Ebenenkoordinaten gleich ist, ergeben sich folgende Möglichkeiten:

$\alpha)$ $$P = Q$$

$\beta)$ $$\beta\gamma = 4cd$$

$\gamma)$ $$\beta\gamma = 2P, \qquad 4cd = 2Q$$

$\delta)$ $$\beta\gamma = 2Q, \qquad 4cd = 2P.$$

Zwischen $\gamma)$ und $\delta)$ besteht natürlich kein wesentlicher Unterschied. In jedem Fall ist unsere Kette zur Projektion der GODEAUX-Kette aus $\boldsymbol{g}$ projektiv gleichwertig. Die aufgezählten Bedingungen stellen sich auch als hinreichend heraus.

Die Flächen, für die $\beta)$ gilt, hängen wie die isotherm-asymptotischen $\alpha)$ von 3 Konstanten ab, diejenigen, für die $\gamma)$ oder $\delta)$ gilt, von 2 Konstanten.

Wenn eine Kongruenzfläche zu einem dieser 4 besonderen Typen gehört, so gehört jede ihrer M-Transformierten zum gleichen Typus.

9. Je 2 Kanten $(\mathfrak{u}_m, \mathfrak{u}_{m+1})$ und $(\mathfrak{v}_{-m}, \mathfrak{v}_{-m-1})$ der GODEAUX-Kette einer beliebigen Fläche schneiden bekanntlich $\boldsymbol{Q}$ in 4 Punkten, die im R_3 die 4 Kanten eines Vierseits V_m darstellen. V_1 ist das Vierseit von DEMOULIN. Jedes Vierseit V_m erzeugt in Abhängigkeit von u und v eine T-Figur im Sinne von R. CALAPSO und S. FINIKOFF[34]). Ist m ungerade, so hat diese bei Kongruenzflächen die Charakteristik -1.

Das hängt damit zusammen, daß 2 Quadriken Q und Q_1, die ein Vierseit V enthalten, mit den beiden im Büschel

$$\lambda Q + \mu Q_1 = 0$$

enthaltenen Ebenenpaaren dann und nur dann das Doppelverhältnis -1 haben, wenn je 2 Geradenscharen auf Q und Q_1, denen nicht die gleichen

[34]) CALAPSO, R.: Rec. math. Moscou **42**, 451—460, 461—464 (1935). Vgl. auch S. FINIKOFF, C. r. Acad. Sci. Paris **202**, 548—549 (1936).

Kanten von V angehören, in einem linearen Komplex liegen; hat ein Paar solcher Geradenscharen diese Eigenschaft, so auch das andere.

In unserem Fall liegen die Bilder zweier solcher Geradenscharen für die Hauptquadriken der von V_m erzeugten T-Figur in den Ebenen $(\mathfrak{u}_m, \mathfrak{u}_{m+1}, \mathfrak{u}_{m+2})$ und $(\mathfrak{v}_{-m+1}, \mathfrak{v}_{-m}, \mathfrak{v}_{-m-1})$ des R_5. Ist m ungerade, so haben diese Ebenen den Punkt $\mathfrak{v}_{m+2}$ gemeinsam, und beide Geradenscharen liegen deshalb in einem linearen Komplex.

10. Wenn die Diagonalen des Vierseits von DEMOULIN einer Fläche einem linearen Komplex angehören, so muß zunächst wieder $N = 0$ sein. Die Gerade $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ liegt nicht an jeder Flächenstelle ganz in der Bildhyperebene des Komplexes; ist

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{u} + \alpha\,\mathfrak{v}$$

ihr Schnittpunkt mit der Bildhyperebene, so sind die Ableitungen der Vektoren $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ Linearkombinationen dieser Vektoren selbst. Daraus erhält man für α die Bedingungen:

$$(232) \qquad \begin{cases} d_1 - \beta\, b + 2a\, d = \alpha(Q - b_1 - 2c\, d) \\ P - a_2 - 2c\, d = \alpha(c_2 - \gamma\, a + 2b\, c) \end{cases}$$

$$(233) \qquad \alpha_1 = -\beta - 2\alpha\, a - 2\alpha^2 c, \qquad \alpha_2 = 2d + 2b\alpha + \gamma\,\alpha^2.$$

Die Integrierbarkeitsbedingung (8) für α ist erfüllt. Setzt man

$$(234) \qquad \begin{cases} c_2 = \gamma\, a - 2b\, c + h, & a_2 = P - 2c\, d - \alpha\, h \\ d_1 = \beta\, b - 2a\, d + k, & b_1 = Q - 2c\, d - \alpha^{-1} k, \end{cases}$$

so folgen durch Kombination mit (30) die weiteren Bedingungen

$$(235) \qquad h_1 = 2h(\alpha\, c - 1) - 2c\,\alpha^{-1} k, \qquad k_2 = 2k(\alpha^{-1} d - 1) - 2d\,\alpha\, h.$$

Das so entstandene System von Differentialgleichungen ist vollständig, die Lösungen hängen von 6 beliebigen Funktionen einer Veränderlichen ab, die fraglichen Flächen also von 4 solchen Funktionen.

Freiburg i. Br., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 28. März 1953.)

MINAGAWA, T., and T. RADO
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 151—163 (1953)

On the infinitesimal rigidity of surfaces of revolution.*)

By
T. MINAGAWA and T. RADO.

§1. Introduction.

1.1. In Euclidean three-space, let $\mathfrak{x}$ be the position vector of a surface S (that is, $\mathfrak{x}$ is the vector from the origin of the coordinate system $x\,y\,z$ to a generic point of the surface). A vector function $\mathfrak{z}$ on S induces an infinitesimal deformation of S if and only if

$$d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{z}=0 \text{ on } S. \tag{1}$$

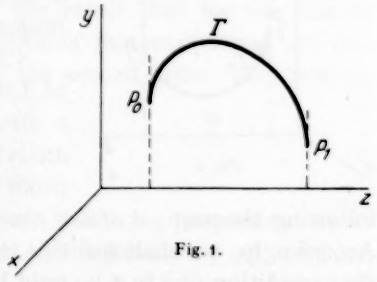

Fig. 1.

For basic information and literature on the subject of infinitesimal deformations, the reader may consult DARBOUX [2], EFIMOV [3]. If $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ are constant vectors, then clearly $\mathfrak{z}=(\mathfrak{a}\times\mathfrak{x})+\mathfrak{b}$ is a solution of (1). The corresponding infinitesimal deformation reduces then to an infinitesimal rigid motion, and is termed *trivial*. A surface S is said to possess the property of *infinitesimal rigidity* (property IR for brevity) if it admits only of trivial infinitesimal deformations.

The meaning of the property IR depends upon the class $\mathfrak{R}$ of deformation vectors $\mathfrak{z}$ [satisfying (1)] that are considered as admissible. We shall use the symbol IR_n to refer to the IR property if $\mathfrak{R}$ is taken as the class of all solutions of class C^n of (1). Similarly, the symbol IR_a will be used if $\mathfrak{R}$ is the class of all analytic solutions of (1).

1.2. One purpose of this note is to call attention to a generalization of a remarkable theorem of LIEBMANN [5] on the infinitesimal rigidity of surfaces of revolution. To state the theorem of LIEBMANN in a concise form, let us introduce the concept of a *strong convex belt* as follows (see Fig. 1). In the $y\,z$ plane, let there be given an arc Γ with the following properties. (i) Except perhaps for its end points P_0, P_1, the arc Γ is located in the half-plane $y>0$. (ii) Γ is convex from above. (iii) Except perhaps for the end points P_0, P_1, the curvature of Γ is different from zero. (iv) At P_0 and P_1 the tangent to Γ is parallel to the y-axis.

The smoothness requirements upon Γ will be specified later on. If Γ is rotated around the z-axis, one obtains a surface of revolution which will be

*) This paper was prepared while the first-named author worked at the Ohio State University under a research grant from the Office of Ordnance Research, U.S. Army, and the second-named author acted as superviser.

termed a *strong convex belt*. The theorem of LIEBMANN [5] may then be stated as follows: *If a surface of revolution S contains a strong convex belt Σ, then S is infinitesimally rigid*. The proof of LIEBMANN [5] runs as follows. Let $\mathfrak{z}$ be a deformation vector on S, satisfying (1). LIEBMANN shows that on Σ the vector $\mathfrak{z}$ reduces to the trivial form $\mathfrak{z} = (\mathfrak{a} \times \mathfrak{x}) + \mathfrak{b}$. From this he infers, without further explanation, that this same relation holds on all of S. This inference is clearly valid if one assumes that S and $\mathfrak{z}$ are *both analytic* (an assumption which was quite natural at the time when LIEBMANN studied the problem on hand). Thus, in the terminology introduced in 1.1, LIEBMANN actually proved that *an analytic surface of revolution S which contains a strong convex belt possesses the IR_a property*. In this note, we show that the assumption of analyticity can be dropped in this statement. Our results imply essentially that *a surface of revolution of class C', which contains a strong convex belt of class C'', possesses the IR_1 property* (in the sense explained in 1.1).

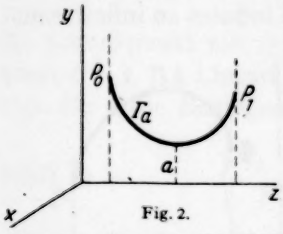

Fig. 2.

1.3. It is important to observe that the proof of LIEBMANN [5] for the infinitesimal rigidity of a strong convex belt itself is independent of the analyticity assumptions. In fact, inspection of his proof reveals that he actually established the following theorem: *a strong convex belt of class C'' possesses the IR_1 property*. Accordingly, we shall use this theorem in our proof. It should be observed that condition (iii) in 1.2 could be omitted. However, for the sake of brevity we omit discussion of this aspect of the situation.

1.4. Our second objective in this note is to further clarify an interesting situation studied by REMBS [6]. In the yz plane, let there be given an arc Γ_a with the following properties (see Fig. 2). (i) In terms of its arc length u (measured from the end point P_0), Γ_a can be represented in the form $y = a + \varrho(u)$, $z = \zeta(u)$, $0 \leq u \leq U < +\infty$, where $a > 0$ is a constant, $\varrho(u) \geq 0$ for $0 \leq u \leq U$, $\zeta'(u) > 0$ for $0 < u < U$. (ii) Γ_a is convex from below. (iii) At the end points P_0, P_1, the tangent of Γ_a is parallel to the y-axis. — The smoothness assumptions about Γ_a will be specified below. On rotating Γ_a around the z-axis, one obtains a surface of revolution S_a, depending upon the parameter $a > 0$, which we shall call an R-surface (*Rembs surface*). A value of $a > 0$ will be termed a *weak value* if the corresponding surface S_a does *not* possess the IR_1 property (see 1.1). Otherwise, $a > 0$ will be termed a *strong value* [observe: the functions $\varrho(u)$, $\zeta(u)$ are fixed]. REMBS [6] proved that there *exist infinitely many weak values*. Inspection of his proof reveals that one can readily verify the fact that the set of weak values is denumerable. In other words: *except for a denumerable set of a-values, the surface S_a possesses the IR_1 property*. Actually, REMBS [6] assumes that (1) the functions $\varrho(u)$, $\zeta(u)$ are analytic, (2) the curvature of Γ_a is different from zero everywhere, (3) at the end points P_0 and P_1, the contact between Γ_a and its tangent is of the first order. We show in this note that the denumerability of the *weak values* a can be established if one assumes only that (1*) $\varrho(u)$, $\zeta(u)$ are of class C'' for $0 \leq u \leq U$,

(2*) the curvature is permitted to vanish arbitrarily; in particular, Γ_a may contain straight segments (but it must be convex from below), and (3*) no assumption is made about the order of contact at P_0, P_1.

Inspection of our proof reveals that condition (1*) could be replaced by the following one: $\varrho'(u)$, $\zeta'(u)$ exist and are absolutely continuous for $0 \leq u \leq U$. The reader conversant with the theory of Real Variables will easily check this point.

1.5. This note is concerned with infinitesimal deformations of the *first order*. For infinitesimal deformations of the *second order*, REMBS [8] obtained interesting rigidity theorems under the assumption that the given surface as well as the admissible deformations are *analytic*. In EFIMOV [3], where the surfaces studied by REMBS are termed *planar troughs*, one finds a simplified account of these results of REMBS, under the same analyticity assumptions. The methods used in the present note yield the result that for the case of surfaces of revolution the analyticity assumptions just mentioned are unnecessary in verifying infinitesimal rigidity of the second order. This remark will be discussed in detail elsewhere.

§ 2. Preliminaries.

2.1. In the $y\,z$ plane, let C be an arc with the following properties. (i) In terms of its arc length u, C can be represented in the form $y = r(u)$, $z = \zeta(u)$, $0 \leq u \leq U$, where U is the total length of C, and $r(u)$, $\zeta(u)$ are of class C' in the closed interval $0 \leq u \leq U$. (ii) $\zeta'(u) \neq 0$, $r(u) > 0$ for $0 < u < U$.

Under these conditions, C will be termed an *admissible arc*.

2.2. On rotating the admissible arc C around the z-axis, one obtains a surface of revolution S with the parametric representation

$$x = r(u) \sin v, \qquad y = r(u) \cos v, \qquad z = \zeta(u),$$

where v is the angle of rotation. Now let $\mathfrak{z} = (X, Y, Z)$ be a deformation vector of class C' on S, satisfying (1). One obtains convenient differential equations for $\mathfrak{z}$ in the following manner (see LIEBMANN [5], REMBS [6]). Introduce auxiliary functions R, V by the formulas

$$R = X \sin v + Y \cos v, \qquad rV = X \cos v - Y \sin v. \tag{2}$$

The relation (1) yields then the partial differential equations

$$r' R_u + \zeta' Z_u = 0, \tag{3}$$

$$r' R_v + r^2 V_u + \zeta' Z_v = 0, \tag{4}$$

$$R + r V_v = 0. \tag{5}$$

Now observe that $R(u, v)$, $V(u, v)$, $Z(u, v)$ have the period 2π with respect to v. Accordingly, it is convenient to introduce, following LIEBMANN [5], REMBS [6], the Fourier coefficients (with respect to v) of these functions.

One sets

$$R_{n1}(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} R(u,v)\cos n v\, dv,$$

$$R_{n2}(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} R(u,v)\sin n v\, dv,$$

with analogous definitions for $V_{n1}(u)$, $V_{n2}(u)$, $Z_{n1}(u)$, $Z_{n2}(u)$. On multiplying (3), (4), (5) by $\cos n v$, $\sin n v$ respectively and integrating with respect to v from 0 to 2π one obtains the following system of ordinary differential equations (see REMBS [6]).

(6) $$R_{n1} + n r V_{n2} = 0, \qquad R_{n2} - n r V_{n1} = 0,$$

(7) $$r' R'_{n1} + \zeta' Z'_{n1} = 0, \qquad r' R'_{n2} + \zeta' Z'_{n2} = 0,$$

(8) $$n r' R_{n2} + r^2 V'_{n1} + n \zeta' Z_{n2} = 0,$$

(9) $$n r' R_{n1} - r^2 V'_{n2} + n \zeta' Z_{n1} = 0.$$

Elimination of V_{n1}, V_{n2} yields the following result. On setting

(10) $$\lambda = R_{n1}, \qquad \mu = Z_{n1},$$

one obtains the differential equations

(11) $$r' \lambda' + \zeta' \mu' = 0,$$

(12) $$r \lambda' + (n^2 - 1) r' \lambda + n^2 \zeta' \mu = 0.$$

On setting

(13) $$\lambda = R_{n2}, \quad \mu = Z_{n2},$$

one obtains again precisely the equations (11), (12).

2.3. For $0 < u < U$, $-\infty < v < \infty$, clearly R, V, Z are of class C', and hence $R_{n1}(u), \ldots, Z_{n2}(u)$ are of class C' for $0 < u < U$. For $R_{n1}(u)$, $R_{n2}(u)$, $Z_{n1}(u)$, $Z_{n2}(u)$ this is true even in the closed interval $0 \leq u \leq U$. On the other hand, since $r(u)$ may vanish at one or both of the end points $u = 0$, $u = U$, for $V_{n1}(u)$, $V_{n2}(u)$ these end points may represent singularities. However, $V_{n1}(u)$ and $V_{n2}(u)$ are not involved in the differential equations (11) and (12), an important feature for the following discussion.

2.4. One verifies readily that the deformation vector $\mathfrak{z}$ reduces to the trivial form $\mathfrak{z} = (\mathfrak{a} \times \mathfrak{x}) + \mathfrak{b}$ if and only if the Fourier coefficients R_{ni}, V_{ni}, Z_{ni}, $i = 1, 2$, all vanish identically for $n > 1$ (see LIEBMANN [5]). Inspection of the preceding differential equations reveals that if $R_{n1} \equiv 0$, $R_{n2} \equiv 0$ for a certain $n > 1$ then for the same n the remaining Fourier coefficients V_{ni}, Z_{ni}, $i = 1, 2$, also vanish identically. Indeed, (6) yields $V_{n1} \equiv 0$, $V_{n2} \equiv 0$, and (8) and (9) yield then $Z_{n1} \equiv 0$, $Z_{n2} \equiv 0$. Hence: *if $\mathfrak{z}$ is non-trivial, then for some $n > 1$ the system* (11), (12) *must have a solution where $\lambda \not\equiv 0$.*

§ 3. Lemmas.

3.1. Given an admissible arc C in the yz plane (see 2.1), denote by P the end point of C that corresponds to $u=0$.

Definition 1. P is termed a *strong end point of the first kind for* C if $\zeta'(0) \neq 0$, $r(0) > 0$.

Definition 2. P is termed a *strong end point of the second kind for* C if the following conditions hold. (i) $r(0) > 0$. (ii) $\zeta'(0) = 0$. (iii) There exists a U^*, such that $0 < U^* < U$ and $|\zeta'(u)|$ is a non-decreasing function in the interval $0 \leq u \leq U^*$ (essentially, this means that the corresponding sub-arc of C is convex).

On rotating C around the z-axis, one obtains a surface of revolution S. Denote by K the boundary circle of S described by the end point P of C. Let $\mathfrak{z}$ be a deformation vector of class C' on S which satisfies (1) and *vanishes on* K.

Lemma 1. If P is a strong end point (of the first or second kind) for C, then $\mathfrak{z} \equiv 0$ on S.

For clarity, we subdivide the proof into several steps.

3.2. Assume first that P is of the first kind (see 3.1). For fixed n, consider the equations (10), (11), (12). Since $\mathfrak{z} = 0$ on K, we have clearly

$$\lambda(0) = 0, \qquad \mu(0) = 0. \tag{14}$$

Now observe that by assumption we have now $\zeta'(u) \neq 0$, $r(u) > 0$ for $0 \leq u < U$. Hence, on solving (11), (12) for λ' and μ', we obtain a system of the form

$$\lambda' = A_{11}(u)\,\lambda + A_{12}(u)\,\mu,$$
$$\mu' = A_{21}(u)\,\lambda + A_{22}(u)\,\mu,$$

where the coefficients $A_{ij}(u)$ are continuous for $0 \leq u < U$. Since λ, μ are of class C' in this range, by a classical uniqueness theorem (see for example BIEBERBACH [1]) the relations (14) imply that $\lambda \equiv 0$, $\mu \equiv 0$ for $0 \leq u < U$, and by continuity also for $0 \leq u \leq U$. Hence $R_{n1}(u) \equiv 0$, $Z_{n1}(u) \equiv 0$. Precisely the same argument [using (13), (11), (12)] yields that $R_{n2}(u) \equiv 0$, $Z_{n2}(u) \equiv 0$. From (8) it follows then that $V'_{n1}(u) \equiv 0$, and since clearly $V_{n1}(0) = 0$, we have $V_{n1}(u) \equiv 0$, and similarly $V_{n2}(u) \equiv 0$. The vanishing of all these Fourier coefficients implies that $R \equiv 0$, $V \equiv 0$, $Z \equiv 0$. By (2) it follows that $X \equiv 0$, $Y \equiv 0$, and hence $\mathfrak{z} \equiv 0$, as asserted.

3.3. Assume now that P is of the second kind (see 3.1). For *fixed* n, consider again the equations (10), (11), (12). Denote by I^* the interval

$$I^*: 0 \leq u \leq U^*,$$

where U^* has the same meaning as in 3.1, Definition 2. On solving, for $0 < u \leq U^*$, the system (11), (12) for λ', μ', we obtain a system of the form

$$\lambda' = A_{11}(u)\,\lambda + A_{12}(u)\,\zeta'\mu, \tag{15}$$

$$\mu' = \frac{A_{21}(u)}{\zeta'}\,\lambda + A_{22}(u)\,\mu, \tag{16}$$

where the coefficients $A_{ij}(u)$ are continuous in the closed interval I^*. Accordingly, we have a finite constant A such that

$$|A_{ij}(u)| < A, \qquad 0 \leq u \leq U^*. \tag{17}$$

Since $\zeta = 0$ on K, we have again

$$\lambda(0) = 0, \qquad \mu(0) = 0. \tag{18}$$

Recall also that λ, μ are of class C' in the closed interval I^*.

3.4. Since now $\zeta'(0) = 0$, the coefficient of λ in (16) is unbounded in the vicinity of $u = 0$ (except in the case $n = 1$). Accordingly, in proving that $\lambda \equiv 0$, $\mu \equiv 0$ in the present case also, some degree of caution is required. Indeed, for a *general* system of first-order, linear, homogeneous differential equations with unbounded coefficients the uniqueness theorem need not hold. Example: the system

$$\lambda' = (3u^2 + u)\mu, \qquad \mu' = u^{-2}\mu,$$

has the solution

$$\lambda = u^3 e^{-\frac{1}{u}}, \qquad \mu = e^{-\frac{1}{u}}.$$

Clearly, in this case, λ and μ vanish at $u = 0$, but do not vanish identically. However, in the situation considered in 3.3 the relations $\lambda \equiv 0$, $\mu \equiv 0$ will follow by means of the special features that are present.

3.5. Returning to 3.3, observe that

$$r'(u)^2 + \zeta'(u)^2 = 1,$$

since u is the arc length of C. Since $\zeta'(0) = 0$, by continuity we have therefore a u^*, such that $0 < u^* < U^*$ and

$$|r'(u)| > \tfrac{1}{2}, \qquad 0 \leq u \leq u^*. \tag{19}$$

Also, since μ is of class C' for $0 \leq u \leq U$ and $\mu(0) = 0$, we have a constant C_1 such that

$$|\mu(u)| \leq C_1 u, \qquad 0 \leq u \leq u^*. \tag{20}$$

Since μ' is bounded, we obtain from (19), (20), (11) an estimate of the form

$$|\lambda'(u)| \leq C_2 |\zeta'(u)|, \qquad 0 \leq u \leq u^*, \tag{21}$$

where C_2 is again a constant. Since $\lambda(0) = 0$, and since $|\zeta'|$ is a non-decreasing function for $0 \leq u \leq U^*$, we obtain by integrating (21) from 0 to any $u \leq u^*$, the estimate

$$|\lambda(u)| \leq C_2 \int_0^u |\zeta'(t)|\, dt \leq C_2 u\, |\zeta'(u)|, \qquad 0 \leq u \leq u^*. \tag{22}$$

Now choose u_0 so that [see (17)]

$$0 < u_0 < u^*, \qquad u_0 < \frac{1}{4A}. \tag{23}$$

By (22) we have then

$$|\lambda(u)| \leq C_2 u_0 |\zeta'(u)|, \qquad 0 \leq u \leq u_0. \tag{24}$$

Accordingly, the numbers Λ, M defined by

$$\Lambda = \text{l.u.b.} \frac{|\lambda(u)|}{|\zeta'(u)|}, \qquad 0 < u \leq u_0, \tag{25}$$

$$M = \text{l.u.b.} |\mu(u)|, \qquad \leq u \leq u_0 \tag{26}$$

are *finite*. We now write (15) in the form

$$\lambda' = A_{11}\zeta' \frac{\lambda}{\zeta'} + A_{12}\zeta'\mu.$$

By (17), (25), (26) there follows the estimate

$$|\lambda'| \leq A(\Lambda + M)|\zeta'|, \qquad 0 < u \leq u_0.$$

Since $\lambda(0) = 0$, integration from 0 to any $u \leq u_0$ yields the estimate

$$|\lambda(u)| \leq A(\Lambda + M) \int_0^u |\zeta'(t)|\, dt.$$

Since $|\zeta'|$ is a non-decreasing function in the range of integration, it follows that

$$|\lambda(u)| \leq A(\Lambda + M)|\zeta'(u)|u, \qquad 0 < u \leq u_0,$$

and hence, in view of (23),

$$\frac{|\lambda(u)|}{|\zeta'(u)|} \leq A(\Lambda + M)u \leq Au_0(\Lambda + M) \leq \tfrac{1}{4}(\Lambda + M),$$

for $0 < u \leq u_0$. By (25) we conclude that

$$\Lambda \leq \tfrac{1}{4}(\Lambda + M). \tag{27}$$

On writing (16) in the form

$$\mu' = A_{21}\frac{\lambda}{\zeta'} + A_{22}\mu,$$

a similar argument yields

$$M \leq \tfrac{1}{4}(\Lambda + M). \tag{28}$$

From (27), (28) we obtain, by addition,

$$\Lambda + M \leq \tfrac{1}{2}(\Lambda + M),$$

and since $\Lambda \geq 0$, $M \geq 0$, it follows that $\Lambda = 0$, $M = 0$. By (25), (26) we infer that

$$\lambda \equiv 0, \qquad \mu \equiv 0 \quad \text{for} \quad 0 \leq u \leq u_0. \tag{29}$$

Now consider the system (15), (16) for $u_0 \leq u < U$. In this range, $\zeta' \neq 0$, and hence the coefficients of λ, μ are continuous. Also, $\lambda(u_0) = 0$, $\mu(u_0) = 0$ by (29). Accordingly, by the classical uniqueness theorem (already used in 3.2) we conclude that $\lambda \equiv 0$, $\mu \equiv 0$ for $u_0 \leq u \leq U$. Hence, by (29), $\lambda \equiv 0$, $\mu \equiv 0$ for the whole interval $0 \leq u \leq U$. The rest of the proof, from this point on, is the same as in 3.2.

3.6. We note the following immediate extension of the Lemma 1. In the yz plane, let C be an arc with the following properties. (i) In terms of its arc length u, C can be represented in the form $y=r(u)$, $z=\zeta(u)$, $0 \leq u < +\infty$, where $r(u)$, $\zeta(u)$ are of class C' over this whole range (thus the total length of C is now infinite). (ii) $r(u) > 0$, $0 \leq u < +\infty$. (iii) $\zeta'(u) \neq 0$, $0 \leq u < +\infty$.

On rotating C around the z-axis, one obtains a surface of revolution S, with a boundary circle K corresponding to the end point $u=0$. Let $\mathfrak{z}$ be a deformation vector of class C' on S that satisfies (1) and vanishes on K.

Lemma 2. $\mathfrak{z} \equiv 0$ on S.

Proof. Choose an arbitrary $u_0 > 0$, and denote by S_0 the portion of S corresponding to $0 \leq u \leq u_0$. Then S_0, $\mathfrak{z}$ present the situation considered in 3.2, and hence $\mathfrak{z} \equiv 0$ on S_0 by the result derived there. Since $u_0 > 0$ was arbitrary, it follows that $\mathfrak{z} \equiv 0$ on all of S.

3.7. We shall now comment on the system (11), (12) for the case of the arc Γ_a described in 1.4 (see Fig. 2), assuming that

$$n > 1. \tag{30}$$

We have now $r(u) = a + \varrho(u)$, where $a > 0$ is a constant. Accordingly, the system (11), (12) appears in the form

$$\varrho' \lambda' + \zeta' \mu' = 0, \tag{31}$$

$$(a + \varrho) \lambda' + (n^2 - 1) \varrho' \lambda + n^2 \zeta' \mu = 0. \tag{32}$$

As noted in 2.3, λ and μ are of class C' for $0 \leq u \leq U$, and by assumption

$$a > 0, \qquad \varrho(u) \geq 0, \qquad \zeta'(0) = \zeta'(U) = 0. \tag{33}$$

Since $\varrho'(u)^2 + \zeta'(u)^2 \equiv 1$, and since Γ_a is convex from below, it follows that

$$\varrho'(0) = -1, \quad \varrho'(U) = +1. \tag{34}$$

Also, since Γ_a is convex from below, $|\zeta'(u)|$ is a non-decreasing function in the vicinity of $u=0$, and a non-increasing function in the vicinity of $u=U$. By (31), (34) we have

$$\lambda'(0) = 0, \qquad \lambda'(U) = 0. \tag{35}$$

From (32) we see that

$$\lambda(0) = 0, \qquad \lambda(U) = 0. \tag{36}$$

We recall that (see 1.4)

$$\zeta'(u) > 0 \quad \text{for} \quad 0 < u < U. \tag{36*}$$

From (31), (34) we infer that

$$\frac{\lambda'(u)}{\zeta'(u)} \to \mu'(0) \qquad \text{for} \quad u \to 0, \tag{37}$$

$$\frac{\lambda'(u)}{\zeta'(u)} \to -\mu'(U) \quad \text{for} \quad u \to U. \tag{38}$$

3.8. A pair (n, a), where $n > 1$ is an integer and $a > 0$, will be termed *exceptional* for the system (31), (32) if the system admits of a solution λ, μ such that $\lambda \not\equiv 0$. Assume now that (n, a) is exceptional and let λ, μ be a solution where $\lambda \not\equiv 0$. We assert that

$$\mu'(0) \neq 0, \quad \mu'(U) \neq 0. \tag{39}$$

The proof is the same in both cases, and so we indicate the argument only for $u = 0$. Since $|\zeta'(u)|$ is a non-decreasing function in the vicinity of $u = 0$, the argument used in 3.4 applies in showing first that $|\lambda(u)| \leq C_2\, u\, |\zeta'(u)|$ in the vicinity of $u = 0$, and hence

$$\frac{\lambda(u)}{\zeta'(u)} \to 0 \quad \text{for} \quad u \to 0. \tag{40}$$

Assume now that $\mu'(0) = 0$. On dividing in (32) by ζ' and making $u \to 0$, we obtain then by (37) and (40) the conclusion that $\mu(0) = 0$. But then we have $\lambda(0) = 0$, $\mu(0) = 0$, and thus the system (31), (32) presents the situation discussed in 3.3, 3.5. Accordingly, it would follow that $\lambda \equiv 0$, $\mu \equiv 0$, while by assumption $\lambda \not\equiv 0$. Thus (39) is proved.

3.9. *Lemma 3.* The set of exceptional pairs (n, a), in the sense of 3.8, is denumerable.

Proof. Let (n, a) be an exceptional pair, and let λ, μ be a solution of (31), (32), of class C' in $0 \leq u \leq U$, such that $\lambda \not\equiv 0$. Since $\varrho(u), \zeta(u)$ are by assumption (see 1.4) of class C'' in $0 \leq u \leq U$, we infer from (32) that λ'' exists and is continuous in $0 \leq u \leq U$. Thus, for $0 < u < U$, we can solve [in view of (36)] for μ in (32), and differentiate. Substitution of the resulting expression for μ' in (31) yields the differential equation

$$\left(\frac{\lambda'}{\zeta'}\right)' + \frac{(n^2 - 1)\, P}{a + \varrho}\, \lambda = 0, \qquad 0 < u < U, \tag{41}$$

where we have set

$$P = \frac{\varrho''\zeta' - \varrho'\zeta''}{(\zeta')^2}, \qquad 0 < u < U. \tag{42}$$

We observe that since Γ_a is convex from below, we have

$$P \geq 0. \tag{43}$$

The differential equation (41) is in the standard form assumed in the Sturm theory (see, for example, HOHEISEL [7]). Actually, the proof of lemma 3, from this point on, is merely an application of the fundamental Sturm oscillation theorem, except that in view of the weak assumptions upon $\varrho(u)$, $\zeta(u)$ we have to verify the validity of the oscillation theorem in the present situation. Hence, we proceed with some caution in the rest of the argument. We first verify that λ has only a finite number of zeros in $0 \leq u \leq U$. Indeed, zeros of λ cannot converge to $u = 0$, because this would imply the existence of a sequence of zeros of λ' converging to $u = 0$, implying by (37) that $\mu'(0) = 0$, in contradiction with (39). Similarly, one sees that zeros of λ cannot converge to $u = U$. On the other hand, if zeros of λ would converge to an interior

point u_0, where $0 < u_0 < U$, then one would have $\lambda(u_0) = 0$, $\lambda'(u_0) = 0$, and by the standard uniqueness theorem on equations of the form (41) it would follow that $\lambda \equiv 0$, a contradiction. Thus λ has a finite number $N(n, a, \lambda) \geq 2$ of zeros [recall that $\lambda(0) = 0$, $\lambda(U) = 0$].

The number $N(n, a, \lambda)$ depends actually only upon n and a. Indeed, let λ_1, λ_2 be any two non-trivial solutions of (41), satisfying the boundary conditions (35), (36), (37), (38). Substituting λ_1, λ_2 in (41) the resulting equations yield the relation

$$\left(\frac{\lambda_1'}{\zeta'}\lambda_2 - \frac{\lambda_2'}{\zeta'}\lambda_1\right)' = 0,$$

and hence

$$\left(\frac{\lambda_1'}{\zeta'}\lambda_2 - \frac{\lambda_2'}{\zeta'}\lambda_1\right) = c, \qquad 0 < u < U,$$

where c is a constant. For $u \to 0$, the left-hand side converges to zero, in view of the boundary conditions [see (37) in particular]. Hence $c = 0$, and thus $\lambda_1' \lambda_2 - \lambda_2' \lambda_1 \equiv 0$. Accordingly, λ_1 and λ_2 are linearly dependent, and thus clearly they have the same number of zeros.

Accordingly, we can write $N(n, a)$ instead of $N(n, a, \lambda)$. Clearly, lemma 3 will be proved if we can establish the following assertion: for given integers $n > 1$, $k \geq 2$ there exists at most one $a > 0$ such that the pair (n, a) is exceptional and $N(n, a) = k$. To verify this, assume that we have two exceptional pairs (n, a), (n, A), with corresponding non-trivial solutions λ, μ and Λ, M respectively, such that

$$N(n, a) = N(n, A) = k. \tag{44}$$

Without loss of generality, we can assume that $A > a$. We have then the equation (41) and also

$$\left(\frac{\Lambda'}{\zeta'}\right)' + \frac{(n^2 - 1)P}{A + \varrho}\Lambda = 0. \tag{45}$$

On multiplying (41) by Λ, (45) by $-\lambda$, and adding, we obtain the *Sturm identity*

$$\left(\frac{\lambda'}{\zeta'}\Lambda - \frac{\Lambda'}{\zeta'}\lambda\right)' + Q = 0, \tag{46}$$

where

$$Q = \frac{(n^2 - 1)(A - a)}{(a + \varrho)(A + \varrho)} P \lambda \Lambda. \tag{47}$$

Now let u_0 and $u_1 > u_0$ be two consecutive zeros of Λ. We verify: there exists at least one zero of u^* of λ such that $u_0 < u^* < u_1$. Indeed, if this is denied, then without loss of generality we can assume that $\lambda > 0$ for $u_0 < u < u_1$, $\Lambda > 0$ for $u_0 < u < u_1$.

Case 1. $0 < u_0 < u_1 < U$. On integrating (46) from u_0 to u_1, and recalling that $\Lambda(u_0) = \Lambda(u_1) = 0$, we obtain

$$-\frac{\Lambda'(u_1)}{\zeta'(u_1)}\lambda(u_1) + \frac{\Lambda'(u_0)}{\zeta'(u_0)}\lambda(u_0) + \int_{u_0}^{u_1} Q\, du = 0. \tag{48}$$

Since, by the standard uniqueness theorem, we must have $\Lambda'(u_0) \neq 0$, $\Lambda'(u_1) \neq 0$, and since $\Lambda > 0$ for $u_0 < u < u_1$, clearly $\Lambda'(u_1) < 0$, $\Lambda'(u_0) > 0$. Also, $\zeta'(u_0) > 0$, $\zeta'(u_1) > 0$ by (36*), and $\lambda(u_0) \geq 0$, $\lambda(u_1) \geq 0$. Thus (48) implies that the integral appearing there is ≤ 0. But clearly $Q \geq 0$ for $u_0 \leq u \leq u_1$ (see 43), and hence it follows that $Q \equiv 0$ for $u_0 \leq u \leq u_1$. Since $\lambda > 0$, $\Lambda > 0$ in the interior of this interval, and $n > 1$, $A > a > 0$, $\varrho \geq 0$, it follows that $P \equiv 0$ for $u_0 \leq u \leq u_1$. But then, by (45), we see that

$$\Lambda' = c\zeta', \qquad u_0 \leq u \leq u_1, \tag{49}$$

where c is a constant. Since $\Lambda(u_0) = \Lambda(u_1) = 0$, we must have a value $\bar{u}$ such that $u_0 < \bar{u} < u_1$ and $\Lambda'(\bar{u}) = 0$. Since $\zeta'(\bar{u}) \neq 0$, it follows from (49) that $c = 0$; hence we have $\Lambda'(u) \equiv 0$ for $u_0 \leq u \leq u_1$. Since we have also $\Lambda(u_0) = 0$, it follows that $\Lambda(u) \equiv 0$ for $u_0 \leq u \leq u_1$. The standard uniqueness theorem yields then that $\Lambda \equiv 0$ in the whole interval $0 \leq u \leq U$, a contradiction.

Case 2. One or both of the relations $u_0 = 0$, $u_1 = U$ holds. Since the proof is entirely analogous in the three possible subcases, we consider only the case $0 = u_0 < u_1 < U$. In this case, we first replace u_0 by a small $\varepsilon > 0$ and make $\varepsilon \to 0$. In view of (37), applied to Λ, we have then

$$\frac{\Lambda'(\varepsilon)}{\zeta'(\varepsilon)}\,\lambda(\varepsilon) \to M'(0)\,\lambda(0) = 0.$$

The first term in (48) is ≥ 0 as in Case 1, and hence the integral must be again ≤ 0. From this point on, the argument is the same as in Case 1.

It is thus established that λ must have at least one zero between any two consecutive zeros of Λ. Since λ, Λ both vanish at $u = 0$ and $u = U$, this clearly implies that λ must have at least one more zero than Λ, in contradiction with (44), and lemma 3 is proved.

Remark. The preceding argument does *not* show the *existence* of exceptional pairs (n, a). It would be a matter of interest to extend the existence theorem of REMBS [6] to the non-analytic case.

§ 4. Applications.

4.1. The facts stated in 1.3 and in the lemmas 1 and 2 in 3.1, 3.6 respectively may be combined by means of the following observation. In the $y\,z$ plane, let C be a curve which is the union of two curves C_0, C_1 with the following properties. (i) C_0 is a simple arc of class C' with end points P_0, P. (ii) On rotating C_0 around the z-axis, one obtains a surface of revolution S_0 which possesses the IR_1 property (see 1.1). (iii) C_1 is either an admissible arc with a strong end point, of the first or second kind, at P (see 3.1), or else C_1 is a simple arc of infinite length, with P as an end point, such that the assumptions of the lemma 2 in 3.6 hold.

On rotating C around the z-axis, one obtains a surface of revolution S. *We assert that S has the IR_1 property.* Indeed, let $\mathfrak{z}$ be a deformation vector of class C' on S, satisfying (1). Then S is the union of two surfaces of revolution

S_0, S_1 which correspond to the arcs C_0, C_1 respectively. By assumption, S_0 has the IR_1 proporty. Hence, we have

$$\mathfrak{z} = (\mathfrak{a} \times \mathfrak{x}) + \mathfrak{b} \quad \text{on} \quad S_0, \tag{50}$$

where $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ are constant vectors. Set

$$\mathfrak{z}^* = \mathfrak{z} - [(\mathfrak{a} \times \mathfrak{x}) + \mathfrak{b}] \quad \text{on} \quad S. \tag{51}$$

Then clearly $d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{z}^* = 0$ on S_1, and $\mathfrak{z}^*$ vanishes, in view of (50), on the boundary circle of S_1 that corresponds to the end poin P. Accordingly, by lemma 1

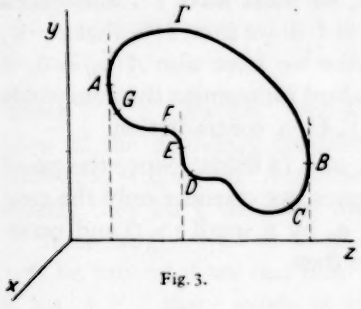

Fig. 3.

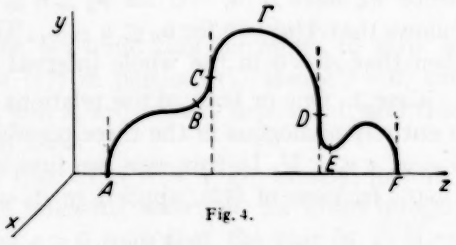

Fig. 4.

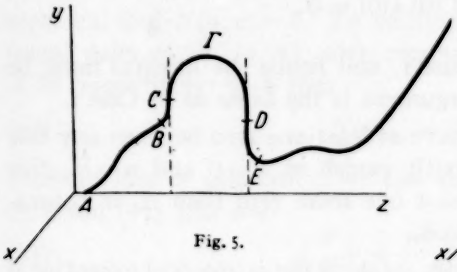

Fig. 5.

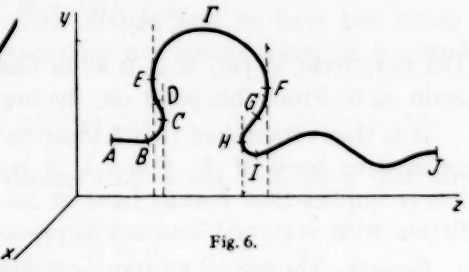

Fig. 6.

or lemma 2, $\mathfrak{z}^* \equiv 0$ on S_1. Hence, by (51), $\mathfrak{z} = (\mathfrak{a} \times \mathfrak{x}) + \mathfrak{b}$ on S_1 also, and the assertion that S has the IR_1 property is proved.

4.2. Now start with an arc $C_0 = \Gamma$, of class C'', with the properties (i)—(iv) stated in 1.2. On rotating Γ around the z-axis, one obtains a *strong convex belt* Σ with the property IR_1, according to the theorem of LIEBMANN quoted in 1.3. If we now attach, at one of the end points of $C_0 = \Gamma$, an arc C_1 so that $C = C_0 + C_1$ is of class C' and C_1 has the character required in 4.1, then on rotating C around the z-axis we obtain a surface of revolution S with the IR_1 property, by the remarks in 4.1. Repeating this process, we obtain successively surfaces of revolution of increasing diversity which possess the property IR_1.

The Figs. 3, 4, 5, 6 suggest various possibilities in constructing the meridian curve in the yz plane. The designated points in those Figures indicate the steps in the construction. Actually, inspection of the argument reveals that corners and cusps could be tolerated, in constructing the meridian, without impairing the IR_1 property of the resulting surface of revolution.

4.3. Now let us consider the surface S_a, described in 1.4, under the conditions (i), (ii), (iii), (1*), (2*), (3*) stated there. We assert that S_a has the IR_1 property, except for a denumerable set of values $a > 0$. To see this, we observe that by the remark in 2.4 the surface S_a has the IR_1 property unless the system (31), (32), which now replaces the system (11), (12), has a solution λ, μ such that $\lambda \not\equiv 0$, for some integer $n > 1$. In the terminology of 3.8, this means that (n, a) is an exceptional pair for the system (31), (32). But, by lemma 3 in 3.9, the set of exceptional pairs (n, a) is denumerable, and the assertion follows.

In the analytic case studied by REMBS [6], there actually exist *weak values* a (see 1.4) such that the corresponding surface S_a does not possess the IR_1 property, as shown by REMBS. It would be interesting to determine whether the set of *weak values* a may be *dense*, or whether this set is necessarily *isolated*.

(Added in proof). In the course of a seminar at the Ohio State University, Dr. A. D. ZIEBUR proved that the set of weak values is everywhere dense.

In view of the general remark in 4.1, it is clear that one could replace, in the situation discussed in 4.2, the arc Γ of Fig. 1 by the arc Γ_a of Fig. 2, provided that one avoids the denumerable set of weak values a.

Bibliography.

[1] BIEBERBACH: Differentialgleichungen. Berlin, Springer 1930. — [2] DARBOUX, G.: Théorie générale des surfaces, Bd. IV. — [3] EFIMOV, N. V.: Qualitative problems of the theory of deformation of surfaces (Russian). Amer. Math. Soc. Translation no. 37. — [4] LIEBMANN, H.: Über die Verbiegung der geschlossenen Ringfläche. Göttinger Nachr. **1901**, 39—53. — [5] LIEBMANN, H.: Über die Verbiegung von Rotationsflächen. Leipzig Ber. **53**, 215—234 (1901). — [6] REMBS, E.: Über die Verbiegung parabolisch berandeter Flächen negativer Krümmung. Math. Z. **35**, 529—535 (1932). — [7] HOHEISEL, G.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Slg. Göschen **1926**. — [8] REMBS, E.: Verbiegungen höherer Ordnung und ebene Flächenrinnen. Math. Z. **36**, 110—121 (1933).

The Ohio State University and The Tokyo Institute of Technology.

(Eingegangen am 12. April 1953.)

NAGAO, H., and T. NAKAYAMA
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 164—170 (1953)

On the structure of (M_0)- and (M_u)-modules.

By
HIROSI NAGAO and TADASI NAKAYAMA.

Let A be an algebra, of finite rank over a field, and consider a left-module $\mathfrak{m}$ of A. We call $\mathfrak{m}$ an (M_0)-module (of A), when it has the following property:

i) if a left-module $\mathfrak{M}$ of A contains an A-submodule $\mathfrak{n}$ such that $\mathfrak{M}/\mathfrak{n}$ is A-isomorphic to $\mathfrak{m}$, then $\mathfrak{M}$ possesses a second A-submodule $\mathfrak{m}'$ (necessarily A-isomorphic to $\mathfrak{m}$) such that $\mathfrak{M}$ is the direct sum of $\mathfrak{m}'$ and $\mathfrak{n}$: $\mathfrak{M}=\mathfrak{m}'\oplus\mathfrak{n}$.

On the other hand, we call $\mathfrak{m}$ an (M_u)-module, when the following holds:

ii) if a left-module $\mathfrak{M}$ of A has $\mathfrak{m}$ as its A-submodule, then $\mathfrak{M}$ possesses a second A-submodule $\mathfrak{n}$ such that $\mathfrak{M}$ is the direct sum of $\mathfrak{m}$ and $\mathfrak{n}$: $\mathfrak{M}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{n}$.

Such (M_0)- and (M_u)-modules have recently been studied, by means of certain linear mappings, by GASCHÜTZ [3] and IKEDA [4] in the cases of group and FROBENIUS algebras[1]). In the present note we want to determine the structure of (M_0)- or (M_u)-modules, on assuming the existence of unit element 1 in A. We shall prove, that $\mathfrak{m}$ is an (M_0)-module if and only if $\mathfrak{m}$ is a direct sum of (a finite or infinite number of) modules A-isomorphic to left-ideal direct components of A, and that $\mathfrak{m}$ is an (M_u)-module if and only if $\mathfrak{m}$ is a direct sum of modules whose duals are A-isomorphic to right-ideal direct components of A[2]).

We wish to thank M. IKEDA for his friendly collaboration during the preparation of the present note.

§1. (M_0)-modules.

Let A be an algebra (of finite rank) over a field Ω possessing unit element 1. Let

$$A=\overset{0}{\sum_{\varkappa=1}^{k}} A e_\varkappa \tag{1}$$

be a direct decomposition of A into directly indecomposable left-ideals $Ae_\varkappa$, where $\{e_\varkappa\}$ is a system of mutually orthogonal primitive idempotent elements with $\sum e_\varkappa=1$.

Lemma 1. Let a left-module $\mathfrak{m}$ of A[3]) be the direct sum of A-submodules $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$: $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_1\oplus\mathfrak{m}_2$. $\mathfrak{m}$ is an (M_0)-module if and only if both $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ are (M_0)-modules.

[1]) They consider algebras over a commutative ring (which is not necessarily a field) and in that case the definition of (M_0)- and (M_u)-modules should be modified a little.

[2]) Cf. NAKAYAMA-NESBITT [7], p. 664 for a particular case.

[3]) Though we do not assume that the unit element 1 of A is an identity operator, we shall always assume that the unit element of the ground field Ω is an identity operator on $\mathfrak{m}$.

Proof. Assume first that $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ are (M_0)-modules. Let $\mathfrak{m}$ be A-isomorphic to a residue-module $\mathfrak{M}/\mathfrak{n}$ (of an A-leftmodule $\mathfrak{M}$ modulo its A-submodule $\mathfrak{n}$). Let $\mathfrak{M}_i$ be, for each $i=1, 2$, the inverse image of $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{M}$, by the (given) homomorphism of $\mathfrak{M}$ onto $\mathfrak{m}$. Clearly $\mathfrak{m}_i \cong \mathfrak{M}_i/\mathfrak{n}$. There exists, because of our assumption, an A-submodule $\mathfrak{m}_i'$ of $\mathfrak{M}_i$ with $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{m}_i' + \mathfrak{n}$. Then we have $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_1' \oplus \mathfrak{m}_2' \oplus \mathfrak{n}$. This shows that $\mathfrak{m}$ is an (M_0)-module.

Assume next conversely that $\mathfrak{m}$ is an (M_0)-module. Suppose that $\mathfrak{m}_1$ is T-isomorphic to a residue-module $\mathfrak{M}/\mathfrak{n}$. Let then $\mathfrak{M}_0$ be the direct sum $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{m}_2$. Then $\mathfrak{m} \cong \mathfrak{M}_0/\mathfrak{n}$. So there exists an A-submodule $\mathfrak{m}'$ of $\mathfrak{M}_0$ with $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{m}' \oplus \mathfrak{n}$. Naturally $\mathfrak{m}$ is canonically T-isomorphic to $\mathfrak{m}'$. Let $\mathfrak{m}_1'$ be the image in $\mathfrak{m}'$ of $\mathfrak{m}_1$ ($\subseteqq \mathfrak{m}$). Then $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_1' \oplus \mathfrak{n}$ as one easily sees. Thus $\mathfrak{m}_1$ is an (M_0)-module. We may treat $\mathfrak{m}_2$ similarly.

Lemma 2. Suppose that an A-left-module $\mathfrak{m}$ is annihilated by A: $A\mathfrak{m} = 0$. Then $\mathfrak{m}$ is an (M_0)-module.

Proof. Let $\mathfrak{m} \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{n}$. Let $\{u_\mu\}$ be a (linearly independent) Ω-basis of $\mathfrak{m}$. Take, for each μ, an element v_μ of $\mathfrak{M}$ whose class modulo $\mathfrak{n}$ corresponds to u_μ by the isomorphism. As $1\mathfrak{m} = 0$, we have $1v_\mu \in \mathfrak{n}$. Put $v_\mu' = v_\mu - 1v_\mu$. We see readily that the module $\mathfrak{m}'$ spanned by $\{v_\mu'\}$ over Ω is an A-left-module satisfying $A\mathfrak{m}' = 0$ and $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}' \oplus \mathfrak{n}$.

Now we prove

Theorem 1. *A left-module $\mathfrak{m}$ of the algebra A is an (M_0)-module if and only if $1\mathfrak{m}$ is the direct sum of (a finite or infinite number of) modules A-isomorphic to left-ideal direct components $Ae_\varkappa$ of A.*

Proof. By virtue of Lemmas 1, 2 we have merely to treat the case where $\mathfrak{m} = 1\mathfrak{m}$, i.e. 1 is an identity operator of $\mathfrak{m}$.

Assume first that $\mathfrak{m}$ is a direct sum $\mathfrak{m} = \overset{0}{\sum}_\mu \mathfrak{m}_\mu$, where each $\mathfrak{m}_\mu$ is A-isomorphic to a left-ideal direct component of A, say $Ae_{\varkappa(\mu)}$. Let u_μ be the element of $\mathfrak{m}_\mu$ which corresponds to $e_{\varkappa(\mu)}$. Suppose, now, that $\mathfrak{m}$ is A-isomorphic to a residue-module $\mathfrak{M}/\mathfrak{n}$ and v_μ be, for each μ, an element of $\mathfrak{M}$ whose class modulo $\mathfrak{n}$ corresponds to u_μ. Put $\mathfrak{m}' = \sum_\mu Ae_{\varkappa(\mu)}v_\mu$. It is easy to see that the summation is direct and each $Ae_{\varkappa(\mu)}v_\mu$ is A-isomorphic to $Ae_{\varkappa(\mu)}$ by the correspondence $ae_{\varkappa(\mu)}v_\mu \leftrightarrow ae_{\varkappa(\mu)}$ ($a \in A$) (thus A-isomorphic to $\mathfrak{m}_\mu$ by the correspondence $ae_{\varkappa(\mu)}v_\mu \leftrightarrow au_\mu$). Thus $\mathfrak{m}'$ is A-isomorphic to $\mathfrak{m}$ and the isomorphism is in accord with our isomorphism of $\mathfrak{m}$ and $\mathfrak{M}/\mathfrak{n}$. Hence $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}' \oplus \mathfrak{n}$, and $\mathfrak{m}$ is an (M_0)-module.

Assume next conversely that $\mathfrak{m}$ is an (M_0)-module (satisfying $\mathfrak{m} = 1\mathfrak{m}$). To each element u of $\mathfrak{m}$ we associate an A-left-module Ax_u possessing a single generator x_u and A-isomorphic to A by the correspondence $ax_u \leftrightarrow a$ ($a \in A$). Let $\mathfrak{M} = \overset{0}{\sum}_{u \in \mathfrak{m}} Ax_u$ be the direct sum of these modules. The mapping

$$\sum_{u \in \mathfrak{m}} a_u x_u \to \sum a_u u \quad (a_u \in A)$$

is an A-homomorphism of $\mathfrak{M}$ onto $\mathfrak{m}$. Let $\mathfrak{n}$ be the kernel of the homomorphism; we have $\mathfrak{m} \cong \mathfrak{M}/\mathfrak{n}$. There exists, by virtue of our assumption, an A-submodule

$\mathfrak{m}'$ such that $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}' \oplus \mathfrak{n}$. Let N be the radical of A. Then

$$\mathfrak{M}/N\mathfrak{M} = \mathfrak{m}'/N\mathfrak{m}' \oplus \mathfrak{n}/N\mathfrak{n}. \tag{2}$$

On the other hand, we have $\mathfrak{M} = \overset{0}{\sum}_{\varkappa, u} A e_\varkappa x_u$ and

$$\mathfrak{M}/N\mathfrak{M} = \overset{0}{\sum}_{\varkappa, u} A e_\varkappa x_u / N e_\varkappa x_u, \tag{3}$$

the summation being again direct. Here each component $A e_\varkappa x_u / N e_\varkappa x_u$ is A-isomorphic to $A e_\varkappa / N e_\varkappa$ $\left(\cong (A e_\varkappa + N)/N\right)$. So the A-module $\mathfrak{M}/N\mathfrak{M}$ is completely reducible. Now, let $\mathfrak{R}$ and $\overline{\mathfrak{R}}$ be the A-endomorphism rings of $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{M}/N\mathfrak{M}$ respectively. Each element φ of $\mathfrak{R}$ maps $N\mathfrak{M}$ into $N\mathfrak{M}$ and induces thus an element $\overline{\varphi}$ of $\overline{\mathfrak{R}}$. If conversely $\overline{\varphi}$ is an element of $\overline{\mathfrak{R}}$, we take, for each pair $(\varkappa, u)$, an element $v_{\varkappa, u}$ whose class modulo $N\mathfrak{M}$ is $(e_\varkappa x_u \bmod N\mathfrak{M})^{\overline{\varphi}}$. Defining $(a e_\varkappa x_u)^\varphi$ to be $a e_\varkappa v_{\varkappa, u}$, we get then an element φ of $\mathfrak{R}$ which induces, modulo $N\mathfrak{M}$, our given $\overline{\varphi}$. We get thus a (ring-) homomorphism $\varphi \to \overline{\varphi}$ of $\mathfrak{R}$ onto $\overline{\mathfrak{R}}$. Let $\mathfrak{R}_0$ be the kernel of the homomorphism. Since $\mathfrak{M}^{\mathfrak{R}_0} \subseteq N\mathfrak{M}$, $\mathfrak{R}_0$ is nilpotent.

As $\mathfrak{M}/N\mathfrak{M}$ is completely reducible and (3) is in fact its decomposition into irreducible (A-) modules, as was observed above, the decomposition (2) implies the existence of a regular element $\overline{\varphi}$ of $\overline{\mathfrak{R}}$ (i.e. an A-automorphism of $\mathfrak{M}/N\mathfrak{M}$) and a set S of pairs $(\varkappa, u)$ such that

$$\left(\overset{0}{\sum}_{(\varkappa, u) \in S} A e_\varkappa x_u / N e_\varkappa x_u\right)^{\overline{\varphi}} = \mathfrak{m}'/N\mathfrak{m}',$$

$$\left(\overset{0}{\sum}_{(\varkappa, u) \notin S} A e_\varkappa x_u / N e_\varkappa x_u\right)^{\overline{\varphi}} = \mathfrak{n}/N\mathfrak{n}.$$

It is easy to see from our above observation that there exists an element φ of $\mathfrak{R}$, which induces $\overline{\varphi}$, such that

$$\left(\overset{0}{\sum}_{(\varkappa, u) \in S} A e_\varkappa x_u\right)^\varphi \subseteq \mathfrak{m}',$$

$$\left(\overset{0}{\sum}_{(\varkappa, u) \notin S} A e_\varkappa x_u\right)^\varphi \subseteq \mathfrak{n}.$$

As $\overline{\varphi}$ is regular in $\overline{\mathfrak{R}}$, so is φ in $\mathfrak{R}$[4]). Hence φ must map $\overset{0}{\sum}_{(\varkappa, u) \in S} A e_\varkappa x_u$ (A-) isomorphically onto $\mathfrak{m}'$ (and $\overset{0}{\sum}_{(\varkappa, u) \notin S} A e_\varkappa x_u$ isomorphically onto $\mathfrak{n}$). So

$$\mathfrak{m} \cong \overset{0}{\sum}_{(\varkappa, u) \in S} A e_\varkappa x_u, \qquad A e_\varkappa x_u \cong A e_\varkappa$$

and $\mathfrak{m}$ has the asserted structure. Our theorem is thus proved.

Corollary. Let a left-module $\mathfrak{m}$ of A be directly decomposed into a (finite or infinite) family of A-submodules $\mathfrak{m}_\mu$: $\mathfrak{m} = \overset{0}{\sum}_\mu \mathfrak{m}_\mu$. $\mathfrak{m}$ is an (M_0)-module if and only if every $\mathfrak{m}_\mu$ is an (M_0)-module.

Proof. The "if" assertion follows from our theorem, while we see the "only if" part from our Lemma 1 (or from our theorem and a repetition of its proof).

[4]) Because $\mathfrak{R}_0$ is nilpotent (whence quasi-regular). In fact $\mathfrak{R}_0$ is the radical of $\mathfrak{R}$, in the sense of the term either of JACOBSON, FITTING, KÖTHE or AZUMAYA.

Remark. Theorem 1 remains valid also when A is a ring with minimum condition (and possessing unit element 1) in the following modified form: a left-module $\mathfrak{m}$ of A is an (M_0)-module if and only if $1\mathfrak{m}$ is a direct sum of modules A-isomorphic to $Ae_\varkappa$ and the largest submodule of $\mathfrak{m}$ annihilated by A is a direct sum of (again a finite on infinite number of) infinite cyclic modules (i.e. is a free abelian group). This we can see similarly as above, on observing that a module with void operator domain is an (M_0)-module, in the sense of modules with void operator domain, if and only if it is a free abelian group; the proof to the "if" part is similar to the proof of Lemma 2, while the "only if" part may readily be derived from that every abelian group, with void operator domain, is a homomorphic image of a free one, and that a subgroup of a free abelian group is a free abelian group.

§ 2. (M_u)-Modules.

Let again A be an algebra (of finite rank) over a field Ω possessing unit element 1. The system $\{e_\varkappa\}$ of primitive idempotent elements in the decomposition (1) gives rise also to a direct decomposition

$$A = \overset{0}{\sum}_{\varkappa=1}^{k} e_\varkappa A \tag{4}$$

of A into directly indecomposable right-ideals.

Lemma 3. Let a left-module $\mathfrak{m}$ of A be the direct sum of a family of A-submodules $\mathfrak{m}_\mu$: $\mathfrak{m} = \overset{0}{\sum}_{\mu} \mathfrak{m}_\mu$. Then $\mathfrak{m}$ is an (M_u)-module if and only if every $\mathfrak{m}_\mu$ is an (M_u)-module.

Proof. The necessity assertion is immediate. It is indeed sufficient to consider the case where $\{\mu\}$ is a two element set $\{1, 2\}$. Assume thus that $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$ is an (M_u)-module. Suppose that $\mathfrak{m}_1$ is contained, as A-submodule, in an A-left-module $\mathfrak{M}$. Construct the direct sum $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{m}_2$. Then $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$ becomes an A-submodule of $\mathfrak{M}_0$. There must exist an A-submodule $\mathfrak{n}$ of $\mathfrak{M}_0$ satisfying $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{n}$. If we denote by $\mathfrak{n}_1$ the $\mathfrak{M}$-projection of $\mathfrak{n}$ in the decomposition $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{m}_2$, then we have $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$. This shows that $\mathfrak{m}_1$ is an (M_u)-module.

To prove the sufficiency assertion, let $\mathfrak{m} = \overset{0}{\sum}_{\mu} \mathfrak{m}_\mu$ and assume that every $\mathfrak{m}_\mu$ is an (M_u)-module. Consider an A-left-module $\mathfrak{M}$ which contains $\mathfrak{m}$ as an A-submodule: $\mathfrak{M} \supseteqq \mathfrak{m}$. Let $\mathfrak{n}$ be a maximal one among A-submodules of $\mathfrak{M}$ intersecting with $\mathfrak{m}$ only by 0. On supposing that $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$, we take an element u_0 of $\mathfrak{M}$ not belonging to $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$. Put

$$\mathfrak{M}_1 = Au_0 + (\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}), \qquad \overline{\mathfrak{M}}_1 = \mathfrak{M}_1/(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}).$$

We may take an Ω-submodule of $\mathfrak{M}_1$ which forms a representative system of $\mathfrak{M}$ modulo $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$; thus, if $r_{\bar{u}}$ is, for each $\bar{u} \in \mathfrak{M}$, the representative of $\bar{u}$ in the system, then

$$r_{\alpha\bar{u}+\beta\bar{v}} = \alpha r_{\bar{u}} + \beta r_{\bar{v}} \qquad (\alpha, \beta \in \Omega),$$
$$a r_{\bar{u}} = r_{a\bar{u}} + v(a, \bar{u}), \qquad v(a, \bar{u}) \in \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n} \quad (a \in A).$$

Then $v(a, u)$ is Ω-linear with respect to a and u. Moreover we have

$$a\,v(b, \bar{u}) - v(a, b, \bar{u}) + v(a, b\,\bar{u}) = 0. \tag{5}$$

Set

$$v(a, \bar{u}) = s(a, \bar{u}) + t(a, \bar{u}) \quad (s(a, \bar{u}) \in \mathfrak{m},\ t(a, \bar{u}) \in \mathfrak{n}) \tag{6}$$

and

$$s(a, \bar{u}) = \textstyle\sum_\mu s_\mu(a, \bar{u}) \qquad (s_\mu(a, \bar{u}) \in \mathfrak{m}_\mu). \tag{7}$$

Then each $s_\mu(a, \bar{u})$ is Ω-linear with respect to a and $\bar{u}$, and (5) remains valid with $v(a, \bar{u})$ replaced by $s_\mu(a, \bar{u})$. As $\mathfrak{m}_\mu$ is, for each μ, an (M_u)-module, there exists[5]) an Ω-linear mapping $w_\mu(\bar{u})$ of $\overline{\mathfrak{M}}$ into $\mathfrak{m}_\mu$ such that $s_\mu(a, \bar{u}) = a\,w_\mu(\bar{u}) - w_\mu(a, \bar{u})$. Since both A and $\overline{\mathfrak{M}}$ are of finite rank over Ω, $s_\mu(a, \bar{u})$ vanishes identically on $a, \bar{u}$ for almost all μ. For such identically vanishing $s_\mu(a, \bar{u})$ we may, and shall, take $w_\mu(\bar{u})$ to be identically 0. Put then

$$w(\bar{u}) = \textstyle\sum_\mu w_\mu(\bar{u}) \quad (\in \mathfrak{m}),$$

$$r'_{\bar{u}} = r_{\bar{u}} - w(\bar{u}).$$

Then

$$a\,r'_{\bar{u}} = r'_{a\,\bar{u}} + t(a, \bar{u}).$$

Hence the sum $\mathfrak{n} + \{r'_{\bar{u}}\}$ is an A-submodule of $\mathfrak{M}$. Clearly $\mathfrak{n} + \{r'_{\bar{u}}\} \neq \mathfrak{n}$ and $(\mathfrak{n} + \{r'_{\bar{u}}\}) \cap \mathfrak{m} = 0$. This contradicts with the maximality of $\mathfrak{n}$. Thus necessarily $\mathfrak{M} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$, which proves that $\mathfrak{m}$ is an (M_u)-module.

Lemma 4. Let a left-module $\mathfrak{M}$ of A be directly decomposed into a family of directly indecomposable A-submodules $\mathfrak{m}_\mu$ possessing (A-) composition series. Then any component in a direct decomposition of $\mathfrak{M}$ into A-submodules has a direct summand A-isomorphic to some $\mathfrak{m}_\mu$.

See, for the proof, AZUMAYA [1] or BAER [2].

Now, with an Ω-module $\mathfrak{M}$, we denote by $\mathfrak{M}^*$ the dual module of $\mathfrak{M}$, i.e. the Ω-module of all Ω-linear mappings of $\mathfrak{M}$ into Ω. In case $\mathfrak{M}$ is an A-right-(resp. left-)module, the dual module $\mathfrak{M}^*$ is an A-left-(resp. right-)module, where we put, for $\lambda \in \mathfrak{M}^*$, $a \in A$ and $u \in \mathfrak{M}$,

$$(a\,\lambda)(u) = \lambda(u\,a) \qquad (\text{resp. } (\lambda\,a)(u) = \lambda(a\,u)).$$

Further, with each submodule $\mathfrak{m}$ of $\mathfrak{M}$ we may associate a submodule $\mathfrak{m}_1$ of $\mathfrak{M}^*$ consisting of all elements of $\mathfrak{M}^*$ vanishing on $\mathfrak{m}$. If $\mathfrak{M}$ is an A-left-module, say, and if $\mathfrak{m}$ is its A-(left-)submodule of finite rank over Ω, then $\mathfrak{M}^*/\mathfrak{m}_1$ is A-(right-)isomorphic to the dual module $\mathfrak{m}^*$ of $\mathfrak{m}$.

Lemma 5. The dual $(e_\varkappa A)^*$ of the right-ideal $e_\varkappa A$ [in (4)] is an (M_u)-module.

Proof. Put $\mathfrak{m} = (e_\varkappa A)^*$ and let $\mathfrak{m}$ be contained, as A-submodule, in an A-left-module $\mathfrak{M}$. Denote by $\mathfrak{m}_1$ the submodule of $\mathfrak{M}^*$ associated with $\mathfrak{m}$. Then $\mathfrak{M}^*/\mathfrak{m}_1 \cong \mathfrak{m}^* = (e_\varkappa A)^{**} \cong e_\varkappa A$; observe that $e_\varkappa A$ is of finite rank over Ω.

[5]) See e.g. KAWADA [5].

As $e_\varkappa A$ is an (M_0)-right-module, we have $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$ with an A-(right-)submodule $\mathfrak{n}_1$ of $\mathfrak{M}^*$. Let $\mathfrak{n}$ be the A-(left-)submodule of $\mathfrak{M}$ consisting of all elements u on which every element of $\mathfrak{n}_1$ vanishes. As $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$, we have $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n} = 0$. Further, as $\mathfrak{n}_1$ is of finite rank, over Ω, we see readily that $\mathfrak{n}_1$ is the submodule of $\mathfrak{M}^*$ associated with $\mathfrak{n}$, and we have, from $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{n}_1 = 0$, that $\mathfrak{M} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$. Thus $\mathfrak{M} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$, which shows that $\mathfrak{m} = (e_\varkappa A)^*$ is an (M_u)-module.

Lemma 6. If a left-module $\mathfrak{m}$ of A is annihilated by A, then $\mathfrak{m}$ is an (M_u)-module.

Proof. Let $\mathfrak{m}$ be contained, as A-submodule, in an A-leftmodule $\mathfrak{M}$. Set $\mathfrak{M}_1 = 1\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{M}_2 = \{u \in \mathfrak{M} \mid 1u = 0\}$. Then $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2$ and $\mathfrak{M}_2 \supseteq \mathfrak{m}$. As $A\mathfrak{M}_2 = 0$, clearly $\mathfrak{m}$ is a direct component of $\mathfrak{M}_2$, whence of $\mathfrak{M}$, in the sense of A-modules.

Now we have

Theorem 2. *A-left-module $\mathfrak{m}$ of the algebra A is an (M_u)-module, if and only if $1\mathfrak{m}$ is a direct sum of (a finite or infinite number of) submodules A-isomorphic to the duals $(e_\varkappa A)^*$ of the right-ideal direct components $e_\varkappa A$ of A.*

Proof. Because of Lemma 6 and the easier half of Lemma 3, it is enough to consider the case $1\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. Further, the sufficiency assertion is clear from the other half of Lemma 3 and Lemma 5.

To prove the necessity of the condition, consider an A-left-module $\mathfrak{m}$ with $\mathfrak{m} = 1\mathfrak{m}$. Let $\mathfrak{M}$ be the Ω-module of all Ω-linear mappings of A into $\mathfrak{m}$. Defining at with $a \in A$, $t \in \mathfrak{M}$ by $(a\,t)\,(b) = t(b\,a)$ $(b \in A)$, we consider $\mathfrak{M}$ as a left-module of T. Further, putting $u(a) = a\,u$ for each $u \in \mathfrak{m}$, we may consider $\mathfrak{m}$ as an A-submodule of $\mathfrak{M}$. Now, let $\{u_\mu\}$ be a (linearly independent) Ω-basis of $\mathfrak{m}$. For each $t \in \mathfrak{M}$, put

$$t(a) = \sum_\mu \tau_\mu(a)\, u_\mu \qquad (\tau_\mu(a) \in \Omega).$$

With each fixed $t \in \mathfrak{M}$, almost all τ_μ vanish (identically on a) (since A is of finite rank over Ω). We see readily that the correspondence $t \to \{\tau_\mu\}$ gives an A-isomorphism of $\mathfrak{M}$ onto the direct sum of isomorphic copies, as many as the power of the set $\{\mu\}$, of the dual A^* of the A-right-module A. Hence $\mathfrak{M}$ is the direct sum of a certain number of A-submodules each of which is A-isomorphic to the dual $(e_\varkappa A)^*$ of some $e_\varkappa A$.

Assume, now, that our A-left-module $\mathfrak{m}$ is an (M_u)-module. Then there exists an A-submodule $\mathfrak{n}$ of $\mathfrak{M}$ satisfying $\mathfrak{M} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$. Let $\{\mathfrak{m}_\nu\}$ be a maximal family of A-submodules such that each $\mathfrak{m}_\nu$ is A-isomorphic to some $(e_\varkappa A)^*$ and the sum $\sum^0 \mathfrak{m}_\nu$ is direct; the existence of a such maximal family can readily be seen by means of ZORN's lemma. The direct sum $\sum^0 \mathfrak{m}_\nu$ is an (M_u)-module, by Lemmas 3 and 5, and therefore, there exists an A-submodule $\mathfrak{n}_0$ of $\mathfrak{m}$ such as $\mathfrak{m} = \sum^0 \mathfrak{m}_\nu \oplus \mathfrak{n}_0$. Hence $\mathfrak{M} = \sum^0 \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}_0 \oplus \mathfrak{n}$. As $\mathfrak{M}$ is, on the other hand, a direct sum of A-submodules each of which is A-isomorphic to some $(e_\varkappa A)^*$. It follows, by Lemma 4, that if $\mathfrak{n}_0 \neq 0$ then $\mathfrak{n}$ has a direct component

A-isomorphic to a certain $(e_\nu A)^*$, contrary to the maximality property of the family $\{\mathfrak{m}_\nu\}$. So $\mathfrak{m} = \sum_0 \mathfrak{m}_\nu$ has the structure asserted in our theorem.

Corollary. The A-left-module A itself is an (M_u)-module if and only if A is a quasi-Frobenius algebra[6]).

Addendum (August 4, 1953): We wish to mention R. BAER's works in which the (M_0)- and (M_u)-properties, in our terminology, are studied for general groups; see e.g. R. BAER, Absolute retracts in group theory, Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 501—506 (1946). Further, we have learned recently that the notions of projective and injective modules, which are very similar (and in fact equivalent, as they turn out) to our (M_0)- and (M_u)-modules, have been exploited by H. CARTAN and S. EILENBERG in their recent (as yet unappeared) book. However, we assume that our main theorems themselves are new.

References.

[1] AZUMAYA, G.: On generalized semi-primary rings and KRULL-REMAK-SCHMIDT's theorem. Jap. J. Math. **19**, 525—549 (1949). — Nagoya Math. J. **1**, 117—124 (1950). — [2] BAER, R.: Direct decompositions into infinitely many summands. Trans. Amer. Math. Soc. **64**, 519—551 (1948). — [3] GASCHÜTZ, W.: Über den Fundamentalsatz von MASCHKE zur Darstellungstheorie der endlichen Gruppen. Math. Z. **56**, 376—387 (1952). — [4] IKEDA, M.: On a theorem of GASCHÜTZ, Osaka. Math. J. **5**, 53—58 (1953). — [5] KAWADA, Y.: On the cohomology theory o frings. J. Math. Soc. Jap. **1**, 22—28 (1948). — [6] NAKAYAMA, T.: On Frobeniusean algebras, I. Ann. of Math. **40**, 611—633 (1939). — [7] NAKAYAMA-C. NESBITT, T.: Note on symmetric algebras. Ann. of Math. **39**, 659—668 (1938).

[6]) NAKAYAMA [6].

Osaka University and Nagoya University.

(Eingegangen am 18. Mai 1953.)

WEIER, J.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 171—190 (1953).

Fixpunkttheorie in topologischen Mannigfaltigkeiten.

Von
JOSEF WEIER.

Aus der Vielzahl der Untersuchungen über Fixpunkte heben sich einige besonders wichtige Sätze hervor. Unter diesen sind der Satz von HOPF[1]) über die LEFSCHETZsche Zahl[2]), der HOPFsche Approximationssatz[3]) und die Eigenschaften der NIELSEN-REIDEMEISTERschen Fixpunktklassen[4]).

Der Satz über die LEFSCHETZsche Zahl besagt: Ist f eine stetige Abbildung eines endlichen Polyeders in sich, so sind ihre algebraische Fixpunktzahl und ihre LEFSCHETZsche Zahl gleich. Da die LEFSCHETZsche Zahl eine Homologie- und also eine Homotopieinvariante ist, folgt: Homotope Abbildungen eines endlichen Polyeders in sich haben die gleiche algebraische Fixpunktzahl. Ist P eine kompakte topologische Mannigfaltigkeit, welche simplizial zerlegbar ist, so gilt, daher im besonderen für P, daß die algebraische Fixpunktzahl eine Homotopieinvariante ist. Aber auch wenn P nicht simplizial zerlegbar ist, bleibt die algebraische Fixpunktzahl invariant gegenüber Deformationen: In Abschnitt 2 wird ein neuer Beweis für die Homotopieinvarianz gegeben, der überdies eine simpliziale Zerlegung von P nicht voraussetzt. — Verschärfungen des Satzes, daß jede Abbildung eines endlichen Polyeders in sich mit einer von Null verschiedenen LEFSCHETZschen Zahl wenigstens einen Fixpunkt hat, auf allgemeinere Mengen als Polyeder sind von LEFSCHETZ schon verschiedentlich angegeben worden[5]).

Zum Approximationssatz. Wenn Q ein endliches Polyeder bezeichnet, so gilt folgender Satz: Ist f eine stetige Abbildung von Q in sich und ε eine positive Zahl, so existiert eine zu f homotope Abbildung f' von Q in sich mit $\varrho(f, f') < \varepsilon$ und der Eigenschaft: Jeder Fixpunkt von f' ist isoliert und besitzt bezüglich Q eine zu einer Vollkugel homöomorphe Umgebung. Wir zeigen in Abschnitt 1, daß auch für die kompakte topologische Mannigfaltigkeit P gilt: Zu jeder stetigen Abbildung f von P in sich und jeder positiven Zahl ε

[1]) HOPF: Über die algebraische Anzahl von Fixpunkten. Math. Z. **29**, 493—524 (1929).

[2]) LEFSCHETZ: Intersections and transformations of complexes and manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. **28**, 1—29 (1926). — Zur Erklärung der „LEFSCHETZschen Zahl" vgl. ALEXANDROFF-HOPF, Topologie I. Berlin 1935.

[3]) HOPF: a. a. O.

[4]) NIELSEN: Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, I und II. Acta math. **50**, 189—358 (1927); **53**, 1—76 (1929).
REIDEMEISTER: Automorphismen von Homotopieketten ringen. Math. Ann. **112**, 586—593 (1936).

[5]) Vgl. etwa LEFSCHETZ: On the Fixed Point Formula. Ann. of Math. **38**, 819—822 (1937) oder LEFSCHETZ: Algebraic Topology. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **27** (1942).

gibt es eine zu f homotope Abbildung f' von P in sich mit $\varrho(f, f') < \varepsilon$ und höchstens endlich vielen Fixpunkten.

Über die NIELSEN-REIDEMEISTERschen Fixpunktklassen. Ist f eine stetige Abbildung des Polyeders Q in sich mit nur endlich vielen Fixpunkten und sind q_1, q_2 Fixpunkte von f, so kann folgender Fall vorliegen: Es gibt eine in Q offene Menge V mit $q_1, q_2 \in V$, $p \neq f(p)$, $p \in V - (\bar{q}_1 + \bar{q}_2)$, sowie eine zu f homotope Abbildung f' mit $f'(p) = f(p)$, $p \notin V$, und der Eigenschaft, daß f' auf V nur einen Fixpunkt hat. Dann sagt man wohl auch, es ließen sich die Fixpunkte q_1 und q_2 von f auf einen Fixpunkt zusammenziehen. NIELSEN hat eine Vorschrift angegeben, die die Menge der Fixpunkte von f derart zu Klassen, für die später REIDEMEISTER deformationsinvariante Indexe errechnet hat, zusammenfaßt, daß unter gewissen Voraussetzungen über Dimension und Zusammenhang von Q sicher gilt: Zur gleichen Klasse gehörige Fixpunkte von f lassen sich zusammenziehen. Der letzte Satz gilt, wie in Abschnitt 3 gezeigt wird, auch für kompakte topologische Mannigfaltigkeiten einer Dimension > 2.

In den Abschnitten 1 und 2 werden die topologischen Mannigfaltigkeiten als im R^n liegend vorausgesetzt. Dies geschieht, da in den dort bewiesenen Sätzen ε-Bedingungen im Großen auftreten. Die Voraussetzung bedeutet aber keine Einschränkung der Allgemeinheit, da sich die Einbettbarkeit beweisen läßt. In Abschnitt 3 kann man auf die in Rede stehende zusätzliche Voraussetzung verzichten.

1. Der HOPFsche Approximationssatz.

Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen. Es bedeutet R^n den n-dimensionalen Euklidischen Zahlenraum. Sind a, b die Punkte $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ des R^n, so ist $a + b$ der Punkt $(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$. Es ist $\bar{a} + \bar{b}$ die aus den Punkten a und b bestehende Menge.

Es seien M und N Mengen des R^n. Dann ist $\overline{M}$ die abgeschlossene Hülle in bezug auf den R^n von M. Ist N echte oder unechte Teilmenge von M, so schreiben wir $N \subset M$. Ist $M - N$ gebildet, so ist nicht notwendig $N \subset M$. Ist $N \subset M$, so bezeichnet $B(N; M)$ die Begrenzung in bezug auf M von N. Statt $B(M; R^n)$ schreiben wir auch $B(M)$. Die Entfernung von M und N wird mit $\varrho(M, N)$ bezeichnet. Es bedeutet $\delta(M)$ den Durchmesser von M und $U(M; \delta)$ die δ-Umgebung in bezug auf den R^n von M.

Sind $a_1, \ldots, a_r$ linear unabhängige Punkte des R^n, so ist $\overline{a_1 \ldots a_r}$ das von diesen Punkten aufgespannte abgeschlossene Simplex. Für solche Simplexe benutzen wir auch die Bezeichnungen $\bar{x}, \bar{x}', \bar{y}$ usw. Das Innere von $\bar{x}$ in bezug auf seine Trägerebene wird mit $I(\bar{x})$, der Rand bezüglich der Trägerebene mit $\dot{\bar{x}}$ bezeichnet.

Die Bezeichnung $i = 1, 2, \ldots$ besagt, daß i alle natürlichen Zahlen durchläuft. Durchläuft i nur endlich viele, so geben wir in $i = 1, \ldots, m$ stets das letzte Glied an.

Unter einem „*Polyeder*" des R^n verstehen wir die Vereinigungsmenge von endlich oder abzählbar vielen Simplexen $\bar{x}$ des R^n. Ein „*endlicher simplizialer*

Komplex" im R^n bedeutet hier stets eine endliche Menge K von Simplexen $\bar{x}$ des R^n mit den Eigenschaften: Der Durchschnitt von zwei Simplexen $\bar{x}$ aus K gehört zu K, mit $\bar{x}$ gehört jede Seite von $\bar{x}$ zu K: Das durch K bestimmte Polyeder bezeichnen wir auch mit $\overline{K}$. Eine *„r-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit"* ist ein topologischer Raum P mit der Eigenschaft: Zu jedem Punkt p von P gibt es eine in P offene zum R^r homöomorphe Teilmenge, welche p enthält.

Ist M eine Menge des R^n, f eine stetige Abbildung von M in den R^n, q ein Punkt von M mit $q=f(q)$ und $V \ni q$ eine in M offene Menge derart, daß q der einzige Fixpunkt von f auf V ist, so heißt q ein *„isolierter Fixpunkt"* von f. Ist M kompakt und jeder Fixpunkt von f isoliert, so hat f höchstens endlich viele Fixpunkte.

Für diesen und den zweiten Abschnitt möge P eine kompakte r-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit im R^n bezeichnen, wobei r irgendeine natürliche Zahl bedeutet.

Wir wollen für P den unten angegebenen Approximationssatz (Satz 1) beweisen. Zu diesem Ende leiten wir zunächst einen Satz im Kleinen, aus dessen Anwendung sich dann Satz 1 ergibt, her.

Hilfssatz. *Es seien U_0, U_1 und V offene Mengen des R^r, U_0 und U_1 Vollkugeln mit $\overline{U}_0 \subset U_1$, ε eine positive Zahl und f eine stetige Abbildung von $\overline{U}_1$ in den R^r mit höchstens endlich vielen Fixpunkten auf $V \cdot \overline{U}_1$ und*

$$p \neq f(p), \qquad p \in (\overline{V} - V) \cdot \overline{U}_1.$$

Dann gibt es eine Schar $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von $\overline{U}_1$ in den R^r mit $f^0 = f$, $\varrho(f, f^\tau) < \varepsilon$, $0 \leq \tau \leq 1$, sowie

$$f^\tau(p) = f(p), \qquad p \in \overline{U}_1 - U_1, \; 0 \leq \tau \leq 1,$$

und den folgenden Eigenschaften: 1. Jeder Fixpunkt von f^1 auf $\overline{U}_0$ ist isoliert. 2. Jeder Fixpunkt von f^1 auf $\overline{V}$ ist auch Fixpunkt von f.

Beweis. Da $p \neq f(p)$ für $p \subset (\overline{V} - V) \cdot \overline{U}_1$ und die letztere Menge kompakt ist, gibt es eine Zahl $\eta > 0$, so daß $\varrho(p, f(p)) > \eta$ für $p \subset (\overline{V} - V) \cdot \overline{U}_1$; und weiter existiert eine Zahl $\delta > 0$, so daß sogar

$$\varrho(p, f(p)) > \eta, \qquad p \in \overline{U}_1 \cdot U(\overline{V} - V; \delta). \tag{1}$$

Die Zahl $\varrho(\overline{U}_0, \overline{U}_1 - U_1)$ nennen wir η'.

Es sei K eine simpliziale Zerlegung des R^r mit Simplexdurchmessern kleiner als $\min(\frac{1}{2}\eta', \frac{1}{3}\delta)$; K_0 der Komplex aller Simplexe von K, welche mit $\overline{U}_0 - V$ gemeinsame Punkte haben, und ihrer Seiten; K_1 der Komplex aller Simplexe von K, die mit $\overline{K}_0$ gemeinsame Punkte haben, und ihrer Seiten. Dann ist

$$\overline{K}_1 \subset U_1. \tag{2}$$

Denn ist $\bar{x}$ ein Grundsimplex von K_1, so existiert ein Simplex $\bar{x}'$ in K_1 mit $\bar{x} \cdot \bar{x}' \neq 0$ und $\bar{x}' \cdot \overline{U}_0 \neq 0$; wegen $\delta(\bar{x} + \bar{x}') < \eta'$ und der Erklärung von η' ist also $\bar{x} \subset U_1$.

Es ist

$$\overline{K}_1 \cdot \overline{V} < U(\overline{V} - V; \delta). \tag{3}$$

Ist nämlich $\bar{x}$ ein Grundsimplex von K_1 mit $\bar{x} \cdot \overline{V} \neq 0$, so gibt es ein Simplex $\bar{x}'$ in K_1 mit $\bar{x} \cdot \bar{x}' \neq 0$ und $\bar{x}' \cdot (\overline{U}_0 - V) \neq 0$, also weiter einen Punkt q in $\bar{x}$ und einen Punkt q' in $\bar{x}'$ mit $q \in \overline{V}$ und $q' \in V$, schließlich auf der Strecke $\overline{qq'}$ einen Punkt $q^* \in \overline{V} - V$. Nun sei p ein Punkt aus $\bar{x}$. Dann ist $\varrho(p, q^*) \leq \varrho(p, q) + \varrho(q, q')$, wegen $\delta(\bar{x}) < \frac{1}{3}\delta$ und $\delta(\bar{x} + \bar{x}') < \frac{2}{3}\delta$ also $\varrho(p, q^*) < \delta$. Hieraus folgt (3)..

Ferner ist

$$B(\overline{K}_0) < (U_1 - \overline{U}_0) + V. \tag{4}$$

Denn jeder Punkt von $\overline{U}_0 - V$ liegt im Innern von $\overline{K}_0$. Für einen Randpunkt q von $\overline{K}_0$ gilt also $q \in U_1 - (\overline{U}_0 - V)$, und daher ist q entweder in $U_1 - \overline{U}_0$ oder in V gelegen.

Eine einfache Überlegung ergibt eine simpliziale Abbildung f'' des Polyeders $\overline{K}_1$ in den R^r mit

$$\varrho(f, f'') < \min(\varepsilon, \eta) \tag{5}$$

und der Eigenschaft, daß jeder Fixpunkt von f'' auf $\overline{K}_1$ isoliert ist.

Für die Eckpunkte e von K_1 sei $\lambda(e) = 1$ oder $= 0$, je nachdem $e \in K_0$ oder $e \notin K_0$. Dadurch ist eine simpliziale Abbildung λ von $\overline{K}_1$ in $[0, 1]$ bestimmt. Wir setzen nun

$$f'(p) = f(p), \qquad p \in \overline{U}_1 - \overline{K}_1,$$
$$f'(p) = (1 - \lambda(p))\, f(p) + \lambda(p)\, f''(p), \qquad p \in \overline{K}_1.$$

Dann ist f' eine Abbildung von $\overline{U}_1$ in den R^r. Für $p \in B(\overline{K}_1)$ ist $\lambda(p) = 0$, also ist f' stetig. Mit $f^\tau = (1 - \tau) f + \tau f'$, $0 \leq \tau \leq 1$, ist die Abbildungsschar $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ von der verlangten Art:

Wegen (2) ist $f'(p) = f(p)$ für $p \in \overline{U}_1 - U_{1+}$

Wegen (5) ist $\varrho(f, f') < \varepsilon$.

Zum Beweis, daß f^1 die Eigenschaft 1. hat, folgern wir zunächst aus (1), (3) und (5), daß

$$p \neq f^1(p), \qquad p \in \overline{V} \cdot \overline{K}_1. \tag{6}$$

Nach der Erklärung von K_0 ist $\overline{U}_0 < \overline{K}_0 + V = \overline{K}_0 + V \cdot \overline{K}_1 + (V - \overline{K}_1)$. Es sei nun q ein Fixpunkt von f^1 auf $\overline{U}_0$. Er möge erstens in $\overline{K}_0$ liegen. Ist dann q innerer Punkt von $\overline{K}_0$, so ist er isolierter Fixpunkt von f^1, da f^1 und f'' auf $\overline{K}_0$ übereinstimmen. Läge q auf dem Rand von $\overline{K}_0$, so folgte aus (4), daß $q \in V$, also $q \in V \cdot \overline{K}_0$ und weiter $q \in V \cdot \overline{K}_1$ entgegen (6). Liegt zweitens q in $V - \overline{K}_1$, so ist q isolierter Fixpunkt von f^1, da f^1 und f außerhalb $\overline{K}_1$ übereinstimmen.

Jeder Fixpunkt von f^1 auf $\overline{V}$ ist auch Fixpunkt von f. Denn für Punkte p von $\overline{V} - \overline{K}_1$ ist $f'(p) = f(p)$, und es gilt (6).

Damit ist der Hilfssatz bewiesen. Aus ihm ergibt sich folgender

Satz im Kleinen. *Es seien U_0, U_1, U_2, V beschränkte Mengen im R^n mit $\overline{U}_0 \subset U_1$ und $\overline{U}_1 + V \subset U_2$, ferner U_0, U_1 und V in U_2 offen, und es existiere eine topologische Abbildung h von U_2 auf den R^r, welche U_0 und U_1 in Vollkugeln überführt. Weiter sei ε eine positive Zahl und f eine stetige Abbildung von $\overline{U}_1$ in U_2 mit höchstens endlich vielen Fixpunkten auf $V \cdot \overline{U}_1$ und*

$$p \neq f(p), \qquad p \in (\overline{V} - V) \cdot \overline{U}_1.$$

Dann gibt es eine Schar $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von U_1 in U_2 mit $f_0 = f$, $\varrho(f, f^\tau) < \varepsilon$, $0 \leq \tau \leq 1$, sowie

$$f^\tau(p) = f(p), \qquad p \in \overline{U}_1 - U_1, \qquad 0 \leq \tau \leq 1,$$

und den folgenden Eigenschaften: 1. Jeder Fixpunkt von f^1 auf $\overline{U}_0$ ist isoliert. 2. Jeder Fixpunkt von f^1 auf $\overline{V}$ ist auch Fixpunkt von f.

Beweis. Es sei φ die durch $\varphi(p) = h f h^{-1}(p)$, $p \in \overline{h(U_1)}$, bestimmte Abbildung von $\overline{h(U_1)}$ in den R^r. Ferner sei W eine offene Vollkugel im R^r, die $\varphi(\overline{h(U_1)})$ enthält. Da $\overline{U}_1$ kompakt ist, ist auch $\varphi(\overline{h(U_1)})$ kompakt, und also existiert W. Mit ω bezeichnen wir eine positive Zahl, so daß

$$\varrho(h^{-1}(p), h^{-1}(p')) < \varepsilon$$

für jedes Punktpaar (p, p') aus $\overline{W}$ mit $\varrho(p, p') < \omega$. Schließlich sei ω_1 die Entfernung von $\varphi(h(U_1))$ und $\overline{W} - W$.

Auf $h(U_0)$, $h(U_1)$, $h(V)$, $\min(\omega, \omega_1)$ und φ wenden wir den obigen Hilfssatz an. Derselbe ergibt eine Schar $(\varphi^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen φ^τ von $h(U_1)$ in den R^r mit $\varphi^0 = \varphi$, $\varrho(\varphi, \varphi^\tau) < \min(\omega, \omega_1)$, $0 \leq \tau \leq 1$, sowie

$$\varphi^\tau(p) = \varphi(p), \qquad p \in \overline{h(U_1)} - h(U_1), \qquad 0 \leq \tau \leq 1,$$

und den folgenden Eigenschaften: 1. Jeder Fixpunkt von φ^1 auf $\overline{h(U_0)}$ ist isoliert. 2. Jeder Fixpunkt von φ^1 auf $\overline{h(V)}$ ist auch Fixpunkt von φ.

Mit $f^\tau = h^{-1} \varphi^\tau h$, $0 \leq \tau \leq 1$, ist dann $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen f^τ von $\overline{U}_1$ in U_2 mit den geforderten Eigenschaften:

Es ist $f_0 = h^{-1} \varphi^0 h = h^{-1} \varphi h = f$.

Es sei q ein Punkt aus $\overline{U}_1$ und α eine Zahl aus $[0, 1]$. Dann ist $h(q) \in \overline{h(U_1)}$, also $\varrho(\varphi h(q), \varphi^\alpha h(q)) < \omega$. Und wegen $\varrho(\varphi, \varphi^\alpha) < \omega_1$ liegen die Punkte $\varphi h(q)$ und $\varphi^\alpha h(q)$ in W. Nach der Erklärung von ω sind daher die Punkte $h^{-1} \varphi h(q)$ und $h^{-1} \varphi^\alpha h(q)$ um weniger als ε voneinander entfernt. Mithin ist $\varrho(f(q), f^\alpha(q)) < \varepsilon$.

Für $p \in \overline{U}_1 - U_1$ ist $h(p) \in \overline{h(U_1)} - h(U_1)$, daher $\varphi^\tau h(p) = \varphi h(p)$, $0 \leq \tau \leq 1$, und also $f^\tau(p) = f(p)$, $0 \leq \tau \leq 1$.

Die von f^1 verlangten Eigenschaften 1. und 2. folgen aus den entsprechenden Eigenschaften von φ^1.

Der Approximationssatz, den wir beweisen wollen, lautet:

Satz 1. *Es sei f eine stetige Abbildung von P in sich und ε eine positive Zahl. Dann gibt es eine Schar $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von P in sich mit $f^0 = f$, $\varrho(f, f^\tau) < \varepsilon$, $0 \leq \tau \leq 1$, und der Eigenschaft, daß f^1 höchstens endlich viele Fixpunkte hat.*

Beweis. Ist q ein Fixpunkt von f, so gibt es in bezug auf P Umgebungen U_0, U_1, U_2 von q mit

(1) $$\overline{U}_0 < U_1, \qquad \overline{U}_1 < U_2, \qquad f(\overline{U}_1) < U_2$$

und der Eigenschaft, daß eine topologische Abbildung h von U_2 auf den R^r existiert, welche U_0 und U_1 in Vollkugeln des R^r überführt: Zunächst gibt es nach der Erklärung von P eine in P offene, zum R^r homöomorphe Menge U_2 mit $q \in U_2$. Es werde U_2 durch h topologisch auf den R^r abgebildet, und es sei q' der Punkt $h(q)$. Wegen $q = f(q)$ und der Stetigkeit von f gibt es weiter eine in U_2 offene Menge V mit $q \in V$ und $f(V) < U_2$. Bezeichnen wir $h(V)$ mit W, so ist W eine offene Menge des R^r mit $q' < W$. Es gibt daher eine Zahl $\delta > 0$ mit

$$U(q'; \delta) < W.$$

Schließlich sei $U_0 = h^{-1}\left(U\left(q'; \frac{\delta}{2}\right)\right)$, $U_1 = h^{-1}(U(q'; \delta))$. Dann haben U_0, U_1 und U_2 die verlangten Eigenschaften.

Die Menge M der Fixpunkte von f ist kompakt, da jeder ihrer Häufungspunkte ein Fixpunkt ist. Ordnen wir daher jedem Punkt p von M Umgebungen $U_0(p)$, $U_1(p)$, $U_2(p)$ der Art (1) zu, so wird M bereits von endlich vielen der $U_0(p)$ überdeckt. Mithin:

Es gibt in P offene Mengen U_0^i, U_1^i und U_2^i, $i = 1, \ldots, m$, mit $U_0^i < U_1^i$, $\overline{U}_1^i < U_2^i$, $f(\overline{U}_1^i) < U_2^i$,

(2) $$M \in \sum U_0^i$$

und der Eigenschaft, daß eine topologische Abbildung von U_2^i auf den R^r existiert, welche U_0^i und U_1^i in offene Vollkugeln des R^r überführt.

Bezeichnen wir mit U_0^0, U_1^0, U_2^0 und W^0 die leere Menge und f auch mit f^0, so gilt: Es ist f^0 eine Abbildung von P in sich mit $\varrho(f, f^0) = 0$,

(I^0) $$p \neq f^0(p), \qquad p \in P - \sum U_0^i,$$

(II^0) $$f^0(\overline{U}_1^i) < U_2^i, \qquad i = 0, \ldots, m.$$

Es seien $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ Zahlen mit $0 = \alpha_0$, $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, $i = 0, \ldots, m-1$, und $\alpha_m = 1$.

Nun sei k eine der Zahlen $0, \ldots, m-1$ und $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq \alpha_k)$ eine Deformation von f mit $\varrho(f, f^\tau) < \frac{k}{m}\varepsilon$, $0 \leq \tau \leq \alpha_k$, und den folgenden Eigenschaften:

(I^k) $$p \neq f^{\alpha_k}(p), \qquad p \in P - \sum U_0^i;$$

(II^k) $$f^{\alpha_k}(\overline{U}_1^i) < U_2^i, \qquad i = 0, \ldots, m;$$

es gibt eine in P offene Menge W^k, so daß

(III^k) $\quad \overline{U}_0^i < W$ für $i = 0, \ldots, k$, $\quad p \neq f^{\alpha_k}(p)$ für $p \in \overline{W}^k - W^k$

und f^{α_k} auf W^k höchstens endlich viele Fixpunkte hat.

Hierauf bezeichnen wir mit $\eta > 0$ eine Zahl, so daß

$$\varrho(p, f^{\alpha_k}(p)) > \eta, \qquad p \in P - \sum U_0^i; \tag{3}$$

mit $\eta' > 0$ eine Zahl, so daß

$$g(\overline{U}_1^i) < U_2^i, \qquad i = 0, \ldots, m, \tag{4}$$

für jede Abbildung g von P in sich mit $\varrho(g, f^{\alpha_k}) < \eta'$.

Auf $U_0 = U_0^{k+1}, U_1 = U_1^{k+1}, U_2 = U_2^{k+1}, V = W^k \cdot U_2^{k+1}$ wenden wir den obigen Satz im Kleinen an. Derselbe ergibt eine Abbildungsschar $(f^\tau, \alpha_k \leq \tau \leq \alpha_{k+1})$ mit

$$\varrho(f^\tau, f^{\alpha_k}) < \min\left(\eta, \eta', \frac{\varepsilon}{m}\right), \qquad \alpha_k \leq \tau \leq \alpha_{k+1}, \tag{5}$$

$$f^\tau(p) = f^\alpha(p), \qquad p \notin U_1^{k+1}, \qquad \alpha_k \leq \tau \leq \alpha_{k+1}, \tag{6}$$

und den folgenden Eigenschaften: 1. Jeder Fixpunkt von $f^{\alpha_{k+1}}$ auf $\overline{U}_0^{k+1}$ ist isoliert. 2. Auf $\overline{V}$ ist jeder Fixpunkt von $f^{\alpha_{k+1}}$ auch Fixpunkt von f^{α_k}.

Dann ist $\varrho(f, f^\tau) < \frac{k+1}{m}\varepsilon$, $0 \leq \tau \leq \alpha_{k+1}$, und wegen (3) bis (5) weiter

(I^{k+1}) $\quad p \neq f^{\alpha_{k+1}}(p), \qquad p \in P - \sum U_0^i,$

(II^{k+1}) $\quad f^{\alpha_{k+1}}(\overline{U}_1^i) < U_2^i, \qquad i = 0, \ldots, m.$

Wegen der Eigenschaft 1. von $f^{\alpha_{k+1}}$ gibt es eine in P offene Menge V', so daß

(*) $\quad \overline{U}_0^{k+1} < V', \qquad p \neq f^{\alpha_{k+1}}(p)$ für $p \in \overline{V}' - V'$

und sich auf V' höchstens endlich viele Fixpunkte von $f^{\alpha_{k+1}}$ befinden. Bezeichnet dann W^{k+1} die Menge $W^k + V'$, so gilt (III^{k+1}). Das ergibt sich wie folgt:

Für $i = 0, \ldots, k$ ist $\overline{U}_0^i < W^k$ nach (III^k), und nach (*) liegt $\overline{U}_0^{k+1}$ in V'. Wegen der Bedeutung von W^{k+1} ist also $\overline{U}_0^i < W^{k+1}$ für $i = 0, \ldots, k+1$. Mithin gilt die erste der Beziehungen (III^{k+1}). Wegen des zweiten Teiles von (III^k), der Erklärung von V und der Eigenschaft 2. von $f^{\alpha_{k+1}}$ sowie (6) ist

(*$_*$) $\quad p \neq f^{\alpha_{k+1}}(p), \qquad p \in \overline{W}^k - W^k.$

Aus (*) und (*$_*$) folgt der zweite Teil von (III^{k+1}).

Schließlich gilt, und damit ist der $(k+1)$-te Schritt beendet, daß sich auf W^{k+1} höchstens endlich viele Fixpunkte von $f^{\alpha_{k+1}}$ befinden: Auf W^k befinden sich höchstens endlich viele Fixpunkte von $f^{\alpha_{k+1}}$, da dort höchstens endlich viele Fixpunkte von f^{α_k} liegen, (6) gilt sowie $f^{\alpha_{k+1}}$ die Eigenschaft 2. hat; auf der Menge V' nach ihrer Erklärung.

Für $k=m-1$ ist $(f^\tau, 0\leq\tau\leq 1)$ eine Abbildungsschar in P mit $f^0=f$, $\varrho(f,f^\tau)<\varepsilon$, $0\leq\tau\leq 1$, und $p\neq f^1(p)$ für $p\in P-\sum U_0^i$; sowie W^n eine Menge in P derart, daß $\sum U_0^i\subset W^n$ und auf W^n höchstens endlich viele Fixpunkte von f^1 liegen.

Damit ist der obige Satz bewiesen.

2. Die Homotopieinvarianz der algebraischen Fixpunktzahl.

Ist q ein Punkt von P und f eine stetige Abbildung von P in sich mit q als isoliertem Fixpunkt, so kann man den „*Index*" von q bei f wie folgt erklären: Es seien U und U_1 in P offene Mengen mit $q\in U\subset U_1$, $f(U)\subset U_1$, $p\neq f(p)$, $p\in U-q$, und der Eigenschaft, daß eine topologische Abbildung t von U_1 auf den R^r existiert; ferner φ die durch $\varphi(p)=t\,f\,t^{-1}(p)$, $p\in t(U)$, bestimmte Abbildung von $t(U)$ in den R^r; und ζ der Index von $t(q)$ bei φ. Wegen der topologischen Invarianz des Fixpunktindexes ist die Zahl ζ von der Wahl von U, U_1 und t unabhängig. Die Zahl ζ heißt der „*Index*" von q bei f.

Ist f eine stetige Abbildung von P in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten, so heißt die Summe der Indexe der Fixpunkte von f die „*algebraische Fixpunktzahl*" von f.

Homotope Abbildungen von P in sich haben, so soll in diesem Abschnitt gezeigt werden, die gleiche algebraische Fixpunktzahl.

Zunächst ergibt sich ohne Schwierigkeiten folgender Deformationssatz.

Satz 2. *Es sei f eine stetige Abbildung von P in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten. Dann gibt es eine Zahl $\varepsilon>0$ derart, daß jede Abbildung f' von P in sich mit $\varrho(f,f')<\varepsilon$ und höchstens endlich vielen Fixpunkten dieselbe algebraische Fixpunktzahl wie f hat.*

Beweis. Ist $p\neq f(p)$ für $p\subset P$, so gibt es wegen der Kompaktheit von P eine Zahl $\varepsilon>0$, so daß sogar $\varrho(p,f(p))>\varepsilon$, $p\in P$, und also jede Abbildung f' von P in sich mit $\varrho(f,f')<\varepsilon$ keinen Fixpunkt hat.

Nun möge f Fixpunkte haben, und es seien $q_1,\ldots,q_m$ dieselben. Dann gibt es in P offene Mengen $U_1,\ldots,U_m$ und $U_1',\ldots,U_m'$ sowie topologische Abbildungen $h_1,\ldots,h_m$ bzw. von $U_1',\ldots,U_m'$ auf den R^r, so daß die $\overline{U}_i$ paarweise zueinander fremd sind, $q_i\in U_i$, $\overline{U}_i+f(\overline{U}_i)\subset U_i'$ und $h_i(U_i)$ eine Vollkugel V_i des R^r ist.

Wird für $i=1,\ldots,m$ mit φ_i die durch $\varphi_i(p)=h_i\,f\,h_i^{-1}(p)$, $p\in\overline{V}_i$, bestimmte Abbildung von $\overline{V}_i$ in den R^r bezeichnet, so gibt es für $i=1,\ldots,m$ eine Zahl $\omega_i>0$ mit folgender Eigenschaft: Ist φ_i' eine Abbildung von $\overline{V}_i$ in den R^r mit $\varrho(\varphi_i',\varphi_i)<\omega_i$ und höchstens endlich vielen Fixpunkten auf V_i, so ist die Summe der Indexe der Fixpunkte von φ_i' auf V_i gleich dem Index von $h_i(q_i)$ bei φ_i.

Nun sei $\varepsilon>0$ eine Zahl, so daß für jede Abbildung f' von P in sich, für die $\varrho(f,f')<\varepsilon$ gilt,

$$p\neq f'(p),\qquad p\in P-\sum U_i, \tag{1}$$

und außerdem, wenn für $i=1, \ldots, m$ mit φ_i' die durch

$$\varphi_i'(p) = h_i f' h_i^{-1}(p), \qquad p \in \overline{V}_i, \tag{2}$$

bestimmte Abbildung von $\overline{V}_i$ in den R^r bezeichnet wird,

$$\varrho(\varphi_i', \varphi_i) < \omega_i. \tag{3}$$

Die Zahl ε existiert: Da $p \neq f(p)$ für alle Punkte p von $P - \sum U_i$ und die letztere Menge kompakt ist, gibt es eine Zahl $\varepsilon_1 > 0$ mit

$$\varrho(p, f(p)) > \varepsilon_1, \qquad p \in P - \sum U_i.$$

Daher gilt (1) für alle f' mit $\varrho(f, f') < \varepsilon_1$. Da weiter $f(\overline{U}_i) \subset U_i'$ und U_i' offen in P, so gilt $f'(\overline{U}_i) \subset U_i'$ $i=1, \ldots, m$, für alle f' mit $\varrho(f, f') < \varepsilon_2$, wenn nur ε_2 hinreichend klein; und daher sind die φ_i' durch (2) erklärt. Ferner gilt, wenn nur ε_3 hinreichend klein, für alle f' mit $\varrho(f, f') < \varepsilon_3$, daß

$$\varrho(h_i f h_i^{-1}(p), h_i f' h_i^{-1}(p)) < \omega_i, \qquad p \in \overline{V}_i,$$

also (3). Dann sei $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

Ist nun f' eine Abbildung von P in sich mit $\varrho(f, f') < \varepsilon$, so hat f' auf $P - \sum U_i$ keinen Fixpunkt, und für $i=1, \ldots, m$ gilt, wenn φ_i' die durch (2) bestimmte Abbildung von $\overline{V}_i$ in den R^r ist, daß die algebraische Fixpunktzahl von φ_i' auf V_i gleich dem Index von $h_i(q_i)$ bei φ_i ist.

Nach der obigen Erklärung der algebraischen Fixpunktzahl haben daher f' und f auf U_i die gleiche algebraische Fixpunktzahl, $i=1, \ldots, m$, und also auf P die gleiche algebraische Fixpunktzahl.

Wir behaupten:

Satz 3. *Sind f und f' homotope Abbildungen von P in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten, so stimmen ihre algebraischen Fixpunktzahlen überein.*

Für jede natürliche Zahl r gilt: Es existiert eine Abbildungsschar $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ von f in f' derart, daß für $0 \leq \tau \leq 1$ die Abbildung f^τ höchstens endlich viele Fixpunkte hat. Dieser Satz bleibt in der vorliegenden Arbeit unbewiesen; wir werden ihn an anderer Stelle beweisen.

Es sei $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Abbildungsschar der angegebenen Art. Nach dem obigen Deformationssatz gibt es dann zu jeder Zahl α aus $[0, 1]$ eine Zahl $\varepsilon^\alpha > 0$ derart, daß für alle τ aus $[0, 1]$ mit $|\alpha - \tau| < \varepsilon^\alpha$ die Abbildung f^τ dieselbe algebraische Fixpunktzahl wie f^α hat.

Da das Intervall $[0, 1]$ schon durch endlich viele der Intervalle $(\tau - \varepsilon^\tau, \tau + \varepsilon^\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$, überdeckt wird, erhält man eine Kette $f = f^{\alpha_0}, f^{\alpha_1}, \ldots, f^{\alpha_m} = f'$ mit $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, $i=0, \ldots, m-1$, und der Eigenschaft, daß die Abbildungen f^{α_i} und $f^{\alpha_{i+1}}$ dieselbe algebraische Fixpunktzahl haben. Hieraus folgt die Behauptung.

Wegen Satz 1 und Satz 3 ist die folgende Erklärung möglich und eindeutig, überdies enthält sie die oben gegebene Erklärung der „algebraischen Fixpunktzahl" einer Abbildung von P in sich mit höchstens endlich vielen Fixpunkten.

Definition. Es sei f eine stetige Abbildung von P in sich. Dann ist die *„algebraische Fixpunktzahl"* von f die algebraische Fixpunktzahl einer zu f homotopen Abbildung f', welche höchstens endlich viele Fixpunkte hat.

3. Über die NIELSEN-REIDEMEISTERschen Fixpunktklassen.

Es sei Q ein Polyeder und f eine stetige Abbildung von Q in sich mit nur endlich vielen Fixpunkten $q_1, \ldots, q_m$. Dann werden die q_i durch die folgende Erklärung, die auf NIELSEN zurückgeht, zu Klassen zusammengefaßt.

Definition. Es seien q und q' zwei der Punkte q_i, ferner $(a_\sigma, 0 \leq \sigma \leq 1) = A$ eine Kurve in Q von q nach q' und $c_{\sigma\tau}$ eine für alle Zahlenpaare (σ, τ) mit $0 \leq \sigma \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq 1$ erklärte stetige Abbildung in P mit

$$(1) \qquad c_{\sigma 0} = a_\sigma, \qquad c_{\sigma 1} = f(a_\sigma), \qquad 0 \leq \sigma \leq 1,$$

$$(2) \qquad c_{0\tau} = a_0, \qquad c_{1\tau} = a_1, \qquad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Dann gehören q und q' zur *„gleichen Fixpunktklasse"* von f. Es gehören q und q' *„durch A zur selben Fixpunktklasse"*. Ist M eine Teilmenge von P mit $A \subset M$, so gehören q und q' *„innerhalb M zur selben Fixpunktklasse"* von f.

Ist $a_{\sigma\tau}$ eine für $0 \leq \sigma \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq 1$ erklärte stetige Abbildung in Q mit $a_{0\tau} = q$ und $a_{1\tau} = q'$, $0 \leq \tau \leq 1$, sowie $a_{\sigma 1} = a_\sigma$ für $0 \leq \sigma \leq 1$, so gehören q und q' auch durch die Kurve $B = (b_\sigma,\ 0 \leq \sigma \leq 1)$, wobei $b_\sigma = a_{\sigma 0}$, zur selben Fixpunktklasse von f. Denn von der bzw. für $0 \leq \tau \leq \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4} \leq \tau \leq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leq \tau \leq 1$ durch

$$d_{\sigma\tau} = a_{\sigma, 4\tau}, \qquad d_{\sigma\tau} = c_{\sigma, 4\tau - 1}, \qquad d_{\sigma\tau} = f(a_{\sigma, 2-2\tau})$$

bestimmte Abbildung $d_{\sigma\tau}$ gilt (1) und (2), wenn man darin a und c durch b bzw. d ersetzt.

Haben die NIELSEN-REIDEMEISTERschen Fixpunktklassen die folgende Eigenschaft?

E. *Wenn q und q' zur selben Fixpunktklasse von f gehören, so gibt es eine in Q offene Menge U mit $q,\ q' \in U$ und $p \neq f(p)$, $p \in U - (\bar{q} + \bar{q}')$, sowie eine zu f homotope Abbildung g mit $g(p) = f(p)$, $p \notin U$, und der Eigenschaft, daß g auf U höchstens einen Fixpunkt hat.*

Diese Frage ist zu bejahen, wenn das zugrunde gelegte Polyeder Euklidisch, endlich, von einer Domension ≥ 3 ist und gewisse Zusammenhangseigenschaften hat[6]).

Das Ziel des vorliegenden Abschnittes ist, zu zeigen, daß E auch für kompakte topologische Mannigfaltigkeiten einer Dimension ≥ 3 gilt.

Wir beweisen zunächst einen einfacheren Satz (Satz 4), auf den wir dann die Behauptung (Satz 5) zurückführen. Fürs folgende sei P eine r-dimensionale kompakte topologische Mannigfaltigkeit; wo über r keine Voraussetzung gemacht ist, bedeutet r irgendeine natürliche Zahl.

Im Beweis von Satz 4 benutzen wir die folgenden Hilfssätze 1 und 2.

[6]) WECKEN: Fixpunktklassen III. Math. Ann. **118**, 544—577 (1941).

Hilfssatz 1. *Es seien U eine in P offene durch die Abbildung h zum R homöomorphe Teilmenge von P, q und q' Punkte in U, f eine stetige Abbildung von P in sich mit q und q' als einzigen Fixpunkten auf $\overline{U}$, ferner $A=(a_\sigma, 0\leq\sigma\leq 1)$ eine doppelpunktfreie Kurve in U, so daß A durch h auf eine Strecke des R^r abgebildet wird und $f(A)\subset U$. Dann gibt es eine zu f homotope Abbildung f' mit $f'(p)=f(p)$, $p\in P-U$, und q als einzigem Fixpunkt auf $\overline{U}$.*

Beweis. Da $f(A)\subset U$ und A kompakt ist, gibt es eine in U offene Menge U' mit $A\subset U'$, so daß sogar $f(U')\subset U$.

Ist B die Strecke $h(A)$ des R^r, so gibt es eine Zahl $\delta<0$ derart, daß $\overline{U}(B;\delta)$ in $h(U')$ liegt, für $p\in\overline{U}(B;\delta)$ also der Punkt $fh^{-1}(p)$ in U und daher $hfh^{-1}(p)$ im R^r liegt. Es sei φ die durch $\varphi(p)=hfh^{-1}(p)$, $p\in\overline{U}(B;\delta)$ bestimmte Abbildung von $\overline{U}(B;\delta)$ in den R^r. Mit $a=h(q)$, $a'=h(q')$ ist dann $\varphi(a)=a$, $\varphi(a')=a'$ und

$$p\neq\varphi(p),\qquad p\in\overline{U}(B;\delta)-(\bar{a}+\bar{a}'). \tag{1}$$

Wir bezeichnen nun für $p\in\overline{U}(B;\delta)-a'$ mit $w(p)$ die Projektion von p auf $\overline{U}(B;\delta)-U(B;\delta)$ aus a'. Wir setzen $\varphi'(a')=a'$ sowie

$$\varphi'(p)=(1-\tau)\,a'+\tau\varphi\,w(p),$$

wenn $p\in\overline{U}(B;\delta)-a'$ ein Punkt mit $p=(1-\tau)\,a'+\tau\,w(p)$ ist.

Da $p\neq\varphi(p)$, $p\in\overline{U}(B;\delta)-U(B;\delta)$, nach (1), so ist

$$p\neq\varphi'(p),\qquad p\in\overline{U}(B;\delta)-a'. \tag{2}$$

Ferner ist, da $p=w(p)$ für $p\in\overline{U}(B;\delta)-U(B;\delta)$,

$$\varphi'(p)=\varphi(p),\qquad p\in\overline{U}(B;\delta)-U(B;\delta). \tag{3}$$

Wir setzen $U''=h^{-1}\big(U(B;\delta)\big)$ und behaupten, daß mit $f'(p)=h^{-1}\varphi' h(p)$, $p\in\overline{U}''$, und $f'(p)=f(p)$, $p\in P-U''$, die Abbildung f' die verlangten Eigenschaften hat: Wegen (3) ist f' stetig; wegen $U''\subset U$ ist $f'(p)=f(p)$ für $p\in P-U$. Wegen (2) ist $p\neq f'(p)$ für $p\in U''-q'$. Und nach Voraussetzung ist $p\neq f(p)$ für $p\in\overline{U}-U''$. Somit ist der Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 2. *Es sei $r\geq 3$, U eine in P offene durch die Abbildung h zum R^r homöomorphe Teilmenge von P, $A=(a_\sigma, 0\leq\sigma\leq 1)$ eine doppelpunktfreie Kurve in U, welche durch h auf eine Strecke des R^r abgebildet wird, und $b_{\sigma\tau}$ eine für $0\leq\sigma\leq 1$ und $0\leq\tau\leq 1$ erklärte stetige Abbildung in P mit*

$$\begin{aligned} &b_{\sigma 0}=a_\sigma, && b_{\sigma 1}\neq a_\sigma, && 0\leq\sigma\leq 1,\\ &b_{0\tau}\in U, && b_{1\tau}\in U, && 0\leq\tau\leq 1. \end{aligned}$$

Dann gibt es eine Abbildung $c_{\sigma\tau}$ in P mit

$$\begin{aligned} &c_{\sigma 0}\in U, && c_{\sigma 1}=b_{\sigma 1}, && 0\leq\sigma\leq 1,\\ &c_{0\tau}\in U, && c_{1\tau}\in U, && 0\leq\tau\leq 1,\\ &c_{\sigma\tau}\neq a_\sigma, && && 0\leq\sigma\leq 1,\ 0\leq\tau\leq 1. \end{aligned}$$

Beweis. Ist V eine offene Vollkugel des R^r mit $h(A) \subset V$, so ist die Menge $h^{-1}(V) = U'$ in U offen und

$$A \subset U', \qquad \overline{U}' \subset U. \tag{1}$$

Wir benutzen folgende Entfernungsfunktion. Es sei p ein Punkt aus U und p' ein Punkt aus P. Erstens liege p' in U. Hier möge $\varrho(p, p')$ die Zahl $\varrho(h(p), h(p'))$ bedeuten. Ist zweitens p' in $P - U$ gelegen, so gelte für jede Zahl α, daß $\varrho(p, p') > \alpha$.

Dann folgt aus der Kompaktheit von A und $P - U'$ sowie (1) die Existenz einer Zahl $\eta' > 0$, so daß, wenn $b_{\sigma\tau}$ ein Punkt mit $b_{\sigma\tau} \notin U'$ ist,

$$\varrho(a_\sigma, b_{\sigma\tau}) > \eta'. \tag{2}$$

Wegen $b_{\sigma 1} \neq a_\sigma$, $0 \leq \sigma \leq 1$, gibt es eine Zahl $\eta'' > 0$, so daß

$$\varrho(a_\sigma, b_{\sigma 1}) > \eta'', \qquad 0 \leq \sigma \leq 1, \tag{3}$$

und also eine Zahl τ_1 mit $0 < \tau_1 < 1$, so daß sogar

$$\varrho(a_\sigma, b_{\sigma\tau}) > \eta'', \qquad 0 \leq \sigma \leq 1, \quad \tau_1 \leq \tau \leq 1. \tag{3'}$$

Es sei $\eta = \min(\eta', \eta'')$.

Bezeichnet W die Menge aller Zahlenpaare (σ, τ) mit $0 \leq \sigma \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq 1$, so behaupten wir, daß es in W einen homogen zweidimensionalen endlichen simplizialen Komplex K gibt, für den

$$b_{\sigma\tau} \in U, \qquad (\sigma, \tau) \in \overline{K}, \tag{4.1}$$

$$\varrho(a_\sigma, b_{\sigma\tau}) > \eta, \qquad (\sigma, \tau) \in \overline{W - \overline{K}}, \tag{4.2}$$

$$(\sigma, 1) \notin \overline{K}, \qquad 0 \leq \sigma \leq 1. \tag{4.3}$$

Zum Beweis sei, wenn W' irgendeine Teilmenge von W ist, $b(W')$ die Menge aller Punkte $b_{\sigma\tau}$ mit $(\sigma, \tau) \in W'$. Es sei W_0 die Menge aller (σ, τ) mit $0 \leq \sigma \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq \tau_1$. Ferner sei K_0 eine simpliziale Zerlegung von W mit 1. und 2. 1. Die Simplexdurchmesser von K_0 sind $< \frac{1}{2}(1 - \tau_1)$. 2. Ist $\bar{x}$ ein Simplex von K_0 mit $b(\bar{x}) \cdot U' \neq 0$, so ist $b(\bar{x}') \subset U$ für alle Simplexe $\bar{x}'$ von K_0 mit $\bar{x} \cdot \bar{x}' \neq 0$. — Da $\overline{U}' \subset U$ nach (1), hat der Komplex K_0 die verlangten Eigenschaften, wenn er nur hinreichend fein ist. Dann sei K_1 die Menge aller Simplexe $\bar{x}$ von K_0, für welche gleichzeitig

$$\bar{x} \cdot W_0 \neq 0, \qquad b(\bar{x}) \cdot \overline{U}' \neq 0$$

ist, und ihrer Seiten. Ferner K die Menge aller Simplexe von K_0 mit $\bar{x} \cdot \overline{K}_1 \neq 0$ und ihrer Seiten.

Der so erklärte Komplex K hat die Eigenschaften (4). Zu (4.1); zu jedem Punkt (σ, τ) von $\overline{K}$ gibt es Simplexe $\bar{x}$ und $\bar{x}'$ von K mit

$$(\sigma, \tau) \in \bar{x}, \qquad \bar{x} \cdot \bar{x}' \neq 0, \qquad b(\bar{x}') \cdot \overline{U}' \neq 0;$$

nach der Eigenschaft 2. von K_0 ist also $b_{\sigma\tau} \in U$. Zu (4.2); für Punkte (σ, τ) aus $\overline{W - \bar{K}}$ gilt mindestens eine der Beziehungen $b_{\sigma\tau} \notin U'$, $(\sigma, \tau) \notin W_0$; und aus jeder derselben folgt, nach (2) bzw. (3'), (4.2). Wegen der Eigenschaft 1. von K_0 gilt (4.3).

Da $b_{\sigma\tau} \in U$ für $(\sigma, \tau) \in \bar{K}$ und $h(U) = R^r$, wird $\bar{K}$ durch $h(b_{\sigma\tau})$ stetig in den R^r abgebildet. Wegen (4.2) ist im besonderen $\varrho(b_{\sigma 0}, b_{\sigma\tau}) > \eta$ für $(\sigma, \tau) \in B(\bar{K}; W)$. Daher gibt es eine Zahl $\zeta > 0$ mit

$$\varrho\left(h(b_{\sigma 0}), h(b_{\sigma\tau})\right) > \zeta, \qquad (\sigma, \tau) \in B(\bar{K}; W). \tag{5}$$

Wir bezeichnen $h(b_{\sigma 0})$ und $h(b_{\sigma\tau})$ mit d_σ bzw. $d_{\sigma\tau}$. Alsdann überlegt man sich leicht, daß es wegen $\dim h(U) = r \geq 3$ und (5) eine für $(\sigma, \tau) \in \bar{K}$ erklärte stetige Abbildung $e_{\sigma\tau}$ in den R^r gibt mit

$$e_{\sigma\tau} = d_{\sigma\tau}, \qquad (\sigma, \tau) \in B(\bar{K}; W), \tag{6.1}$$

$$e_{\sigma\tau} \neq d_\sigma, \qquad (\sigma, \tau) \in \bar{K}. \tag{6.2}$$

Nun setzen wir

$$c_{\sigma\tau} = b_{\sigma\tau}, \qquad (\sigma, \tau) \in \overline{W - \bar{K}}, \tag{7.1}$$

$$c_{\sigma\tau} = h^{-1}(e_{\sigma\tau}), \qquad (\sigma, \tau) \in \bar{K}. \tag{7.2}$$

Wegen (6.1) ist $c_{\sigma\tau}$ stetig.

Aus (4.2) und (7.1) folgt, daß $c_{\sigma\tau} \neq a_\sigma$ für $(\sigma, \tau) \in W - \bar{K}$. Für $(\sigma, \tau) \in \bar{K}$ ist $e_{\tau\sigma} \neq d_\sigma$ nach (6.2), also $h^{-1}(e_{\sigma\tau}) \neq h^{-1}(d_\sigma)$ und nach (7.2) also ebenfalls $c_{\sigma\tau} \neq a_\sigma$.

Da mit $b_{\sigma\tau} \in U$ auch $c_{\sigma\tau} \in U$ und nach Voraussetzung

$$(b_{\sigma 0},\ 0 \leq \sigma \leq 1) + (b_{0\tau},\ 0 \leq \tau \leq 1) + (b_{1\tau},\ 0 \leq \tau \leq 1) \in U, \tag{*}$$

so gilt (*), wenn man darin b durch c ersetzt, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Satz 4. *Es mögen U, h und r dieselbe Bedeutung wie in Hilfssatz 2 haben; es seien q, q' Punkte in U und f eine stetige Abbildung von P in sich mit q und q' als einzigen Fixpunkten auf U; ferner $A = (a_\sigma,\ 0 \leq \sigma \leq 1)$ eine doppelpunktfreie Kurve in U, so daß A durch h auf eine Strecke des R^r abgebildet wird und q, q' durch A zur selben Fixpunktklasse von f gehören. Dann läßt sich f unter Festhaltung auf $P - U$ in eine Abbildung f' deformieren, die auf U nur einen Fixpunkt hat.*

Beweis. Da q und q' durch A zur selben Fixpunktklasse von f gehören, gibt es eine für $0 \leq \sigma \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq 1$ erklärte stetige Abbildung $a_\sigma(\tau)$ in P mit

$$a_\sigma(0) = a_\sigma, \qquad a_\sigma(1) = f(a_\sigma), \qquad 0 \leq \sigma \leq 1, \tag{1}$$

$$a_0(\tau) = a_0, \qquad a_1(\tau) = a_1, \qquad 0 \leq \tau \leq 1. \tag{2}$$

Da $q = a_0$ und $q' = a_1$ in U liegen, U offen in P ist und (2) gilt, gibt es Zahlen σ_0 und σ_1 mit $0 < \sigma_0 < \sigma_1 < 1$, so daß

$$(a(\tau),\ 0 \leq \tau \leq 1) < U, \qquad \sigma \in [0, \sigma_0] + [\sigma_1, 1]. \tag{3}$$

wegen (1) also im besonderen

$$f(a_\sigma) \in U, \qquad \sigma \in [0, \sigma_0] + [\sigma_1, 1]. \tag{4}$$

Für $0 \leq \sigma \leq 1$ bzw. $0 \leq \sigma \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq 1$ sei $b_\sigma = a_{\sigma_0 + (\sigma_1 - \sigma_0)\sigma}$ und $b_\sigma(\tau)$ der Punkt $a_{\sigma_0 + (\sigma_1 - \sigma_0)\sigma}(\tau)$. Es sei $B = (b_\sigma,\ 0 \leq \sigma \leq 1)$. Dann gilt (1), wenn man darin a durch b ersetzt und wegen (3) weiter

$$b_0(\tau) \in U, \qquad b_1(\tau) \in U, \qquad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Nach Hilfssatz 2 gibt es daher eine für $0 \leq \sigma \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq 1$ erklärte stetige Abbildung $c_\sigma(\tau)$ in P mit den Eigenschaften: bzw. für $0 \leq \sigma \leq 1$, $0 \leq \tau \leq 1$, für alle (σ, τ) mit $0 \leq \sigma \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq 1$ ist

$$c_\sigma(0) \in U, \qquad c_\sigma(1) = f(b_\sigma), \qquad c_0(\tau) \in U, \qquad c_1(\tau) \in U, \tag{5}$$

$$c_\sigma(\tau) \neq b_\sigma. \tag{6}$$

Ist V eine offene Vollkugel des R^r mit $h(A) \subset V$, so ist $h^{-1}(V)$ eine in P offene Menge U' mit $A \subset U'$ und $\overline{U}' \subset U$. Da A durch h auf eine Strecke des R^r abgebildet wird, gibt es also eine stetige Abbildung u von $\overline{U}'$ auf B mit

$$u(p) = p \quad \text{für} \quad p \in B, \qquad u(p) \in \overline{b}_0 + \overline{b}_1 \quad \text{für} \quad p \in A - B$$

sowie eine für alle (p, τ), $p \in \overline{U}'$ und $0 \leq \tau \leq 1$, erklärte stetige Abbildung w in $\overline{U}'$ mit

$$w(p, 0) = p, \qquad w(p, 1) = u(p), \qquad p \in \overline{U}', \tag{7.1}$$

$$(w(p, \tau),\ 0 \leq \tau \leq 1) = p, \qquad p \in B, \tag{7.2}$$

$$(w(p, \tau),\ 0 \leq \tau < 1) \subset A - B, \qquad p \in A - B. \tag{7.3}$$

Für $p \in U'$ sei die Zahl $\lambda(p)$ durch

$$w(p, 1) = b_{\lambda(p)} \tag{8}$$

bestimmt. Wie aus der Erklärung von $u(p)$ und $w(p, 1)$, $p \in U'$, folgt, ist die Abbildung λ stetig.

Sind p und p' zwei Punkte von U, so bezeichnet $\varrho(p, p')$ die Zahl $\varrho(h(p), h(p'))$. Wegen (6) gibt es dann eine Zahl $\eta > 0$ derart, daß

$$\varrho(c_\sigma(\tau), b_\sigma) > \eta \tag{9}$$

für alle (σ, τ) mit in U gelegenem $c_\sigma(\tau)$.

Aus (5) und (9) folgt, daß $\varrho(p, f(p)) > \eta$ für alle Punkte p von B mit $f(p) \in U$. Wegen der Kompaktheit von B gibt es also eine Zahl $\varepsilon > 0$, so daß, wenn p ein Punkt aus U mit $\varrho(p, B) < \varepsilon$ ist, gilt:

$$p \neq f(p') \quad \text{für alle } p' \text{ mit } \varrho(p, p') < \varepsilon. \tag{10}$$

Da $(w(p, \tau),\ 0 \leq \tau \leq 1)$ für $p \in B$ nach (7.2) den Durchmesser 0 hat, gibt es eine Zahl $\varepsilon' > 0$ mit den Eigenschaften: Die Menge U'' aller Punkte p von U mit $\varrho(p, B) < \varepsilon'$ liegt in U'; es ist

$$\delta(w(p, \tau),\ 0 \leq \tau \leq 1) < \min(\varepsilon, \eta), \qquad p \in \overline{U}''. \tag{11}$$

Wir bezeichnen B auch mit B_0 und für $0<\tau\leq 1$ mit B_τ die Menge aller Punkte p von $\overline{U}''$ mit $\varrho(p,D)=\tau\varepsilon'$. Für $p\in B_\tau$ schließlich sei

$$f''(p)=c_{\lambda(p)}(2\tau), \qquad 0\leq\tau\leq\tfrac{1}{2},$$
$$f''(p)=f\big(w(p,2-2\tau)\big), \qquad \tfrac{1}{2}<\tau\leq 1.$$

Auf $P-(B_\tau,\ 0\leq\tau\leq 1)$ ergänzen wir durch $f''(p)=f(p)$ die vorstehende Erklärung.

Die Abbildung f'' ist stetig: Für $p\in B_1$ ist $f''(p)=fw(p,0)$, nach (7.1) also $f''(p)=f(p)$. Nach (5) ist $c_\sigma(1)=f(b_\sigma)$, wegen (8) daher weiter $c_{\lambda(p)}(1)=fw(p,1)$.

Auf $\overline{U}''$ hat f'' keinen Fixpunkt: Für $p\in B_\tau$, $0\leq\tau\leq\frac{1}{2}$, gilt nach (11), daß $\varrho(p,w(p,1))<\eta$; wegen (8) und (9) ist also p von $f''(p)$ verschieden. Für $p\in B_\tau$, $\frac{1}{2}\leq\tau\leq 1$, gelten, wenn p' den Punkt $w(p,2-2\tau)$ bezeichnet, wegen $w(p,0)\in D$ und (11) die Ungleichungen $\varrho(p,D)<\varepsilon$ und $\varrho(p,p')<\varepsilon$; nach (10) ist daher $p\neq f(p')$, also $p\neq f''(p)$.

Es ist $f''(A)\subset U$: Das folgt für $p\in A-U''$ aus $f''(p)=f(p)$ und (4). Für $p\in(A-B)\cdot U''$ ist $\lambda(p)=0$ oder $=1$, also liegt $f''(p)$ auf

$$(c_0(\tau),\ 0\leq\tau\leq 1)+(c_1(\tau),\ 0\leq\tau\leq 1)+(fw(p,\tau),\ 0\leq\tau<1)$$

und daher in U nach (5) bzw. (7.1) und (4). Für $p\in B$ gilt $f''(p)\in U$ wegen (4) und (5).

Wenden wir daher auf U, A und f'' den Hilfssatz 1 an, so ergibt sich eine Abbildung f' mit den geforderten Eigenschaften.

Die beiden folgenden Hilfssätze werden im Beweis von Satz 5 benutzt.

Hilfssatz 3. *Es sei $r\geq 3$, U eine in P offene durch die Abbildung h zum R^r homöomorphe Menge, $(a_\sigma,\ 0\leq\sigma\leq 1)$ eine Kurve in P mit $a_1\notin U$, ε eine positive Zahl und α eine Zahl aus $(0,1)$ mit*

$$(a_\sigma,\ 0\leq\sigma\leq\alpha)\subset U.$$

Dann gibt es eine Kurve $(b_\sigma,\ 0\leq\sigma\leq 1)$ in P von a_0 nach a_1 und eine für $0\leq\sigma\leq 1$ und $0\leq\tau\leq 1$ erklärte stetige Abbildung $c_{\sigma\tau}$ in P mit den folgenden Eigenschaften: $b_\sigma\in U$ und $\varrho(a_\sigma,b_\sigma)<\varepsilon$ für $a_\sigma\in U$; $a_\sigma=b_\sigma$ für $a_\sigma\notin U$; für $0\leq\sigma\leq 1$ bzw. $0\leq\tau\leq 1$ ist

$$c_{\sigma 0}=a_\sigma, \qquad c_{\sigma 1}=b_\sigma, \qquad c_{0\tau}=a_0, \qquad c_{1\tau}=a_1;$$

es sind $(b_\sigma,\ 0\leq\sigma\leq\alpha)$ und $(b_\sigma,\ \alpha<\sigma\leq 1)$ zueinander fremd, und $\big(h(b_\sigma),\ 0\leq\sigma\leq\alpha\big)$ ist ein doppelpunktfreier Streckenzug im R^r.

Beweis. Als Entfernung $\varrho(p,p')$ zweier Punkte p und p' von U ist wieder die Zahl $\varrho\big(h(p),h(p')\big)$ zu nehmen.

Es sei U' eine in U offene Menge mit $\overline{U}'\subset U$, so daß sogar

$$(a_\sigma,\ 0\leq\sigma\leq\alpha)\subset U'. \tag{1}$$

Dann gibt es Intervalle $I_i=[\sigma_{i0},\sigma_{i1}]$, $i=0,\ldots,m$, auf $[0,1]$, die paarweise zueinander fremd sind, derart, daß

$$[0,\alpha]\subset[\sigma_{00},\sigma_{01}), \qquad a_\sigma\in U \text{ für } \sigma\in\sum I_i, \qquad a_\sigma\notin U' \text{ für } \sigma\notin\sum I_i.$$

Und durch $d_\sigma = h(a_\sigma)$, $\sigma \in \sum I_i$, ist eine stetige Abbildung von $\sum I_i$ in den R^r bestimmt.

Wegen $h^{-1}(d_\sigma) = a_\sigma$, $\sigma \in \sum I_i$, gibt es eine Zahl $\omega > 0$, so daß für $\sigma \in \sum I_i$ die Entfernung $\varrho(a_\sigma, h^{-1}(d'_\sigma)) < \varepsilon$ ist, wenn d'_σ, $\sigma \in \sum I_i$, Punkte des R^r mit $\varrho(d_\sigma, d'_\sigma) < \omega$ sind.

Für $i = 1, \ldots, m$ ersetzen wir $(d_\sigma, \sigma_{i0} \leq \sigma \leq \sigma_{i1})$ durch einen Streckenzug $(e_\sigma, \sigma_{i0} \leq \sigma \leq \sigma_{i1})$ des R^r mit $e_\sigma = d_\sigma$ für $\sigma = \sigma_{i0}$, σ_{i1} und

$$\varrho(d_\sigma, e_\sigma) < \omega, \qquad \sigma_{i0} \leq \sigma \leq \sigma_{i1}, \tag{2}$$

$$d_0 \notin (e_\sigma, \sigma_{i0} \leq \sigma \leq \sigma_{i1}). \tag{3}$$

Ein solcher Streckenzug existiert: (2) läßt sich gewiß erreichen. Es ist (3) möglich, da $d_0 \in h(U')$ und die Endpunkte von $(d_\sigma, \sigma_{i0} \leq \sigma \leq \sigma_{i1})$ nicht in $h(U')$ liegen.

Die Kurve $(d_\sigma, 0 \leq \sigma \leq \sigma_{01})$ ersetzen wir durch einen doppelpunktfreien Streckenzug $(e_\sigma, 0 \leq \sigma \leq \sigma_{01})$ mit $e_\sigma = d_\sigma$ für $\sigma = 0$, σ_{01} und

$$\varrho(d_\sigma, e_\sigma) < \omega, \qquad 0 \leq \sigma \leq \sigma_{01}, \tag{4}$$

$$(e_\sigma, 0 \leq \sigma \leq \alpha) \subset h(U'), \tag{5}$$

$$(e_\sigma, 0 \leq \sigma < \sigma_{01}) \cdot (e_\sigma, \sigma \in I_1 + \cdots + I_m) = 0. \tag{6}$$

Die Ungleichung (4) ist sicher erreichbar. Wegen (1) liegt $(d_\sigma, 0 \leq \sigma \leq \alpha)$ in $h(U')$; da $h(U')$ offen ist, ist also auch (5) möglich. Schließlich kann man (6) verlangen, da $\dim P \geq 3$ und (3) gilt.

Ist hierauf $b_\sigma = h^{-1}(e_\sigma)$ für $\sigma \in \sum I_i$ und $b_\sigma = a_\sigma$ für $\sigma \notin \sum I_i$, so hat $(b_\sigma, 0 \leq \sigma \leq 1)$ die verlangten Eigenschaften: Mit $a_\sigma \in U$ ist auch $b_\sigma \in U$. Daß $\varrho(a_\sigma, b_\sigma) < \varepsilon$ für $a_\sigma \in U$, folgt aus der Erklärung von ω. Zum Beweis, daß

$$b_\sigma \notin (b_\varrho, 0 \leq \varrho \leq \alpha) \tag{*}$$

für $\alpha < \sigma \leq 1$, sei erstens $\sigma \in (\alpha, \sigma_{01}]$. Hier gilt (*) wegen der Doppelpunktfreiheit von $(b_\varrho, 0 \leq \varrho \leq \sigma_{01})$. Ist zweitens $\sigma \notin \sum I_i$, so gilt $b_\sigma \notin U'$. Wegen (5) liegt $(b_\varrho, 0 \leq \varrho \leq \alpha)$ in U'. Mithin ist hier ebenfalls (*) richtig. Ist drittens σ eine Zahl aus $I_1 + \cdots + I_m$, so folgt (*) aus $\alpha < \sigma_{01}$ und (6).

Die Abbildung $c_{\sigma\tau}$ erhält man wie folgt: Sind die Punkte a_σ und b_σ verschieden, so sind d_σ und e_σ erklärt. Für $0 \leq \tau \leq 1$ sei hier

$$p_{\sigma\tau} = (1 - \tau)\, d_\sigma + \tau\, e_\sigma, \qquad c_{\sigma\tau} = h^{-1}(p_{\sigma\tau}).$$

Ist $a_\sigma = b_\sigma$, so setzen wir $c_{\sigma\tau} = a_\sigma$ für $0 \leq \tau \leq 1$. Die so erklärte Abbildung $c_{\sigma\tau}$ ist von der verlangten Art, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 4. *Es seien $A = (a_\sigma, 0 \leq \sigma \leq 1)$ ein doppelpunktfreier Streckenzug des R^r, $r \geq 2$, ferner ζ, η Zahlen mit $0 < \zeta < \eta < 1$, U_1 eine offene Teilmenge des R^r mit $(a_\sigma, 0 \leq \sigma \leq \eta) \subset U_1$. Dann gibt es eine offene Teilmenge U_0 von U_1 mit*

$$(a_\sigma, 0 \leq \sigma < \eta) \subset U_0, \qquad (a_\sigma, \eta < \sigma \leq 1) \cdot \bar{U}_0 = 0 \tag{*}$$

und eine Schar $(\varphi^\tau,\ 0\leq\tau\leq 1)$ *topologischer Abbildungen* φ^τ *von* $\overline{U}_0$ *auf sich mit den Eigenschaften:* $\varphi_0(p)=p$ *für* $p\in\overline{U}_0$; $\varphi^\tau(p)=p$ *für* $p\in\overline{U}_0-U_0$ *und* $0\leq\tau\leq 1$; *es wird* $(a_\sigma, 0\leq\sigma\leq\eta)$ *durch* φ^1 *auf* $(a_\sigma;\zeta\leq\sigma\leq\eta)$ *derart abgebildet, daß* a_η *in sich übergeht.*

Es sei nämlich U eine offene Vollkugel des R^r, q ein Punkt von U, q_1 ein Punkt auf $\overline{U}-U$ und q_0 ein Punkt im Innern von $\overline{qq_1}$. Dann gibt es eine Schar $(\gamma^\tau,\ 0\leq\tau\leq 1)$ topologischer Abbildungen γ^τ von $\overline{U}$ auf sich mit den Eigenschaften: $\gamma^\tau(p)=p$ für alle (p,τ) mit $p\in\overline{U}$, $\tau=0$ und $p\in\overline{U}-U$, $0\leq\tau\leq 1$; es wird $\overline{qq_1}$ durch γ^1 auf $\overline{q_0q_1}$ derart abgebildet, daß q_1 in sich übergeht.

Weiter gibt es offenbar eine solche offene Teilmenge U_0 mit der Eigenschaft (*) von U_1, daß man $\overline{U}_0$ durch eine topologische Abbildung h mit $h(a_0)=q$, $h(a_\eta)=q_0$, $h(a_\zeta)=q_1$ und $(h(a_\sigma),\ 0\leq\sigma\leq\eta)=\overline{qq_1}$ in $\overline{U}$ überführen kann.

Dann ist die Abbildungsschar $\varphi^\tau=h^{-1}\gamma^\tau h$, $0\leq\tau\leq 1$, von der verlangten Art.

Aus Hilfssatz 4 folgt

Hilfssatz 4'. *Es seien* $A=(a_\sigma,\ 0\leq\sigma\leq 1)$ *eine Kurve in* P, U *und* U_1 *in* P *offene Mengen mit* $A+U_1\subset U$ *und* t *eine topologische Abbildung von* U *auf den* R^r, *so daß* $(h(a_\sigma),\ 0\leq\sigma\leq 1)$ *ein doppelpunktfreier Streckenzug des* R^r *ist, ferner* ζ,η *Zahlen mit* $0<\zeta<\eta<1$ *und*

$$(a_\sigma,\ 0\leq\sigma\leq\eta)\subset U_1.$$

Dann gibt es eine in U_1 *offene Menge* U_0, *so daß* $(a_\sigma,\ 0\leq\sigma<\eta)$ *in* U_0 *liegt und* $(a_\sigma,\eta<\sigma\leq 1)$ *zu* $\overline{U}_0$ *fremd ist; ferner eine Schar* $(\varphi^\tau,\ 0\leq\tau\leq 1)$ *topologischer Abbildungen* φ^τ *von* $\overline{U}_0$ *auf sich mit den Eigenschaften:* $\varphi_0(p)=p$ *für* $p\in\overline{U}_0$; $\varphi^\tau(p)=p$ *für* $p\in\overline{U}_0-U_0$ *und* $0\leq\tau\leq 1$; *es wird* $(a_\sigma,\ 0\leq\sigma\leq\eta)$ *durch* φ^1 *derart auf* $(a_\sigma,\ \zeta\leq\sigma\leq\eta)$ *abgebildet, daß* a_η *in sich übergeht.*

Die oben erklärten Fixpunktklassen haben die Eigenschaft E, zur selben Fixpunktklasse gehörige Fixpunkte lassen sich auf einen Fixpunkt zusammenziehen. Diese Behauptung ist im folgenden Satz enthalten.

Satz 5. *Es seien* $r\geq 3$, q *und* q' *Punkte in* P, W *eine in* P *offene* q *und* q' *enthaltende Menge; ferner* f *eine stetige Abbildung von* P *in sich mit* q *und* q' *als Fixpunkten, welche innerhalb* W *zur selben Fixpunktklasse von* f *gehören, und mit*

$$(*)\qquad p\neq f(p),\qquad p\in\overline{W}-(\overline{q}+\overline{q}').$$

Dann läßt sich f *unter Festhaltung auf* $P-W$ *in eine Abbildung* f' *deformieren, die* q' *auf* W *als einzigen Fixpunkt hat.*

Beweis. Wir bezeichnen die Beziehung (*) auch mit I^0). Nach Voraussetzung existiert eine Kurve $A=(a_\sigma,\ 0\leq\sigma\leq 1)$ in W von q nach q', so daß

II^0) die Punkte q und q' durch A zur selben Fixpunktklasse von f gehören.

Wie man sich leicht überlegt, kann man überdies annehmen, daß $a_\sigma \neq q, q'$ für $0<\sigma<1$.

Es gibt weiter Zahlen $\sigma_0, \ldots, \sigma^{m+1}$ mit $0=\sigma_0<\cdots<\sigma^{m+1}=1$ und in P offene zum R^r homöomorphe Teilmengen $U^0, \ldots, U^m$ von W mit $q' \notin U^i$, $i=0, \ldots, m-1$, so daß gilt:

III^0) Für $i=0, \ldots, m$ ist $(a_\sigma,\ \sigma_i \leq \sigma \leq \sigma^{i+1}) < U^i$.

Es sei nun k eine der Zahlen $1, \ldots, m$.

Wir machen die Annahme, es existiere ein Punkt b in U^{k-1}, ferner in W eine Kurve $B=(b_\sigma,\ \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq 1)$ von b nach q' sowie eine aus f unter Festhaltung auf $P-W$ hervorgegangene Abbildung g mit I^{k-1}) bis III^{k-1}):

I^{k-1}) Es sind b und q' die einzigen Fixpunkte von g auf W.

II^{k-1}) Die Punkte b und q' gehören durch B zur selben Fixpunktklasse von g.

III^{k-1}) Für $i=k-1, \ldots, m$ ist $(b_\sigma,\ \sigma^i \leq \sigma \leq \sigma^{i+1}) < U^i$.

Dann wollen wir zeigen: Es gibt einen Punkt c in U^k, eine Kurve $C=(c_\sigma, \sigma^k \leq \sigma \leq 1)$ in W von c nach q' sowie eine Abbildung h von P in sich, die aus f durch eine f auf $P-W$ festhaltende Deformation entstanden ist und von der I^k) bis III^k) gilt: I^k) Es sind c und q' die einzigen Fixpunkte von h auf W. II^k) Die Punkte c und q' gehören durch C zur selben Fixpunktklasse von h. III^k) Für $i=k, \ldots, m$ liegt $(c_\sigma,\ \sigma^i \leq \sigma \leq \sigma^{i+1})$ in U^i.

Zum Beweis sei zunächst t eine topologische Abbildung von U^{k-1} auf den R^r. Sind p und p' Punkte aus U^{k-1}, so bezeichnen wir mit $\varrho(p, p')$ die Zahl $\varrho(t(p), t(p'))$. Es sei $\varepsilon>0$ eine Zahl derart, daß

(1) $$(b'_\sigma, \sigma'_\sigma \leq \sigma \leq \sigma^{i+1}) < U^i, \qquad i=k-1, \ldots, m,$$

für jede Kurve $(b'_\sigma, \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq 1)$ in W von b nach q' mit den Eigenschaften: $b'_\sigma = b_\sigma$ für $b_\sigma \notin U^{k-1}$, $b_\sigma \in U^{k-1}$ und $\varrho(b_\sigma, b'_\sigma) < \varepsilon$ für $b_\sigma \in U^{k-1}$. Die Zahl ε existiert, da die U^i in P offen sind und III^{k-1}) gilt.

Da $(b_\sigma,\ \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq \sigma^k)$ in U^{k-1} liegt und die letztere Menge in P offen ist, gibt es eine Zahl α mit $\sigma^k<\alpha<1$, so daß sogar $(b_\sigma,\ \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq \alpha)$ in U^{k-1} liegt. Auf $(b_\sigma, \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq 1)$, U^{k-1}, α, ε, t wenden wir Hilfssatz 3 an.

Derselbe ergibt eine Kurve $(c_\sigma,\ \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq 1)$ von b nach q', so daß: $b_\sigma = c_\sigma$, wenn $b_\sigma \notin U^{k-1}$;

(2) $$c_\sigma \in U^{k-1} \quad \text{und} \quad \varrho(b_\sigma, c_\sigma) < \varepsilon, \quad \text{wenn} \quad b_\sigma \in U^{k-1};$$

(3) $$(c_\sigma, \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq \alpha) \cdot (c_\sigma, \alpha < \sigma \leq 1) = 0;$$

und $(t(c_\sigma),\ \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq \alpha)$ ein doppelpunktfreier Streckenzug ist. Ferner eine für alle (σ, τ), $\sigma^{k-1} \leq \sigma \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq 1$, erklärte stetige Abbildung x in P mit

(4) $$x(\sigma, 0) = b_\sigma,\ x(\sigma, 1) = c_\sigma, \qquad \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq 1,$$

(5) $$x(\sigma^{k-1}, \tau) = b, \qquad x(1, \tau) = q', \qquad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Es sei c der Punkt c_{σ^k} und C die Kurve $(c_\sigma, \sigma^k \leq \sigma \leq 1)$.

Zur Erklärung von h sei α_1 eine Zahl mit $\sigma^k < \alpha_1 < \alpha$ und U_1^{k-1} eine in U^{k-1} offene Menge mit

$$(6) \qquad (c_\sigma, \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq \alpha_1) \subset U_1^{k-1}, \qquad (c_\sigma, \alpha \leq \sigma \leq 1) \cdot \overline{U}_1^{k-1} = 0.$$

Da $(c_\sigma, \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq \alpha)$ durch t auf einen doppelpunktfreien Streckenzug abgebildet wird und (3) gilt, existiert U_1^{k-1}.

Auf $(c_\sigma, \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq \alpha)$ und U^{k-1}, U_1^{k-1}, σ^k, α_1 statt U, U_1, ζ, η wenden wir hierauf Hilfssatz 4′ an. Derselbe liefert eine in U_1^{k-1} offene Menge U_0^{k-1} mit

$$(7) \qquad (c_\sigma, \sigma^{k-1} \leq \sigma < \alpha_1) \subset U_0^{k-1}$$

und $(c_\tau, \alpha_1 < \sigma \leq \alpha) \cdot \overline{U}_0^{k-1} = 0$, wegen $U_0^{k-1} \subset U_1^{k-1}$ und (6) also

$$(8) \qquad (c_\sigma, \alpha_1 < \sigma \leq 1) \cdot \overline{U}_0^{k-1} = 0;$$

sowie eine Schar $(\varphi^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ topologischer Abbildungen φ^τ von $\overline{U}_0^{k-1}$ auf sich mit den Eigenschaften: $\varphi^0(p) = p$ für $p \in \overline{U}_0^{k-1}$; $\varphi^\tau(p) = p$ für $p \in \overline{U}_0^{k-1} - U_0^{k-1}$ und $0 \leq \tau \leq 1$; es wird $(c_\sigma, \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq \alpha_1)$ durch φ^1 auf $(c_\sigma, \sigma^k \leq \sigma \leq \alpha_1)$ abgebildet.

Mit φ bezeichnen wir die durch $\varphi(p) = \varphi^1(p)$, $p \in \overline{U}_0^{k-1}$, und $\varphi(p) = p$, $p \notin \overline{U}_0^{k-1}$, bestimmte topologische Abbildung von P auf sich; mit χ die Umkehrung von φ. Wir setzen

$$(9) \qquad h(p) = \varphi g \chi(p), \qquad p \in P.$$

Damit sind c, C und h erklärt. Durch φ^τ, $0 \leq \tau \leq 1$, ist h zu g, also zu f homotop. Es gilt I^k) bis III^k):

Zu I^k). Liegt der Punkt p in $(W - (\overline{c} + \overline{q}')) - U_0^{k-1}$, so ist $h(p) = g(p)$, wegen $b \in U_0^{k-1}$ und I^{k-1}) also $p \neq h(p)$. Liegt p in U_0^{k-1}, so folgt die Behauptung daraus, daß b der einzige Fixpunkt von g auf U_0^{k-1} ist und b durch φ in c überführt wird.

Zu II^k). Nach einer obigen Bemerkung gehören b und q' wegen (4) und (5) auch durch $(c_\sigma, \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq 1)$ zur selben Fixpunktklasse von g. Daher gibt es eine für alle (σ, τ), $\sigma^{k-1} \leq \sigma \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq 1$, erklärte stetige Abbildung y in P mit

$$(10) \qquad \begin{cases} y(\sigma, 0) = c_\sigma, & y(\sigma, 1) = g(c_\sigma), & \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq 1, \\ y(\sigma^{k-1}, \tau) = b, & y(1, \tau) = q', & 0 \leq \tau \leq 1. \end{cases}$$

Zum Beweis, daß c und q' durch C zur selben Fixpunktklasse von h gehören, genügt es, die Existenz einer für alle (σ, τ), $\sigma^k \leq \sigma \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq 1$, erklärten stetigen Abbildung z nachzuweisen mit

$$(*) \qquad z(\sigma, 0) = c_\sigma, \qquad z(\sigma, 1) = h(c_\sigma), \qquad \sigma^k \leq \sigma \leq 1,$$

$$(*) \qquad z(\sigma^k, \tau) = c, \qquad z(1, \tau) = q', \qquad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Zunächst erklären wir eine Abbildung γ von $[\sigma^k, 1]$ auf $\sigma^{k-1}, 1]$. Und zwar sei $\gamma(\sigma) = \sigma$ für $\alpha_1 \leq \sigma \leq 1$. Die Kurve $(c_\sigma, \sigma^{k-1} \leq \sigma \leq \alpha_1)$ ist zu einem doppelpunktfreien Streckenzug homöomorph; daher wird γ über $[\sigma^k, \alpha_1]$ stetig fortgesetzt, wenn wir dort $\gamma(\sigma)$ erklären durch

$$(11) \qquad \chi(c_\sigma) = c_{\gamma(\sigma)}.$$

Ist dann $z(\sigma, \tau) = \varphi\, y(\gamma(\sigma), \tau)$ für $\sigma^k \leq \sigma \leq 1$ und $0 \leq \tau \leq 1$, so folgt für $\sigma^k \leq \sigma \leq \alpha_1$ bzw. $0 \leq \tau \leq 1$ aus (9) bis (11), daß

$$z(\sigma, 0) = \varphi\, y(\gamma(\sigma), 0) = \varphi(c_{\gamma(\sigma)}) = \varphi\, \chi(c_\sigma) = c_\sigma,$$
$$z(\sigma, 1) = \varphi\, y(\gamma(\sigma), 1) = \varphi\, g(c_{\gamma(\sigma)}) = \varphi g\, \chi(c_\sigma) = h(c_\sigma),$$
$$z(\sigma^k, \tau) = \varphi\, y(\gamma(\sigma^k), \tau) = \varphi\, y(\sigma^{k-1}, \tau) = \varphi(b) = c,$$
$$z(1, \tau) = \varphi\, y(\gamma(1), \tau) = \varphi\, y(1, \tau) = \varphi(q') = q'.$$

Für $\alpha_1 \leq \sigma \leq 1$ erhält man (†) ebenso. Aus (†) und (††) folgt II^k).

Die Beziehungen III^k) gelten wegen (1) und (2).

Für $k = m$ ist c ein Punkt in U^m, C nach III^m) eine Kurve in U^m von c nach q' sowie h eine zu f homotope Abbildung, so daß c und q' die einzigen Fixpunkte von h auf W sind, ferner c und q' durch C zur selben Fixpunktklasse von h gehören. Es möge U^m durch T topologisch auf den R' abgebildet werden. Mit

$$p_\sigma = (1 - \sigma)\, T(c) + \sigma\, T(q'), \qquad d_\sigma = T^{-1}(p_\sigma)$$

gehören dann offenbar c und q' auch durch $(d_\sigma, 0 \leq \sigma \leq 1)$ zur selben Fixpunktklasse von h. Alsdann ergibt Satz 4 eine zu h homotope Abbildung f' mit den in Satz 5 verlangten Eigenschaften.

Fulda, Marienstr. 9.

(Eingegangen am 6. Januar 1953.)

FOSTER, A. L.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 191—199 (1953)

Generalized "Boolean" theory of universal algebras.

Part II.

Identities and subdirect sums of functionally complete algebras.

By

ALFRED L. FOSTER.

1. Introduction. The concept of (general) subdirect sum has been very fruitful in the development of various generalizations of the fundamental structure theorem of Boolean rings. Thus, in particular (see part I of the present paper[1]) for references)

(i) each p-ring is isomorphic with a subdirect sum of F_p (= prime field, characteristic p). Similar structure theorems hold for p^k-rings, Post algebras, and for other classes of algebras.

From a quite different approach it was shown by the author that, beyond the mere structure extensions (i), the algebras in question actually constitute generalizations of the Boolean realm in a very wide sense. For instance the Boolean duality principle extends to

(ii) the theorems and concepts of p-rings (p^k-rings) occur in p-al (p^k-al) sets.

Again, for example,

(iii) each p-function (p^k-function, Post function, etc.) possesses a certain *normal expansion*, which specializes to the familiar normal representation of Boolean functions when $p^k = 2$.

In part I (l. c.) this theory—with emphasis on the property (iii)—was further raised to the level of a rather comprehensive class of universal algebras, designated as *f-algebras*. In the same sense in which F_p and F_{p^k} are the *kernels* of the p- and p^k-level extensions, it was shown in part I that each f-algebra, $\mathfrak{U}$, is the kernel of a corresponding extension. The algebras ($\mathfrak{U}$-algebras) comprising this extension then enjoy—in generalized form—such properties as (i)–(iii). These $\mathfrak{U}$-algebras, on the other hand, were furthermore shown to be completely characterized (up to isomorphisms) by the class of all so-called *normal* subdirect sums of $\mathfrak{U}$,—a certain subclass of all subdirect sums of $\mathfrak{U}$.

It was further shown in part I that particular interest attaches to the case where the kernel $\mathfrak{U}$ is a finite functionally complete f-algebra, as for instance with p- and p^k-rings and also with Post algebras, etc. In this case (of functionally complete kernel) the $\mathfrak{U}$-algebras were found to be additionally characterized by the identities of the kernel.

In the present paper we shall generalize the concepts "f-algebra" and "normal subdirect sum", as given in part I, and shall obtain a number of

[1]) FOSTER, A. L.: Generalized "Boolean" theory of universal algebras, etc. Math. Z. **58**, 306—336 (1953).

results related to the background sketched above. For instance we shall establish

Theorem 9.2 *(Principal theorem for strictly complete kernel).*

Let $\mathfrak{U}$ *be a functionally strictly complete universal algebra of at least two elements* (= *order* $n \geq 2$). *Then the following five classes of algebras are all coextensive, up to isomorphisms:*

(1) *The class* $\{\ldots, \mathfrak{A}, \ldots\}$ *of all universal algebras* $\mathfrak{A}$ *of the same species as* $\mathfrak{U}$ *and such that* (*a*) *each strict identity of* $\mathfrak{U}$ *is also an identity of* $\mathfrak{A}$, *and* (*b*) $\mathfrak{A}$ *is of order* $n \geq 2$.

(2) *The class of all subalgebras of direct sums of* $\mathfrak{U}$.

(3) *The class of all subdirect sums of* $\mathfrak{U}$.

(4) *The class of all scalar subdirect sums of* $\mathfrak{U}$.

(5) *The class of all normal subdirect sums of* $\mathfrak{U}$.

From (5) and the fact that all the algebras involved are of class f, these algebras of theorem 9.2 then possess (generalizations of) such properties as (i)–(iii) above (see part I).

As an interesting corollary it follows (§ 12) that the identities of such a strictly complete kernel, $\mathfrak{U}$, are equationally closed (saturated).

2. Some preliminaries. Let $\mathfrak{A} = (A, o, \ldots)$ be a universal algebra, with $o = o(\xi, \ldots), \ldots$ as primitive operations in the class $A = \{\ldots, \xi, \ldots\}$. An A-function $f(\xi, n, \ldots)$ is simply a function from $A, A, \ldots$ to A. An $\mathfrak{A}$-*function* is an A-function which is a primitive composition of one or more variables $\xi, \ldots$ over A and a (possibly empty) set of constants (= fixed $\in A$). If no constants are involved the $\mathfrak{A}$-function is called *strict*. An $\mathfrak{A}$-*identity* $f(\xi, \ldots) = g(\xi, \ldots)$ is an identity between $\mathfrak{A}$-functions f, g; if both f and g are strict $\mathfrak{A}$-functions the identity is called *strict*.

$\mathfrak{A}$ is *finite*, of *order* n, if A is a class of n elements.

If $\mathfrak{A}$ is finite and if each A-function may be expressed as some $\mathfrak{A}$-function, —respectively as some strict $\mathfrak{A}$-function—then $\mathfrak{A}$ is *(functionally) complete*, —respectively (functionally) *strictly complete*.

3. Algebras of class f; frames. A universal algebra $\mathfrak{U} = (U, o, \ldots)$ is said to be of *class* f, or an f-*algebra*, if there exist elements 0, 1 of $\mathfrak{U}$ $(0 \neq 1)$, and $\mathfrak{U}$-functions $\times$ (binary), $^\wedge$, $^\vee$ (unary) such that $^\wedge$, $^\vee$ are permutations of U ($\mathfrak{U}$-permutations), with $^\vee$ the inverse of $^\wedge$ and where

$$0 \times \xi = \xi \times 0 = 0; \qquad 1 \times \xi = \xi \times 1 = \xi \qquad (\xi \in \mathfrak{U}).$$

$$0^\wedge = 1, \qquad 1^\wedge = 0.$$

(It follows that $0^\vee = 1$, $1^\vee = 0$; however in general $\xi^\wedge \neq \xi^\vee$. It is also noted that in general $\xi \times \eta$ is neither associative nor commutative.) We then call the algebra $\mathcal{U} = (U; 0, 1; \times, ^\wedge, ^\vee)$ a *frame* of (or in) $\mathfrak{U}$. An f-algebra will in general possess more than one frame. Each $\mathcal{U}$-function is of course a $\mathfrak{U}$-function, though the converse is in general false. We are particularly con-

cerned with the $\mathcal{U}$-function $\times_\wedge$, the $\hat{}$ "transform" of $\times$,

$$\xi \times_\wedge \eta = \text{def} = (\xi^\wedge \times \eta^\wedge)^\vee .$$

We call $\times_\wedge$ and $\times$ the *frame-sum* and *frame-product* of the frame $\mathcal{U}$.

Algebras of class f are very common and widespread. For example every ring $(R, \times, +)$ with identity has $(R; 0, 1; \times, *)$ as a frame, where $\xi^* = \xi^\wedge = \xi^\vee = 1 - \xi$; again if α is a unity element, $(R; 0, \alpha; \times_1, *_1)$ is a frame, with $\xi \times_1 \eta = \xi \times \frac{\eta}{\alpha}$, $\xi^{*_1} = \alpha - \xi$. Of the manifold further examples we here mention only the case of functionally complete universal algebras $\mathfrak{U}$ (of order $n \geq 2$), which are all of class f. Indeed for such $\mathfrak{U}$, if $\alpha_0, \alpha_1 (\alpha_0 \neq \alpha_1)$ are any distinct $\in \mathfrak{U}$, there exists at least one frame $\mathcal{U} = (U; \alpha_0, \alpha_1; \times, \hat{}, \vee)$. In particular all finite fields, and also the Post algebra kernel (of order n) are functionally complete and therefore of class f. The same holds for the cyclic algebra of order n, $\mathfrak{C}_n = (C_n, \times, *)$, where $(C_n, *)$ is the cyclic group of order $n-1$, augmented by a null, $0 : 0 \times \xi = \xi \times 0 = 0$;

$$\xi^* = (0\,1) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \xi = 0 \\ 0 & \text{if} \quad \xi = 1 \\ \xi & \text{if} \quad \xi \neq 0, \neq 1 . \end{cases}$$

Again $(C_n, \times, \hat{})$ is complete, where $\hat{}$ is taken as an arbitrary but fixed cyclic permutation of the n elements comprising C_n. (Compare with part I.)

4. Normal- and scalar-subdirect sums. Let $\mathfrak{U} = (U, o, \ldots)$ be a universal algebra of class f, and let $\mathcal{U} = (U; 0, 1; \times, \hat{}, \vee)$ be a frame thereof. Let $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$ be a direct sum (= direct power) of $\mathfrak{U}$, where $\mathfrak{N}$ is of arbitrary (finite or transfinite) cardinality. If $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mathfrak{N}) \in \mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$ and if $\mu \in \mathfrak{U}$, then by $P_\mu(\mathfrak{a})$, called the μth-*projection* of $\mathfrak{a}$ (in, or relative to the frame $\mathcal{U}$), we mean:

$$P_\mu(\mathfrak{a}) = (\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_\mathfrak{N}'), \quad \text{where} \quad \alpha_i' = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \alpha_i = \mu \\ 0 & \text{if} \quad \alpha_i \neq \mu . \end{cases}$$

Let $\mathfrak{U} = (\boldsymbol{U}, o, \ldots)$ be a subalgebra of $\mathfrak{U}^{(\mathfrak{N})}$. If $\mathfrak{U}$ satisfies

(1°) all elements (= 'scalars') $(\mu, \mu, \mu, \ldots, \mu)$ are $\in \mathfrak{U}$ $(\mu \in \mathfrak{U})$, we call $\mathfrak{U}$ a *scalar-subdirect sum* of $\mathfrak{U}$. If in addition $\mathfrak{U}$ also satisfies

(2°) for each $\mathfrak{a} \in \mathfrak{U}$ and for each $\mu \in \mathfrak{U}$, $P_\mu(\mathfrak{a}) \in \mathfrak{U}$, we call $\mathfrak{U}$ a *normal-subdirect* sum of $\mathfrak{U}$[2]).

The independence of the concept of normality from the particular frame chosen is shown by

Theorem 4.1. *If $\mathfrak{U}$ is a normal subdirect sum of $\mathfrak{U}$ relative to some frame $\mathcal{U}$, then it is a normal subdirect sum relative to any frame $\mathcal{U}'$.*

Proof. Let P' denote projection relative to the frame $\mathcal{U}' = (U; 0', 1'; \times', \hat{}', \vee')$. One easily verifies the formula

$$(4.1) \qquad P_\mu'(\mathfrak{a}) = \{(1', 1', 1', \ldots) \times P_\mu(\mathfrak{a})\} \times_\wedge \{(0', 0', 0', \ldots) \times (P_\mu(\mathfrak{a}))^\wedge\} .$$

Since the right of (4.1) is $\in \mathfrak{U}$ the theorem is proved.

[2]) That $\mathfrak{U}$ is a subdirect sum (see BIRKHOFF [1]) follows from (1°).

5. Normal representation; kernel, core. As in part I we shall agree to identify the *kernel*, $\mathfrak{U}$, with its isomorph $\mathfrak{U}_1 =$ subalgebra of all scalars

$$(\mu, \mu, \mu, \ldots, \mu), \qquad (\mu \in \mathfrak{U}):$$

$$\mathfrak{U} \cong \mathfrak{U}_1, \quad \mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1: \quad \mu \longleftrightarrow (\mu, \mu, \ldots, \mu), \quad \mu = (\mu, \mu, \ldots, \mu); \quad \mathfrak{U} \leqq \mathfrak{U}.$$

With this understanding the identity (4.1), for instance, is written simply

$$P'_\mu(\alpha) = 1' P_\mu(\alpha) \times_\wedge 0' (P_\mu(\alpha))^\wedge.$$

The kernel $\mathfrak{U} (= \mathfrak{U}_1)$ of $\mathbf{\mathfrak{U}}$ is obviously the same for all frames in $\mathbf{\mathfrak{U}}$.

By the *core*, J, of $\mathbf{\mathfrak{U}}$ — relative to a given frame $\mathcal{U}$ — we mean the set of all elements $P_\mu(\alpha)$; $(\mu \in \mathfrak{U}, \alpha \in \mathbf{\mathfrak{U}})$. As in part I $(J, \times, ^\wedge, ^\vee)$ is shown to be a Boolean algebra with $a \times b$ as Boolean intersection, $a^\wedge = a^\vee = a^* =$ Boolean complement $(a, b \in J)$, and 0, 1 as null and universe. With only very minor modifications of the corresponding proofs in part I we have

Theorem 5.1 (*Normal representation theorem*). *Let $f(\xi, \eta, \ldots)$ be any $\mathbf{\mathfrak{U}}$-function, where $\mathbf{\mathfrak{U}}$ is a normal subdirect sum of a universal algebra $\mathfrak{U}$ of class f. Then for each fixed frame in $\mathbf{\mathfrak{U}}$ we have a normal decomposition*[3])

$$f(\xi, \eta, \ldots) = \sum_{\alpha, \beta, \ldots \in \mathfrak{U} = \text{kernel of } \mathfrak{U}}^{\times_\wedge} f(\alpha, \beta, \ldots)\, P_\alpha(\xi)\, P_\beta(\eta) \ldots .$$

Theorem 5.1′ (*Alternate formulation*). *In the notation of theorem 5.1, each $\xi \in \mathbf{\mathfrak{U}}$ may be expressed in one and only one way in the normal form*

$$\xi = \sum_{\mu \in \mathfrak{U}}^{\times_\wedge} \mu\, a_\mu$$

in which the a_μ are pairwise disjoint core $(= J)$ elements which cover J $\left(i.e., \sum_{\mu \in \mathfrak{U}}^{\times_\wedge} a_\mu = 1\right)$. Then

$$f(\xi, \eta, \ldots) = \sum_{\alpha, \beta, \ldots \in \mathfrak{U}}^{\times_\wedge} f(\alpha, \beta, \ldots)\, a_\alpha b_\beta \ldots ,$$

where $\{a_\mu\}, \{b_\mu\}, \ldots$ are the core components of $\xi, \eta, \ldots$.

6. Functionally complete kernel. Let $\mathbf{\mathfrak{U}}$ be a universal algebra and $\mathfrak{U}$ a subalgebra. A $\mathfrak{U}$-identity $f(\xi, \ldots) = g(\xi, \ldots)$ is said to *extend* to $\mathbf{\mathfrak{U}}$ or to be *satisfied* by $\mathbf{\mathfrak{U}}$ if $f(\xi, \ldots) = g(\xi, \ldots)$ is a $\mathbf{\mathfrak{U}}$-identity; here the $\mathfrak{U}$-variables $\xi, \ldots$ but not the constants (if any) appearing in $f(\xi, \ldots)$, $g(\xi, \ldots)$ are replaced by $\mathbf{\mathfrak{U}}$-variables $\xi, \ldots$.

Theorem 6.1. *Let $\mathbf{\mathfrak{U}}$ be a universal algebra possessing a subalgebra, $\mathfrak{U}$, where*

(1°) *$\mathfrak{U}$ is finite and functionally complete;*

(2°) *each $\mathfrak{U}$-identity extends to $\mathbf{\mathfrak{U}}$;*

(3°) *$\mathfrak{U}$ contains at least two elements.*

Then $\mathbf{\mathfrak{U}}$ is isomorphic with a normal subdirect sum of $\mathfrak{U}$.

[3]) For the limited associative and commutative properties which make parentheses in $\sum^{\times_\wedge}$ unnecessary see FOSTER, part I, l. c.

Proof. Let $0, 1$ be any distinct elements of $\mathfrak{U}$. Then $\mathfrak{U}$ is of class f and possesses a frame $\mathfrak{U} = (U; 0, 1; \times, \wedge, \vee)$. That $\mathfrak{V}$ is a normal subdirect sum of $\mathfrak{U}$—relative to the frame $\mathfrak{U}$—follows with only minor modifications (required because of our more general formulation of the concepts 'of class f' and 'normal subdirect sum') from the proof of a similar theorem of part I. Theorem 4.1 then shows that $\mathfrak{V}$ is independent of the particular frame chosen.

The following more general converse of theorem 6.1 is an immediate consequence of the definitions involved:

Theorem 6.2. *If $\mathfrak{V}$ is a scalar-subdirect sum of a universal algebra, $\mathfrak{U}$, then the scalars of $\mathfrak{V}$ form a subalgebra isomorphic (and to be identified) with $\mathfrak{U}$, and every $\mathfrak{U}$-identity extends to $\mathfrak{V}$.*

By forward reference to lemma 8 and from a joint consideration of theorems 6.1 and 6.2 we have

Theorem 6.3 *(Principal theorem for complete kernel). Let $\mathfrak{U}$ be a functionally complete universal algebra of order $n \geq 2$. Then the following three classes of algebras are all coextensive, up to isomorphisms:*

(1) *The class $\{\ldots, \mathfrak{V}, \ldots\}$ of all overalgebras $\mathfrak{V}$ of $\mathfrak{U}$ such that each $\mathfrak{U}$-identity extends to $\mathfrak{V}$.*

(2) *The class of all scalar-subdirect sums of $\mathfrak{U}$.*

(3) *The class of all normal-subdirect sums of $\mathfrak{U}$.*

That theorem 6.1 cannot be proved if the condition (1°) thereof is deleted is seen by the following example. Let $\mathfrak{A} = (A, \times) = \{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots\}$, with $\alpha^m \times \alpha^n = \alpha^{m+n}$. Also let $\mathfrak{A}' = (A', \times')$ be any group, and let $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}'$ (direct sum). Since $\mathfrak{A}$ is the free algebra (of one generator) of the identities $\xi \times \eta = \eta \times \xi$, $\xi \times (\eta \times \xi) = (\xi \times \eta) \times \xi$, it is obvious that $\mathfrak{A}'$, and hence also $\mathfrak{B}$ satisfies all identities satisfied by $\mathfrak{A}$. Moreover $\mathfrak{A}$ is (isomorphic with) a subalgebra of $\mathfrak{B}$. Thus, with the exception of (1°) the conditions of theorem 6.1 are satisfied. However the conclusion is now false, in fact a simple argument, which we omit, shows that $\mathfrak{B}$ is not isomorphic with any subalgebra of a direct sum of $\mathfrak{A}$.

7. Strictly complete kernel. The finite fields $\mathcal{F}_p = (F_p, \times, +)$ and $\mathcal{F}_{p^k} = (F_{p^k}, \times, +)$ are complete but not strictly complete, e.g., the constant function, 1, cannot be expressed as a strict $\mathcal{F}_p$- or an $\mathcal{F}_{p^k}$-function. However (see part I) expressed in the form $(F_p, \times, ')$ and $(F_{p^k}, \times, ^\frown)$ these fields are strictly complete. Here

$$\xi' = \xi + 1 \pmod{p}; \quad \xi^\frown = \begin{Bmatrix} \lambda\xi & \text{for} & \xi \neq 0, \neq \lambda^{p^k-2} \\ 1 & \text{for} & \xi = 0 \\ 0 & \text{for} & \xi = \lambda^{p^k-2} \end{Bmatrix},$$

$$(\xi \in F_{p^k};\ \lambda = \text{multip. generator of } F_{p^k}).$$

Again, the algebra $\mathcal{C}_n = (C_n, \times, ^\frown)$ previously noted (§ 3) is strictly complete. [For $n = p^k =$ prime power this algebra is identical with the Galois field $(F_{p^k}, \times, ^\frown)$.] Further, the Post kernel $(P_n, \times, ')$ of order n is strictly complete. Other examples, and criterea for completeness (ordinary and strict) may be found in part I.

The 'simplicity' of the concept of strict completeness is shown by

Theorem 7.1. *If* $\mathfrak{U}$ *is strictly complete,*

(1°) $\mathfrak{U}$ *contains no proper subalgebra;*

(2°) $\mathfrak{U}$ *contains no proper ideals, i.e., if* $\mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$ *is a homomorphism, then* $\mathfrak{U} \cong \mathfrak{U}'$ *(isomorphism), or* $\mathfrak{U}'$ *is the one-element algebra.*

Proof. Suppose $\mathfrak{B}$ were a proper subalgebra, and suppose $a \in \mathfrak{U}$, $a \notin \mathfrak{B}$. There exists a strict $\mathfrak{U}$-function $f(\xi)$ such that $f(\xi) \equiv a$. Then in particular for $\eta \in \mathfrak{B}$, $f(\eta) = a$. But this contradicts the assumption that $\mathfrak{B}$ is a subalgebra, and (1°) is proved.

Consider (2°). Suppose $\mathfrak{U}$ possesses a proper ideal (= partition), $\mathfrak{q}$. Then there exist at least two residue classes Q, Q' of $\mathfrak{q}$ neither of which is empty and one of which contains at least two elements. Say $a_1, a_2 \in Q$, $a' \in Q'$. There exists (at least one) strict $\mathfrak{U}$-function $h(\xi)$ such that $h(a_1) = a_2$, $h(a_2) = a'$. This is in contradiction with the assumption that $\mathfrak{q}$ is an ideal, and (2°) is proved. From (1°) we have the immediate

Corollary. *If* β *is any element of* $\mathfrak{U}$ *then* β *generates* $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} = (\beta)$.

8. Complete kernel (continued). If $\mathfrak{U}$ is a universal algebra of class f, simple counterexamples show that (a) a subalgebra of a direct sum of $\mathfrak{U}$ is not in genaral a subdirect sum of $\mathfrak{U}$, and further that (b) a subdirect sum of $\mathfrak{U}$ is in general not normal, nor even scalar. [In fact (a) and (b) are still true even when $\mathfrak{U}$ is (merely) complete.] We have however the

Lemma 8. (1) *If* $\mathfrak{U}$ *is a functionally strictly complete universal algebra of order* $n \geq 2$, *then every subalgebra of a direct sum of* $\mathfrak{U}$ *is a normal-subdirect sum of* $\mathfrak{U}$.

(2) *If* $\mathfrak{U}$ *is a functionally complete universal algebra of order* $n \geq 2$, *then every scalar-subdirect sum of* $\mathfrak{U}$ *is normal.*

Proof of (1). Let $\mathcal{U}$ be a frame in $\mathfrak{U}$, let $\mu \in \mathfrak{U}$ and let the constant $\mathfrak{U}$-function $f(\xi) \equiv \mu$ and the characteristic function $\delta_\mu(\xi)$, (relative to $\mathcal{U}$), be expressed as strict $\mathfrak{U}$-functions. If $\mathfrak{A}$ is a subalgebra of a direct sum of $\mathfrak{U}$ and if $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots) \in \mathfrak{A}$, then

$$f_\mu(\mathfrak{a}) = (\mu, \mu, \mu, \ldots) = \in \mathfrak{A}$$
$$\delta_\mu(\mathfrak{a}) = P_\mu(\mathfrak{a}) = \in \mathfrak{A}.$$

Hence all scalars are $\in \mathfrak{A}$, and with $\mathfrak{a}$ also all projections of $\mathfrak{a}$ are $\in \mathfrak{A}$, which proves (1). The proof of (2) is similar and will be omitted.

9. Proof of theorem 9.2 (stated in § 1), etc.

Theorem 9.1. *Let* $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{A}$ *be any universal algebras of the same species and each containing at least two elements, and where*

(1°) $\mathfrak{U}$ *is finite and functionally strictly complete.*

(2°) *Each strict identity of* $\mathfrak{U}$ *is also an identity of* $\mathfrak{A}$.

Then

(i) $\mathfrak{A}$ *is isomorphic with a normal subdirect sum of* $\mathfrak{U}$.

(ii) *Each strict identity of* $\mathfrak{A}$ *is an identity of* $\mathfrak{U}$.

Proof. Let $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{u}$ satisfy (1°) and (2°) above, and let $\alpha \in \mathfrak{u}$, $f_\alpha(\xi) \equiv \alpha$, where $f_\alpha(\xi)$ is expressed as a strict $\mathfrak{u}$-function. Then $f_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ is a strict $\mathfrak{U}$-function. Applying (2°) to the $\mathfrak{u}$-identity $f_\alpha(\xi) = f_\alpha(\eta)$, we have the strict $\mathfrak{U}$-identity $f_\alpha(\boldsymbol{\xi}) = f_\alpha(\boldsymbol{\eta})$. That is, for given $\alpha \in \mathfrak{u}$, $f_\alpha(\boldsymbol{\xi})$ is a constant $\mathfrak{U}$-function, call it α': $f_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \equiv \alpha' = \in \mathfrak{U}$.

Consider the mapping

$$\alpha \to \alpha' = f_\alpha(\boldsymbol{\xi}), \qquad (\alpha \in \mathfrak{u}). \tag{9.1}$$

Let $\alpha \to \alpha', \beta \to \beta', \ldots$ let $o(\xi, \eta, \ldots)$ be a primitive operation and let $o(\alpha, \beta, \ldots) = \gamma$. From (2°) and the strict $\mathfrak{u}$-identities

$$o(f_\alpha(\xi), f_\beta(\xi), \ldots) = f_\gamma(\eta)$$

we obtain the strict $\mathfrak{U}$-identities

$$o(f_\alpha(\boldsymbol{\xi}), f_\beta(\boldsymbol{\xi}), \ldots) = f_\gamma(\boldsymbol{\eta}),$$

that is

$$o(\alpha', \beta', \ldots) = \gamma'.$$

We have thus shown that $\mathfrak{u}'$, the class of all images $\alpha', \ldots$ under (9.1), is a subalgebra of $\mathfrak{U}$, and that (9.1) is a homomorphism of $\mathfrak{u}$ onto $\mathfrak{u}'$. By theorem 7.1 either $\mathfrak{u} \cong \mathfrak{u}'$ or else $\mathfrak{u}' = \tau'$ (= one element algebra). The latter is impossible, for if so, from (2°) of theorem 9.1 and obvious corresponding $\mathfrak{u}$-identies we have: for any $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{U}$,

$$\boldsymbol{\xi} = \sum_{\mu \in \mathfrak{u}}^{\times \wedge} f_\mu(\boldsymbol{\xi})\, \delta_\mu(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\mu \in \mathfrak{u}}^{\vee \wedge} \tau'\, \delta_\mu(\boldsymbol{\xi}) = \tau'.$$

This contradicts our assumption that $\mathfrak{U}$ contains at least two elements. Hence $\mathfrak{u} \cong \mathfrak{u}'$. The assertion (i) of theorem 9.1 then follows from theorem 6.1. Finally (ii) is a consequence of the fact that $\mathfrak{u}\,(= \mathfrak{u}')$ is a subalgebra of $\mathfrak{U}$.

The proof of theorem 9.2 (see § 1) now follows at one from lemma 8 and theorem 9.1.

Employing corollary 22 of part I we have the special

Theorem 9.3. *Let* $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{U}$ *satisfy either the hypotheses of theorem* 9.1 *or those of theorem* 6.1. *Then if* $\mathfrak{U}$ *is a finite algebra,* $\mathfrak{U}$ *is isomorphic with a direct sum of* $\mathfrak{u}$, *and the order of* $\mathfrak{U}$ *is a power of the order of* $\mathfrak{u}$.

10. Core, normal expansion, for complete kernel. The considerations of §§ 4, 5, holding for arbitrary f-algebra kernels, are perforce synthetic in nature. For complete kernels, however, they may be given an internal formulation. We shall merely sketch this section since the arguments are essentially those of §§ 19, 14 of part I, where however the less general definition of f-algebra and normal subdirect sum were used.

Let $\mathfrak{u}$ be functionally complete, $\mathfrak{U}$ a normal subdirect sum of $\mathfrak{u}$ and $\mathcal{U} = (U; 0, 1; \times, \wedge, \vee)$ a frame in $\mathfrak{u}$. Then the μth *characteristic* function ($\mu \in \mathfrak{u}$),

$$\delta_\mu(\xi) = \begin{cases} 1 \text{ if } \xi = \mu \\ 0 \text{ if } \xi \neq \mu \end{cases} \qquad (\xi \in \mathfrak{u})$$

may—and we assume it to—be expressed as a $\mathfrak{u}$-function, or, in case $\mathfrak{u}$ is strictly complete, as a strict $\mathfrak{u}$-function.

The μth projection $P_\mu(\xi)$, $(\xi \in \mathfrak{U})$ is then given by

$$P_\mu(\xi) = \delta_\mu(\xi),$$

where $\delta_\mu(\xi)$ is the extension to $\mathfrak{U}$ of the characteristic function $\delta_\mu(\xi)$, that is, $\delta_\mu(\xi)$ is obtained from $\delta_\mu(\xi)$ by replacing the $\mathfrak{U}$-variable ξ by the $\mathfrak{U}$-variable ξ. [If $\mathfrak{U}$ is merely simply, but not strictly complete, any constants occurring in the $\mathfrak{U}$-function $\delta_\mu(\xi)$ remain unaltered in passing to $\delta_\mu(\xi)$.] Thus $P_\mu(\xi)$ is 'internally' expressed, as a $\mathfrak{U}$-function, or even—in case $\mathfrak{U}$ is strictly complete—as a strict $\mathfrak{U}$-function.

From earlier sections we then readily have

Theorem 10.1. *Let $\mathfrak{U}$ be a universal algebra possessing a functionally complete subalgebra (of at least two elements) such that every $\mathfrak{U}$-identity extends to $\mathfrak{U}$. Let $\mathcal{U} = (U; 0, 1; \times, \wedge, \vee)$ be any frame in $\mathfrak{U}$ and let $\delta_\mu(\xi)$ be the extension to $\mathfrak{U}$ of the characteristic function $\delta_\mu(\xi)$ of $\mathfrak{U}$. Then each $\mathfrak{U}$-function $f(\xi, \eta, \ldots)$ possesses the normal decomposition*

$$f(\xi, \eta, \ldots) = \sum_{\alpha, \beta, \ldots \in \mathfrak{U}}^{\times \wedge} f(\alpha, \beta, \ldots)\, \delta_\alpha(\xi)\, \delta_\beta(\eta) \ldots .$$

Theorem 10.2. *Let $\mathfrak{U}$ be a functionally strictly complete algebra (of at least two elements) and let $\mathfrak{U}$ be any algebra that satisfies all the strict identities of $\mathfrak{U}$. If $f_\alpha(\xi) \equiv \alpha$, $(\alpha \in \mathfrak{U})$ is the constant function, α, expressed as a strict $\mathfrak{U}$-function, the class of corresponding (strict) $\mathfrak{U}$-functions, $\mathfrak{U}' = \{f_\alpha(\xi)\}$, $(\alpha \in \mathfrak{U}, \xi \in \mathfrak{U})$ form an isomorphic subalgebra of $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} \cong \mathfrak{U}'$ and, in the notation of theorem 10.1, each (not necessarily strict-) $\mathfrak{U}$-function possesses the normal expansion of theorem 10.1, with $\sum_{\alpha, \beta, \ldots \in \mathfrak{U}}$ replaced by $\sum_{\alpha, \beta, \ldots \in \mathfrak{U}'}$.*

Core. For $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}$ as in theorem 10.1 or theorem 10.2, the core J of $\mathfrak{U}$—relative to the frame $\mathcal{U}$ in $\mathfrak{U}$—is internally expressed by (see part I)

(10.1) $J = \{\delta_\mu(\xi)\}$, where μ runs through $\mathfrak{U}$ and ξ runs through $\mathfrak{U}$.
$J = \{\delta_\alpha(\xi)\}$, where $\alpha =$ fixed $\in \mathfrak{U}$ and ξ runs through $\mathfrak{U}$.

In particular, $J = \{\delta(\xi)\}$, where $\delta(\xi) = \delta_0(\xi)$.

If 0, 1 are any $\in \mathfrak{U}$, since $\mathfrak{U}$ is complete we may always choose a *special* frame $\mathcal{U}' = (U; 0, 1; \times, \wedge, \vee)$ in which 0 and 1 are the only idempotent elements (relative to $\times$). A comparison of the synthetic and internal aspects of normal subdirect sums then yields

Theorem 10.3. *If $\mathfrak{U}$ is a normal subdirect sum of a functionally complete algebra, $\mathfrak{U}$, and if $\mathcal{U}'$ is a special frame in $\mathfrak{U}$, then, relative to $\mathcal{U}'$, the core of $\mathfrak{U}$ consists of the totality of idempotent elements of $\mathfrak{U}$, $(\xi \times \xi = \xi)$.*

Such special frames, with corresponding easily computed cores, are useful in connection with the normal decomposition of $\mathfrak{U}$-functions given by theorem 5.1'.

Thus, in the case of the kernel F_p of a p-ring, and F_{p^k} of a p^k-ring, the 'natural' frames $(F_p, \times, *)$, $(F_{p^k}, \times, *)$ are special in the above sense; correspondingly the (natural) core of a p- or of a p^k-ring consists of its totality of idempotent elements. A similar remark applies to the $\mathcal{C}_n$-algebras [satisfying all identities of $(C_n, \times, *)$, or all strict identities of $(C_n, \times, \hat{})$,—see

§ 3]. However any 'natural' frame in the Post kernel $(P_n, \times, ')$, that is any frame utilizing $\times$ as frame product, is not special (-- every element of P_n is here idempotent). With respect to such frames the core of Post algebras is determined by the general formulas (10.1).

11. Universal fundamental set of identities. A set $\mathfrak{I} = \{\ldots, I_i, \ldots\}$ of identities of an algebra is called a *fundamental* set if every identity of the algebra is a logical consequence thereof.

Let $\mathfrak{U}$ be functionally complete, let $\mathcal{U}$ be a frame thereof, and let $\delta(\xi) = \delta_0(\xi)$ be its 0th characteristic function and ξ° any transitive $0 \to 1$ $\mathfrak{U}$-permutation. From the considerations of § 19 of part I one may, in terms of these, write down a certain finite *universal* fundamental set, $\mathfrak{I}^*$

$$\mathfrak{I}^* = \begin{cases} \delta(\xi) \times \delta(\xi) = \delta(\xi) \\ \vdots \end{cases}$$

which is 'universal' in the following sense: if $\mathfrak{U}$ is any functionally complete algebra with a frame chosen therein, and if $\delta(\xi)$, ξ° are expressed as $\mathfrak{U}$-functions, the expressions $\mathfrak{I}^*$ form a fundamental set of identities for $\mathfrak{U}$. Thus, for instance, for $(F_p, \times, +)$, using the natural frame $(F_p, \times, ^*)$, the first expression of $\mathfrak{I}^*$ becomes the identity $(1 - \xi^{p-1})\,(1 - \xi^{p-1}) = (1 - \xi^{p-1})$, etc.

Of course for a given complete algebra $\mathfrak{U}$ the universal fundamental set will generally not be as short or simple as one which is geared to the particular peculiarities of structure of $\mathfrak{U}$. The universal set may however serve as a standard for testing a candidate set of identities for 'fundamentalness'.

12. Equational closure and functional completeness. Let $o, \ldots$ be a class of operations and let $\mathcal{E} = \{\ldots, E_i, \ldots\}$ be a set of (strict) equations in these operations. Every such set $\mathcal{E}$ has the one-element model, called the *trivial* model. If $\mathcal{E}$ possesses only the trivial model, $\mathcal{E}$ is called *inconsistent*; otherwise $\mathcal{E}$ is *consistent*.

Let E' be a strict equation in the operations $o, \ldots$ and let $\mathcal{E}' = \mathcal{E}(E')$ denote the class $\mathcal{E}$ augmented by E'. If E' is a logical consequence of the identities $\mathcal{E}$ we write $\mathcal{E}$ *equiv.* $\mathcal{E}'$.

A set $\mathcal{E}$ of equations is called *equationally closed* (or *saturated*) if, for every E', either $\mathcal{E}$ equiv. $\mathcal{E}'$ or else $\mathcal{E}'$ is inconsistent.

Theorem 12.1. *Let $\mathfrak{U}$ be a strictly complete (finite) algebra of order $n \geq 2$, and let $\mathfrak{I} = \{\ldots, I_i, \ldots\}$ be a fundamental set of (or else the set of all) strict identities of $\mathfrak{U}$. Then $\mathfrak{I}$ is equationally closed.*

Proof. Let I' be any strict equation in the primitive operations $o, \ldots$ of $\mathfrak{U}$. Now by theorem 9.2 all models of $\mathfrak{I}$, and hence also all models of $\mathfrak{I}' = \mathfrak{I}(I')$ if $\mathfrak{I}'$ is consistent, are normal subdirect sums of $\mathfrak{U}$. But, by theorem 9.1, each such model satisfies those and *only* those strict identities satisfied by $\mathfrak{U}$. Hence if $\mathfrak{I}'$ is consistent it follows that I' is a logical consequence of $\mathfrak{I}$, and the theorem is proved.

University of California, Berkeley, Cal., USA.

(Eingegangen am 29. Mai 1953.)

MEYER-KÖNIG, W., und K. ZELLER
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 200—205 (1953)

Inäquivalenzsätze bei Limitierungsverfahren.

Von
W. MEYER-KÖNIG und K. ZELLER.

Einleitung.

Wir legen zuerst einige Bezeichnungen fest. Ist V ein (nicht notwendig permanentes) Limitierungsverfahren, so bildet die Menge der V-limitierbaren Folgen das Wirkfeld $\mathfrak{V}$ von V. Die Verfahren V und W heißen äquivalent, wenn $\mathfrak{V}=\mathfrak{W}$ ist (ohne daß V und W notwendig verträglich sind). $A=(a_{nk})$, $A_i=(a_{nk}^{(i)}),\ldots$ sind Matrizen, $\mathfrak{x}=(x_n)$, $\mathfrak{z}_{ij}=(z_n^{(ij)}),\ldots$ sind Folgen $(n, k=0, 1, \ldots)$. $\mathfrak{z}=\sum_i \alpha_i \mathfrak{x}_i$ soll $z_n=\sum_i \alpha_i x_n^{(i)}$ für $n=0, 1, \ldots$ bedeuten. Existenz der A-Transformation $\mathfrak{z}=A\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{x}$ besagt: $z_n=(A\mathfrak{x})_n=\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k$ ist für jedes $n=0, 1, \ldots$ eine konvergente Reihe. Zu A gehört das Matrixverfahren A: $\mathfrak{x}$ heißt A-limitierbar (bzw. A-beschränkt), wenn $A\mathfrak{x}$ existiert und eine konvergente (bzw. beschränkte) Folge ist.

Nun sei eine Klasse verträglicher Matrixverfahren A_α gegeben. Unter $\mathsf{U}A_\alpha$ verstehen wir das Limitierungsverfahren mit dem Wirkfeld $\mathsf{U}\mathfrak{A}_\alpha$: $\mathfrak{x}$ heißt $(\mathsf{U}A_\alpha)$-limitierbar, wenn $\mathfrak{x}$ in $\mathsf{U}\mathfrak{A}_\alpha$ liegt. Die Frage ist, ob $\mathsf{U}A_\alpha$ einem Matrixverfahren äquivalent ist. Dieselbe Frage tritt bei Verfahren wie C_∞ (s. unten) auf. Die Antwort fällt, wie schon G. LORENTZ (1945, unveröffentlichtes Manuskript) vermutet hat, im allgemeinen verneinend aus. Dies wurde bisher mit funktionalanalytischen Hilfsmitteln gezeigt (vgl. K. KNOPP [1952] und dort angegebene Literatur). Wir geben hier neue Beweise dieser „Inäquivalenzsätze", die keine Hilfsmittel der Funktionalanalysis benötigen. Sie fließen aus dem folgenden

Satz.

A und A_i seien Matrizen $(i=0, 1, \ldots)$. Zu jedem i gebe es ein $\mathfrak{x}_i$, das von A, aber nicht von A_i limitiert wird. Dann gibt es ein $\mathfrak{x}$, das von A, aber von keinem A_i limitiert wird.

Es handelt sich also um ein Problem der Kondensation von Singularitäten: $\mathfrak{x}$ faßt alle Singularitäten „nicht A_i-limitierbar" zusammen. Eine solche Kondensation wird oft mit Hilfe des BAIREschen Kategoriesatzes durchgeführt, „um mühsame Rechnungen zu vermeiden" (vgl. S. BANACH und H. STEINHAUS [1927]). Wir zeigen hier, daß man $\mathfrak{x}$ mit verhältnismäßig wenig Rechnung direkt konstruieren kann. Erwähnt sei, daß der Satz nicht richtig bleibt, wenn die Menge der Matrizen A_i durch eine überabzählbare Menge von Matrizen ersetzt wird, selbst nicht mit der Zusatzvoraussetzung $\mathfrak{A}_i<\mathfrak{A}$ für alle i.

Beweis des Satzes.

1. Wir definieren Matrizen B_i und Folgen $\mathfrak{y}_i$ $(i=0, 1, \ldots)$. Existiert $A_i \mathfrak{x}_j$ bei festem i für $j=0, 1, \ldots$, so setzen wir $B_i = A_i$, $\mathfrak{y}_i = \mathfrak{x}_i$. Andernfalls gibt es ein $j(i)$, so daß $A_i \mathfrak{x}_{j(i)}$ nicht existiert; dann setzen wir $\mathfrak{y}_i = \mathfrak{x}_{j(i)}$, wählen einen Index $m = m(i)$, so daß $(A_i \mathfrak{y}_i)_m$ nicht existiert, und setzen $B_i = (b_{nk}^{(i)})$, wobei $b_{nk}^{i} = a_{mk}^{(i)}$ für $0 \leq k \leq m$ und $=0$ sonst. Können wir zeigen, daß es ein $\mathfrak{y}$ gibt, das von A, aber von keinem B_i limitiert wird, so ist mit $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ der Satz bewiesen. Ist nämlich $A_i \neq B_i$, so bedeutet die Nicht-B_i-Limitierbarkeit von $\mathfrak{x}$ die Nichtexistenz von $(A_i \mathfrak{x})_m$.

Die Existenz von $\mathfrak{y}$ folgt, wenn wir den Satz als bewiesen ansehen und auf die B_i und $\mathfrak{y}_i$ anwenden. Dabei ist bekannt, daß $B_i \mathfrak{y}_j$ stets existiert. Es genügt daher, den entsprechenden Sonderfall des Satzes zu beweisen.

2. Dementsprechend setzen wir jetzt zusätzlich voraus, daß $A_i \mathfrak{x}_j$ für $i, j = 0, 1, \ldots$ existiert. Außerdem setzen wir voraus[1]), daß für jedes i entweder $A_i \mathfrak{x}_j$ für jedes einzelne j beschränkt (i heißt dann von erster Art) oder $A_i \mathfrak{x}_i$ unbeschränkt (i heißt dann von zweiter Art) ist. Für das gesuchte $\mathfrak{x}$ machen wir den Ansatz

$$\mathfrak{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \mathfrak{x}_i. \tag{1}$$

Wir sichern die Existenz von $\mathfrak{x}$, indem wir die α_i den abzählbar vielen Bedingungen

$$\alpha_i = O(2^{-i}[1 + |x_n^{(i)}|]^{-1}) \quad \text{für} \quad i \to \infty \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

unterwerfen. Weiter sichern wir die Existenz von $A\mathfrak{x}$ und zugleich die Gleichung

$$A\mathfrak{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i A \mathfrak{x}_i. \tag{2}$$

Dazu beschränken wir uns zunächst auf $(A\mathfrak{x})_0$ und setzen

$$\alpha_i = O\left(2^{-i}\left[1 + \overline{\underset{l=0,1,\ldots}{\text{fin}}} \left|\sum_{k=0}^{l} a_{0k} x_k^{(i)}\right|\right]^{-1}\right) \quad \text{für} \quad i \to \infty \tag{3}$$

voraus. Für $l = 0, 1, \ldots$ konvergiert

$$\sum_{k=0}^{l} a_{0k}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x_k^{(i)}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \left(\sum_{k=0}^{l} a_{0k} x_k^{(i)}\right).$$

Die Reihe rechts konvergiert wegen (3) gleichmäßig in l; ihre Glieder besitzen für $l \to \infty$ Grenzwerte. Daraus folgt die Existenz von $(A\mathfrak{x})_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (A\mathfrak{x}_i)_0$. Indem wir die α_i abzählbar vielen weiteren O-Bedingungen unterwerfen, erzwingen wir die Existenz von $(A\mathfrak{x})_1, (A\mathfrak{x})_2, \ldots$ und (2). In gleicher Weise

[1]) Dies ist möglich: Ist $A_i \mathfrak{x}_j$ nicht für alle j, z.B. nicht für $j = j(i)$, beschränkt, so ersetzen wir $\mathfrak{x}_i$ durch $\mathfrak{x}_{j(i)}$.

sichern wir die Existenz von $A_j\,\mathfrak{x}$ und die Gleichung

$$A_j\,\mathfrak{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i\, A_j\,\mathfrak{x}_i \quad (j = 0, 1, \ldots).$$

Dazu sind die α_i abzählbar oft abzählbar vielen O-Bedingungen zu unterwerfen. Schließlich fordern wir noch

$$\alpha_i = O\left(2^{-i}\left[1 + \overline{\underset{n=0,1,\ldots}{\text{fin}}}\,|(A\,\mathfrak{x}_i)_n|\right]^{-1}\right) \quad \text{für} \quad i \to \infty,$$

so daß die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (A\,\mathfrak{x}_i)_n = (A\,\mathfrak{x})_n$ gleichmäßig in $n = 0, 1, \ldots$ konvergiert. Da die Reihenglieder für $n \to \infty$ Grenzwerte besitzen, existiert $\lim_{n\to\infty} (A\,\mathfrak{x})_n$.

Die aufgetretenen O-Bedingungen für die α_i denken wir uns in der Form $\alpha_i = O(\eta_{k\,i})$ für $i \to \infty$ $(k = 0, 1, \ldots)$ dargestellt $(\eta_{k\,i} > 0)$. Wir erfüllen sie insgesamt, indem wir fordern

$$|\alpha_i| < \beta_i \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \ldots \quad \text{mit} \quad \beta_i = \operatorname*{Min}_{k=0,\ldots,i} \eta_{k\,i}. \tag{4}$$

Die Wahl der α_i hat nun noch so zu geschehen, daß $\mathfrak{x}$ von keinem A_i limitiert wird. Wir konstruieren eine brauchbare Folge α_i durch Induktion. Dabei denken wir uns (4) berücksichtigt (was ohne Widerspruch möglich sein wird) und erwähnen dies im folgenden nicht mehr. Zur Abkürzung setzen wir

$$\mathfrak{z}_{j\,k} = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i\, A_j\,\mathfrak{x}_i \quad (j, k = 0, 1, \ldots).$$

3. Nach Ausführung des i-ten Induktionsschrittes $(i = 0, 1, \ldots)$ sollen die folgenden Gegebenheiten vorliegen[2]):

Für jedes j $(0 \leq j \leq i)$ von erster Art ist $\mathfrak{z}_{jj}$ beschränkt und divergent, sind zwei verschiedene Häufungswerte von $z_n^{(jj)}$ mit der Differenz d_j ausgezeichnet und gilt im Fall $j < i$

$$|\alpha_k| < \tfrac{1}{3}\, 2^{j-k} |d_j| \left(1 + \overline{\underset{n=0,1,\ldots}{\text{fin}}}\,|(A_j\,\mathfrak{x}_k)_n|\right)^{-1} \tag{5}$$

für $k = j+1, \ldots, i$. Für jedes j $(0 \leq j \leq i)$ von zweiter Art sind $\mathfrak{z}_{jj}, \mathfrak{z}_{j,j+1}, \ldots, \mathfrak{z}_{ji}$ unbeschränkt, liegen Indizes $n(j, 0), n(j, 1), \ldots, n(j, i-j)$ vor, gilt

$$|z_{n(j,l)}^{(j,j+l)}| > l + 1 \tag{6}$$

für $l = 0, \ldots, i-j$, und ist im Fall $j < i$

$$|\alpha_k| < 2^{j-k+l} \left(1 + |(A_j\,\mathfrak{x}_k)_{n(j,l)}|\right)^{-1} \tag{7}$$

für $k = j+l+1, \ldots, i$ und $l = 0, \ldots, i-j-1$.

Beim $(i+1)$-ten Schritt wählen wir α_{i+1} und fordern dabei zunächst, daß (5) mit $k = i+1$ gilt, falls j $(0 \leq j \leq i)$ von erster Art, bzw. daß (7) mit $k = i+1$ für $l = 0, \ldots, i-j$ gilt, falls j $(0 \leq j \leq i)$ von zweiter Art ist. Weiter

[2]) Die Existenz dieser Gegebenheiten im Fall $i = 0$ ist leicht zu erkennen.

wählen wir α_{i+1} so, daß $\delta_{i+1,\,i+1}$ divergent (unbeschränkt) ist, falls $i+1$ von erster (zweiter) Art ist; dies läßt sich wegen der Divergenz (Unbeschränktheit) von $A_{i+1}\mathfrak{x}_{i+1}$ durch Vermeiden höchstens eines Ausnahmewertes erreichen[3]). Ähnlich richten wir es, indem wir höchstens $i+1$ weitere Ausnahmewerte vermeiden, noch so ein, daß $\delta_{j,\,i+1}$ unbeschränkt ist, falls j $(0\leq j\leq i)$ von zweiter Art ist. Schließlich wählen wir, falls $i+1$ von erster Art ist, zwei verschiedene Häufungswerte von $z_n^{(i+1,\,i+1)}$ mit der Differenz d_{i+1} und zu jedem j $(0\leq j\leq i+1)$ von zweiter Art einen Index $n(j, i-j+1)$, so daß (6) mit $l=i-j+1$ gilt.

Die oben aufgezählten, nach Beendigung des i-ten Schrittes vorliegenden Gegebenheiten liegen nun in entsprechender Weise nach Beendigung des $(i+1)$-ten Schrittes vor. Damit sind die α_i konstruiert.

Ist j $(=0, 1, \ldots)$ von erster Art, so gilt (5) für $k=j+1, j+2, \ldots$; daher ist

$$|(A_j\mathfrak{x})_n - z_n^{(j\,j)}| = \left|\sum_{i=j+1}^{\infty}\alpha_i(A_j\mathfrak{x}_i)_n\right| \leq \tfrac{1}{8}|d_j|,$$

somit $A_j\mathfrak{x}$ divergent. Ist j von zweiter Art, so gilt (6) für $l=0, 1, \ldots$, (7) für $k=j+l+1, j+l+2, \ldots$ und $l=0, 1, \ldots$; daher ist

$$|(A_j\mathfrak{x})_{n(j,\,l)} - z_{n(j,\,l)}^{(j,\,j+l)}| = \left|\sum_{i=j+l+1}^{\infty}\alpha_i(A_j\mathfrak{x}_i)_{n(j,\,l)}\right| \leq 1,$$

somit $|(A_j\mathfrak{x})_{n(j,\,l)}|>l$, also $A_j\mathfrak{x}$ divergent.

Anwendungen.

1. Gegeben sei eine Klasse von Matrixverfahren A_α, die für gewisse reelle Ordnungen α definiert sind; für $\alpha>\beta$ sei $\mathfrak{A}_\alpha\supset\mathfrak{A}_\beta$, $\mathfrak{A}_\alpha\neq\mathfrak{A}_\beta$. Zu jeder Ordnung γ gibt es dann ein $\mathfrak{x}$, das von A_γ, aber von keinem A_α mit $\alpha<\gamma$ limitiert wird. Bei speziellen Verfahren wie den CESÀROschen Verfahren C_k, den HÖLDERschen Verfahren H_k oder den EULER-KNOPPschen Verfahren E_k sind entsprechende Beispiele schon lange bekannt. Eine leichte Variante unseres Satzes liefert Ergebnisse wie: Es gibt eine Abel-limitierbare Folge $\mathfrak{x}$, die von keinem C_k $(k\geq 0)$ limitiert wird (was ebenfalls bekannt ist).

2. Wir zeigen, *daß das Verfahren* $H=\bigcup_{k\geq 0}H_k$ *keinem Matrixverfahren äquivalent ist.* Dazu setzen wir $\mathfrak{x}_0=((-1)^n)$ und $\mathfrak{x}_j=(H_1^{-1})^j\mathfrak{x}_0$ für $j=1, 2, \ldots$. Dann ist $\mathfrak{x}_i$ nicht H_i-, aber H_{i+1}-, also H-limitierbar $(i=0, 1, \ldots)$. Wäre H einem Matrixverfahren äquivalent, so gäbe es nach unserem Satz ein $\mathfrak{x}$, das H-, für kein i aber H_i-limitierbar ist; das ist unmöglich.

Auf die gleiche Weise zeigt man, daß die Verfahren $C=\bigcup_{k\geq 0}C_k$, $E=\bigcup_{k\geq 0}E_k$ und noch weitere, auch allgemeinere Vereinigungsverfahren nicht mit einem Matrixverfahren äquivalent sind.

[3]) Ist nämlich v_n eine beliebige, w_n eine divergente (unbeschränkte) Folge $(n=0, 1, \ldots)$, und sind $v_n+\alpha' w_n$ und $v_n+\alpha'' w_n$ konvergent (beschränkt), so ist $\alpha'=\alpha''$.

3. Die Folge $\mathfrak{x}$ heißt C_∞-limitierbar, wenn die Kerne $\mathfrak{K}_k$ ihrer C_k-Transformierten ($k \geq 0$) für $k \to \infty$ auf einen endlichen Punkt zusammenschrumpfen. Analog sind die Verfahren H_∞ und E_∞ definiert (vgl. V. GARTEN und K. KNOPP [1937]). Nach J. E. LITTLEWOOD [1935] ist C_∞ äquivalent mit C. *Also ist C_∞ keinem Matrixverfahren äquivalent.* (Auf diesen Beweisweg hat uns auch Herr G. LORENTZ hingewiesen.)

Wir zeigen nun, daß E und E_∞ äquivalent sind. Daraus folgt, *daß E_∞ keinem Matrixverfahren äquivalent ist.* Selbstverständlich gilt $\mathfrak{E} < \mathfrak{E}_\infty$, es braucht also nur noch $\mathfrak{E}_\infty < \mathfrak{E}$ bewiesen zu werden. $\mathfrak{x}$ sei E_∞-limitierbar. Dann ist $\mathfrak{x}$ einerseits E_l-beschränkt für ein gewisses $l > 0$, andererseits B-(d.h. Borel-) limitierbar, da der B-Kern von $\mathfrak{x}$ in jedem E_k-Kern enthalten ist. Wegen der Existenz von $B\bar{\mathfrak{x}}$ bei $\bar{\mathfrak{x}} = (|x_n|)$ gilt für $y = x/2^l > 0$ die bekannte und leicht zu verifizierende Beziehung

$$e^{-y}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{y^\nu}{\nu!}x_\nu = e^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^\nu}{\nu!}\left(\frac{1}{2^{l\nu}}\sum_{\mu=0}^{\nu}\binom{\nu}{\mu}(2^l-1)^{\nu-\mu}x_\mu\right),$$

aus der man die B-Limitierbarkeit der Folge $E_l\mathfrak{x}$ abliest. Eine beschränkte B-limitierbare Folge ist aber E_1-limitierbar[4]; somit ist $E_1(E_l\mathfrak{x}) = E_{l+1}\mathfrak{x}$ konvergent, d.h. $\mathfrak{x}$ ist E-limitierbar.

4. *Daß H_∞ keinem Matrixverfahren äquivalent ist,* läßt sich nicht so wie bei C_∞ und E_∞ beweisen, weil H und H_∞ nicht äquivalent sind. Wäre nämlich $\mathfrak{H}_\infty < \mathfrak{H}$, so wäre $\mathfrak{H}_\infty$ im Wirkfeld des ABELschen Verfahrens enthalten, was nach V. GARTEN und K. KNOPP [1937] nicht richtig ist. Wir kommen jedoch mit Hilfe des folgenden Satzes zum Ziel:

A und A_i seien Matrizen ($i = 0, 1, \ldots$). Zu jedem i gebe es ein $\mathfrak{x}_i$, das A-limitierbar, aber nicht A_i-beschränkt ist. Dann gibt es ein $\mathfrak{x}$, das A-limitierbar, für kein i aber A_i-beschränkt ist.

Den Beweis entnehmen wir mit einigen selbstverständlichen Modifikationen dem Beweis des Hauptsatzes, wobei die Verhältnisse jetzt insofern etwas einfacher liegen, als nur Indizes von zweiter Art auftreten.

Wir setzen $\mathfrak{x}_0 = \{1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, \ldots\}$ und $\mathfrak{x}_j = (H_1^{-1})^j\mathfrak{x}_0$ für $j = 1, 2, \ldots$. Dann ist $\mathfrak{x}_i$ nicht H_i-beschränkt, aber H_{i+1}-, also H_∞-limitierbar ($i = 0, 1, \ldots$). Wäre nun H_∞ einem Matrixverfahren äquivalent, so gäbe es nach dem zuletzt formulierten Satz ein $\mathfrak{x}$, das H_∞-limitierbar, für kein i aber H_i-beschränkt ist; dies ist unmöglich.

Literatur.

Inäquivalenzsätze in unserem Sinn wurden in folgenden Arbeiten bewiesen: G. LORENTZ [1941], [1948] (für die Fastkonvergenz), B. KUTTNER [1946] (für starke Summierbarkeit), W. H. J. FUCHS [1950] (für die Vereinigung aller HAUSDORFF-Verfahren), K. ZELLER [1951], [1952] (für Vereinigung und Durchschnitt von Verfahren).

[4]) Vgl. z.B. W. MEYER-KÖNIG [1950], S. 299, Satz 25.

BANACH, S., u. H. STEINHAUS: Sur le principe de la condensation de singularités. Fundamenta Math. **9**, 50—61 (1927). — FUCHS, W. H. J.: On the "collective Hausdorff method". Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 66—70 (1950). — GARTEN, V., u. K. KNOPP: Ungleichungen zwischen Mittelwerten von Zahlenfolgen und Funktionen. Math. Z. **42**, 365—388 (1937). — KNOPP, K.: Folgenräume und Limitierungsverfahren. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. **11**, H. 3—4, 1—30 (1952). — KUTTNER, B.: Note on strong summability. J. London Math. Soc. **21**, 118—122 (1946). — LITTLEWOOD, J. E.: Note on the preceding paper. J. London Math. Soc. **10**, 309—310 (1935). — LORENTZ, G.: Natürliche Konvergenz (Russisch). Zapiski Univ. Leningrad, Math. Ser. **12**, 30—41 (1941). — A contribution to the theory of divergent sequences. Acta math. **80**, 167—190 (1948). — MEYER-KÖNIG, W.: Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren. Math. Z. **52**, 257—304 (1950). — ZELLER, K.: Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. **53**, 463—487 (1951). — Abschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math. Z. **55**, 55—70 (1952).

Stuttgart, Liststr. 51.
Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 10. Juni 1953.)

ROSE, A.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 206—210 (1953)

Fragments of the m-valued propositional calculus.

By
ALAN ROSE.

HENKIN has developed[1]) a method by which any fragment of the 2-valued propositional calculus can be formalised, provided that material implication can be defined in terms of the primitives. The object of the present paper is to extend this method to the m-valued propositional calculus with one designated truth-value. The only assumption we shall make about the primitives is that the implication function of POST[2]) and ŁUKASIEWICZ[3]) is definable in terms of them. We shall denote the truth-values by $1, 2, \ldots, m$; 1 being the designated truth-value. If $X, Y, X \to Y$ take the truth-values $x, y, f(x, y)$ respectively then $f(x, y) = \max(1, 1 - x + y)$. Let the primitive functions be $F_1(X_1, X_2, \ldots, X_{\beta_1})$, $F_2(X_1, X_2, \ldots, X_{\beta_2}), \ldots, F_b(X_1, X_2, \ldots, X_{\beta_b})$ and let us suppose that if $\alpha = \max(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_b)$ and $X_1, X_2, \ldots, X_\alpha$ take the truth-values $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$ respectively then $F_i(X_1, X_2, \ldots, X_{\beta_i})$ takes the truth-value $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{\beta_i})$ $(i = 1, 2, \ldots, b)$.

As in a previous paper of the author[4]) we shall define the functions $\twoheadrightarrow_i$ by

$$\mathfrak{A} \twoheadrightarrow_1 \mathfrak{B} =_{\text{df.}} \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{A} \twoheadrightarrow_{i+1} \mathfrak{B} =_{\text{df.}} \mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \twoheadrightarrow_i \mathfrak{B}).$$

Thus when $\mathfrak{A}$ takes the truth-value 1 $\mathfrak{A} \twoheadrightarrow_{m-2} \mathfrak{B}$ takes the same truth-value as $\mathfrak{B}$, when $\mathfrak{A}$ takes the truth-value 2 and $\mathfrak{B}$ takes the truth-value m $\mathfrak{A} \twoheadrightarrow_{m-2} \mathfrak{B}$ takes the truth-value 2 and in all other cases $\mathfrak{A} \twoheadrightarrow_{m-2} \mathfrak{B}$ takes the truth-value 1.

ŁUKASIEWICZ defined[5]) alternation by

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} =_{\text{df.}} (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to \mathfrak{B}.$$

Thus if $X, Y, X \vee Y$ take the truth-values $x, y, g(x, y)$ respectively

$$g(x, y) = \min(x, y).$$

Next we define the function $\uparrow$ by

$$\mathfrak{A} \uparrow \mathfrak{B} =_{\text{df.}} (\mathfrak{A} \twoheadrightarrow_{m-2} \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{A}.$$

---

[1]) HENKIN, LEON: Fragments of the propositional calculus. J. Symb. Logic. **14**, 42—48 (1949).

[2]) POST, EMIL L.: Introduction to a general theory of elementary propositions. Amer. J. Math. **43**, 163—185 (1921).

[3]) ŁUKASIEWICZ, JAN, and ALFRED TARSKI: Untersuchungen über den Aussagenkalkül. C. R. Soc. Sci. Lett. Varsovie, Cl. III **23**, 30—50 (1930).

[4]) ROSE, ALAN: The degree of completeness of the m-valued Łukasiewicz propositional calculus. J. London Math. Soc. **27**, 92—102 (1952).

[5]) l. c.

Thus $X \uparrow Y$ takes the truth-value 1 except when X takes the truth-value 2 and Y takes the truth-value m in which case $X \uparrow Y$ takes the truth-value 2. We shall omit brackets from $\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C}$ when such a formula is connected to another by $\rightarrow$ or by $\twoheadrightarrow_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

We then define the functions V_{i1}, V_{i2} $(i = 1, 2, \ldots, m)$ by

$$V_{11}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) =_{\text{df.}} V_{12}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) =_{\text{df.}} \mathfrak{A} \vee (\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C})$$

$$V_{21}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) =_{\text{df.}} (\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{A}) \vee (\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C})$$

$$V_{22}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) =_{\text{df.}} (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C}) \vee (\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C})$$

$$V_{i1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) =_{\text{df.}} (\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C} \twoheadrightarrow_{i-1} \mathfrak{A}) \vee (\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C}) \qquad (i = 3, 4, \ldots, m)$$

$$V_{i2}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) =_{\text{df.}} ((\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C} \twoheadrightarrow_{i-2} \mathfrak{A}) \rightarrow \mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C}) \vee (\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C}) \qquad (i = 3, 4, \ldots, m).$$

Thus, unless Y takes the truth-value 2 and Z takes the truth-value m $V_{i1}(X, Y, Z)$ and $V_{i2}(X, Y, Z)$ take the truth-value 1. If Y takes the truth-value 2 and Z takes the truth-value m one of the formulae $V_{i1}(X, Y, Z)$, $V_{i2}(X, Y, Z)$ takes the truth-value 2 unless X takes the truth-value i, in which case $V_{i1}(X, Y, Z)$ and $V_{i2}(X, Y, Z)$ both take the truth-value 1. Thus the V-functions bear a certain similarity to the J-functions of ROSSER and TURQUETTE [6]).

We shall normally omit the suffix from the implication function $\twoheadrightarrow_{m-1}$. This function satisfies the "standard conditions" of ROSSER and TURQUETTE [7]).

We shall also use the summation symbol Γ of ROSSER and TURQUETTE [8]). This is defined by

$$\overset{c}{\underset{i=a}{\Gamma}} \mathfrak{A}_i \mathfrak{B} =_{\text{df.}} \mathfrak{B} \qquad (c < a)$$

$$\overset{c}{\underset{i=a}{\Gamma}} \mathfrak{A}_i \mathfrak{B} =_{\text{df.}} \mathfrak{A}_c \twoheadrightarrow \left(\overset{c-1}{\underset{i=a}{\Gamma}} \mathfrak{A}_i \mathfrak{B} \right) \qquad (c \geq a).$$

We shall use the axiom schemes

A1 $$((\mathfrak{A} \twoheadrightarrow \mathfrak{B}) \twoheadrightarrow \mathfrak{C}) \twoheadrightarrow ((\mathfrak{C} \twoheadrightarrow \mathfrak{A}) \twoheadrightarrow (\mathfrak{D} \twoheadrightarrow \mathfrak{A}))$$

A2 $$\overset{m}{\underset{i=1}{\Gamma}} (V_{i1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \twoheadrightarrow (V_{i2}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \twoheadrightarrow \mathfrak{D})) \mathfrak{D}$$

A3 $$\overset{\beta_i}{\underset{j=1}{\Gamma}} V_{kj1}(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \overset{\beta_i}{\underset{j=1}{\Gamma}} V_{kj2}(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) V_{\lambda 1}(F_i(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{\beta_i}), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$

where $\lambda = f_i(k_1, k_2, \ldots, k_{\beta_i})$ and $i = 1, 2, \ldots, b$.

A4 $$\overset{\beta_i}{\underset{j=1}{\Gamma}} V_{kj1}(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \overset{\beta_i}{\underset{j=1}{\Gamma}} V_{kj2}(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) V_{\lambda 2}(F_i(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{\beta_i}), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$

where $\lambda = f_i(k_1, k_2, \ldots, k_{\beta_i})$ and $i = 1, 2, \ldots, b$.

[6]) ROSSER, J. B., and A. R. TURQUETTE: Many-valued Logics, S. 18. Amsterdam: North Holland Publishing Co. 1952.

[7]) l. c., S. 26.

[8]) l. c., S. 33.

Each of the schemes A3, A4 is really a set of $\sum_{i=1}^{b} m^{\beta_i}$ axiom schemes. The rules of procedure are

(α) If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{A} \to\!\!\!\!\to \mathfrak{B}$ then $\mathfrak{B}$.

(β) If $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{C}$ are distinct propositional variables which do not occur in $\mathfrak{A}$ and $V_{11}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ is a theorem then $\mathfrak{A}$ is a theorem.

ŁUKASIEWICZ has shown [9]) that the axiom scheme A1 and Rule (α) give a complete formalisation of the 2-valued propositional calculus if the only primitive is material implication denoted by $\to\!\!\!\!\to$. It follows at once that in the present system we can prove the following Deduction Theorem.

Theorem 1. *If $\mathfrak{B}$ can be deduced from $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ without using Rule (β) then $\mathfrak{A}_n \to\!\!\!\!\to \mathfrak{B}$ can be deduced from $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1}$ without using Rule (β)* ($n = 1, 2, \ldots$).

We shall now prove

Theorem 2. *The formalisation is weakly complete.*

Lemma. *If when $X_1, X_2, \ldots, X_n$ take the truth-values $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectively the formula $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ takes the truth-value $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ then if $\mu = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $V_{\mu 1}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ and $V_{\mu 2}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ are deducible from $V_{x_1 1}(X_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}), V_{x_1 2}(X_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}), V_{x_2 1}(X_2, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}), V_{x_2 2}(X_2, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}), \ldots, V_{x_n 1}(X_n, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}), V_{x_n 2}(X_n, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$.*

Let N be the sum of the number of (not necessarily distinct) functions and the number of (not necessarily distinct) propositional variables occurring in $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. We shall prove the lemma by strong induction on N. If $N = 1$ the lemma is trivial.

We now assume the lemma for $1, 2, \ldots, N$ and prove it for $N+1$. Then $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ is of the form

$$F_i\big(\Psi_1(X_1, X_2, \ldots, X_n),\ \Psi_2(X_1, X_2, \ldots, X_n), \ldots, \Psi_{\beta_i}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\big),$$

where $1 \leq i \leq b$ and the corresponding sum for $\Psi_\nu(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ is not greater than N ($\nu = 1, 2, \ldots, \beta_i$). It follows from our induction hypothesis that if under this assignment of truth-values $\Psi_\nu(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ takes the truth-value λ_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, \beta_i$) then the formulae

$$V_{\lambda_1 1}\big(\Psi_1(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}\big),$$

$$V_{\lambda_1 2}\big(\Psi_1(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}\big),\ V_{\lambda_2 1}\big(\Psi_2(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}\big),$$

$$V_{\lambda_2 2}\big(\Psi_2(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}\big), \ldots, V_{\lambda_{\beta_i} 1}\big(\Psi_{\beta_i}(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}\big),$$

$$V_{\lambda_{\beta_i} 2}\big(\Psi_{\beta_i}(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}\big)$$

are provable. But

$$\mu = f_i(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\beta_i}).$$

[9]) ŁUKASIEWICZ, JAN: The shortest axiom of the implicational calculus of propositions. Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A **52**, 25—33 (1948).

Hence the formulae

$$\prod_{j=1}^{\beta_i} V_{\lambda j 1}(\Psi_j(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \prod_{j=1}^{\beta_i} V_{\lambda j 2}(\Psi_j(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \\ V_{\mu 1}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}),$$

$$\prod_{j=1}^{\beta_i} V_{\lambda j 1}(\Psi_j(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \prod_{j=1}^{\beta_i} V_{\lambda j 2}(\Psi_j(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \\ V_{\mu 2}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$

are instances of A3, A4 respectively. Applying Rule (α) $2\beta_i$ times in each case we deduce $V_{\mu 1}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ and $V_{\mu 2}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$. Thus the lemma is proved.

Proof of the Main Theorem. We define the summation symbol Ξ by

$$\sum_{i=a}^{c} \mathfrak{A}_i \mathfrak{B}_i \mathfrak{C} =_{\text{df.}} \mathfrak{C} \qquad (c < a)$$

$$\sum_{i=a}^{c} \mathfrak{A}_i \mathfrak{B}_i \mathfrak{C} =_{\text{df.}} \mathfrak{A}_c \to\!\!\to \left(\mathfrak{B}_c \to\!\!\to \left(\sum_{i=a}^{c-1} \mathfrak{A}_i \mathfrak{B}_i \mathfrak{C}\right)\right) \qquad (c \geq a).$$

It follows from the lemma and Theorem 1 that if $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ always takes the truth-value 1 then we can prove the m^n formulae

$$\sum_{j=1}^{n} V_{x_j 1}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{x_j 2}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{11}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}).$$

We shall now show that $V_{11}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ is provable. It follows from the above that for each of the m^{n-1} sets of values of $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ the formulae

$$V_{x_n 1}(X_n, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \to\!\!\to \left(V_{x_n 2}(X_n, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \to\!\!\to \sum_{j=1}^{n-1} V_{x_j 1}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{x_j 2}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\right.$$
$$\left. V_{11}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\right) \qquad (x_n = 1, 2, \ldots, m)$$

are provable. But the formula

$$\prod_{i=1}^{m}\Big(V_{i1}(X_n, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \to\!\!\to \Big(V_{i2}(X_n, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \to\!\!\to \sum_{j=1}^{n-1} V_{xj1}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{xj2}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$
$$V_{11}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\Big)\Big) \sum_{j=1}^{n-1} V_{xj1}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{xj2}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$
$$V_{11}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$

is an instance of A2. Applying Rule (α) m times we deduce

$$\sum_{j=1}^{n-1} V_{xj1}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{xj2}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{11}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}).$$

Thus we have deduced the m^{n-1} formulae of the form

$$\sum_{j=1}^{n-1} V_{xj1}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{xj2}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{11}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$

from the m^n formulae of the form

$$\sum_{j=1}^{n} V_{x_j 1}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{x_j 2}(X_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\, V_{1\,1}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C}).$$

After a further $n-2$ applications of the above process we deduce

$$V_{x_1 1}(X_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \twoheadrightarrow \left(V_{x_1 2}(X_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \twoheadrightarrow V_{1\,1}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\right)$$
$$(x_1 = 1, 2, \ldots, m).$$

After a final use of A 2 we deduce $V_{1\,1}(\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$. Thus if we choose for $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ distinct propositional variables not occurring in $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ we can deduce $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ by means of Rule (β). Hence the theorem is proved.

Theorem 3. *If the axiom schemes are replaced by the corresponding axioms and a substitution rule is added the resulting formalisation is strongly complete.*

We define the propositional functions Φ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ by

$$\Phi_i(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) =_{\text{df.}} \mathfrak{A} \twoheadrightarrow_{m-i} \mathfrak{B} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1)$$
$$\Phi_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) =_{\text{df.}} \mathfrak{B}.$$

Thus when X takes the truth-value 2 and Y takes the truth-value m $\Phi_i(X, Y)$ takes the truth-value i.

Suppose that we adjoin to the axioms the formula $\zeta(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ which takes an undesignated truth-value when $X_1, X_2, \ldots, X_n$ take the truth-values $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectively. Let $\mathfrak{A}$ denote any formula of the system and let $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ denote distinct propositional variables which do not occur in $\mathfrak{A}$. Let us substitute $\Phi_{x_i}(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ for X_i in $\zeta(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ and let us denote the formula thus deduced by $\Omega(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$. Then $\Omega(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ takes an undesignated truth-value when $\mathfrak{B}$ takes the truth-value 2 and $\mathfrak{C}$ takes the truth-value m. Thus the formula

$$\Omega(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \twoheadrightarrow V_{1\,1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$

is provable in view of the weak completeness. Applying Rule (α) we deduce $V_{1\,1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$. Applying Rule (β) we then deduce $\mathfrak{A}$. Thus the theorem is proved.

Dept. of Mathematics, The University, Nottingham (England).

(Eingegangen am 21. März 1953.)

STALLMANN, F.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 211—230 (1953)

Konforme Abbildung gewisser Kreisbogenvierecke als Eigenwertproblem.

Von
FRIEDEMANN STALLMANN.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit ist eine etwas veränderte und erweiterte Fassung der Diplomarbeit, die der Verfasser 1949 bei Herrn F. LÖSCH in Stuttgart anfertigte. Den Ausgangspunkt bildete eine Arbeit von Herrn E. ULLRICH[1]).

Gestellt war die Aufgabe, einen Parallelstreifen mit Halbkreiskerbe konform auf die obere Halbebene abzubilden (Fig. 1). Bei der Durchführung

Fig. 1.

Fig. 2.

dieser Aufgabe ergab es sich, daß mit den benutzten Methoden auch eine allgemeinere Klasse von Bereichen, nämlich der Winkelraum mit Halbkreiskerbe behandelt werden kann (Fig. 2). Der Parallelstreifen mit Halbkreiskerbe ergab sich hieraus als ein Spezialfall. Die genannten Bereiche sind Kreisbogenvierecke und die gesuchte Abbildungsfunktion erhält man in bekannter Weise über die Integration einer LAMÉschen Differentialgleichung. Es konnten hier die Ideen von F. KLEIN betreffend die geometrische Deutung gewisser Eigenwertprobleme eine recht fruchtbare Anwendung finden. Es ist anzunehmen, daß diese Gedanken auch noch für weitere, ähnlich gelagerte Abbildungsprobleme von Nutzen sein können und wir werden hier etwas ausführlicher darauf eingehen, als es im Zusammenhang mit der gestellten Aufgabe vielleicht nötig wäre.

§ 1. Aufstellung und geometrische Deutung der Eigenwertprobleme.

F. KLEIN hat gezeigt, daß gewisse Eigenwertprobleme, die im Zusammenhang mit der LAMÉschen Differentialgleichung auftraten, sich an Hand der konformen Abbildung von Kreisbogenpolygonen leicht geometrisch deuten lassen[2]). Es werden bei diesen Eigenwertaufgaben die Randbedingungen für solche Randpunkte vorgeschrieben, die singuläre Stellen der zugehörigen

[1]) ULLRICH, E.: „Konforme Abbildung eines Streifens mit Halbkreiskerbe." Z. angew. Math. Mech. **25/27**, 133 (1947).

[2]) KLEIN, F.: Ges. Werke II, S. 540. Gött. Nachr. **1890**.

Differentialgleichung sind. Sei also etwa

$$y'' + p(x)\,y' + [q(x) + \lambda\, g(x)]\,y = 0 \tag{1}$$

die gegebene Differentialgleichung mit für reelle x reellwertigen Koeffizienten $p(x)$, $q(x)$, $g(x)$. Sie habe an den Stellen $x = e_1$ und $x = e_2$ außerwesentliche Singularitäten mit den reellen charakteristischen Exponenten $\alpha_\nu \geq \beta_\nu$ $(\nu = 1, 2)$, die nicht von λ abhängen sollen. Es gibt also zu den Stellen e_ν je ein System von sog. *kanonischen* Lösungen der Differentialgleichung (1), die in der Umgebung dieser Stellen in Potenzreihen folgender Art entwickelt werden können[3]):

$$y_1^{(\nu)} = (x - e_\nu)^{\sigma_\nu}\,(1 + a_1(x - e_\nu) + a_2(x - e_\nu)^2 + \cdots)$$

$$y_2^{(\nu)} = C\,y_1^{(\nu)} \log(x - e_\nu) + (x - e_\nu)^{\beta_\nu}\,(1 + b_1(x - e_\nu) + \cdots),$$

wobei die Konstante C im logarithmischen Glied von $y_2^{(\nu)}$ nur dann $\neq 0$ ist, wenn $\delta_\nu = \alpha_\nu - \beta_\nu$ eine ganze Zahl ist. Das ganze übrige Intervall $e_1 < x < e_2$ sei frei von singulären Stellen der Differentialgleichung (1). Man kann dann vorschreiben, daß die Lösungen von (1) in den Randpunkten dieses Intervalls proportional zu gewissen der *kanonischen* Lösungen sein sollen, und solche Eigenwerte λ zu bestimmen suchen, für die derartige Lösungen existieren. In Betracht kommen vor allem die folgenden *Randbedingungen*:

1). y proportional zu $y_1^{(1)}$ in der Umgebung von e_1 und proportional zu $y_1^{(2)}$ in der Umgebung von e_2, d.h. es muß sein:

$$y_1^{(1)} = k\,y_1^{(2)} \quad \text{mit einer geeigneten Konstante } k.$$

2a). y in e_1 proportional zu $y_2^{(1)}$, in e_2 proportional zu $y_1^{(2)}$, d.h.

$$y_2^{(1)} = k\,y_1^{(2)}.$$

2b). y in e_1 proportional zu $y_1^{(1)}$, in e_2 proportional zu $y_2^{(2)}$, d.h.

$$y_1^{(1)} = k\,y_2^{(2)}.$$

3). y in e_1 proportional zu $y_2^{(1)}$, in e_2 proportional zu $y_2^{(2)}$, d.h.

$$y_2^{(1)} = k\,y_2^{(2)}.$$

Ferner soll die Eigenfunktion y im Intervall $e_1 < x < e_2$ eine vorgeschriebene Anzahl von n Nullstellen $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ besitzen. Es ist hierdurch der Eigenwert λ eindeutig bestimmt. Untersuchungen über die Lösbarkeit dieser Eigenwertprobleme findet man bei BÔCHER[4]). In unseren nachher zu diskutierenden Spezialfällen wird sich die Existenz der Eigenwerte und Eigenfunktionen direkt ergeben, so daß wir hier nicht näher darauf einzugehen brauchen.

---

[3]) Siehe etwa SCHLESINGER, L.: Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichung auf funktionentheoretischer Grundlage, S. 162. Berlin u. Leipzig 1922.

[4]) BÔCHER, M.: Enz. math. Wiss. II (Analysis) 1,1, S. 447 und die dort angegebene Literatur.

Singularitäten wie die eben diskutierten spielen eine besondere Rolle bei der konformen Abbildung von Kreisbogenpolygonen. Man wird hier auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung der FUCHSschen Klasse geführt, d.h. auf Differentialgleichungen, die in der vollen x-Ebene einschließlich des Punktes $x=\infty$ höchstens Singularitäten der genannten Art besitzen. Sind die Koeffizienten einer solchen Differentialgleichung für reelle x reellwertig und sind die singulären Punkte e_ν sowie die zugehörigen Exponentendifferenzen $\delta_\nu=\alpha_\nu-\beta_\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$ reelle Größen, so bildet der Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen dieser Differentialgleichung $\eta=y_1/y_2$ die obere Halbebene $\Im(x)>0$ auf ein Kreisbogen-n-Eck ab. Die n-singulären Stellen $e_1, e_2, \ldots, e_n$ gehen dabei in die n Ecken des Polygons über, die dort Innenwinkel der Größe $\delta_\nu\pi$ einschließen. Umgekehrt gibt es zu jedem beliebigen Kreisbogenpolygon eine Differentialgleichung dieses Typus, mit deren Hilfe man das Abbildungsproblem lösen kann.

Es erhebt sich nun die Frage, welche Bedeutung die eben formulierten Randbedingungen für die Gestalt des zugehörigen Kreisbogenpolygons haben, wenn man sie auf Differentialgleichungen dieser Art anwendet. Wir wollen hierzu zunächst einige Festsetzungen treffen: Dem Intervall $e_1\leq x\leq e_2$ entspricht bei der konformen Abbildung durch $\eta(x)$ eine Polygonseite, die wir mit s_0 bezeichnen wollen; die links und rechts anschließenden Seiten bezeichnen wir mit s_{-1} und s_{+1}. Die den singulären Stellen e_1 und e_2 entsprechenden Ecken seien ε_1 und ε_2. Ist δ_1 keine ganze Zahl, so schneiden sich die Kreise, auf denen s_0 und s_{-1} liegen, außer in ε_1 noch in einem zweiten Punkt ε_1', den wir als die zu ε_1 gehörige „Gegenecke" bezeichnen wollen. Ebenso existiert zu ε_2 die Gegenecke ε_2', falls δ_2 keine ganze Zahl ist.

Wir betrachten nun den Quotienten der zu e_1 gehörigen kanonischen Lösungen

$$\eta^{(1)}=\frac{y_1^{(1)}}{y_2^{(1)}}.$$

Die Größen $(x-e_1)^{\alpha_1}$, $(x-e_1)^{\beta_1}$ und $\log(x-e_1)$ seien so festgelegt, daß $y_1^{(1)}$ und $y_2^{(1)}$ für $e_1<x<e_2$ reelle Werte annehmen. Dann ist $\eta^{(1)}(e_1)=\varepsilon_1=0$ und s_0 verläuft von $\varepsilon_1=0$ aus längs der positiv reellen Achse. Ist δ_1 keine ganze Zahl, so ist auch s_{-1} eine gerade Linie, die von ε_1 aus längs des Strahles $\arc\eta_2^{(1)}=\delta_1\pi$ läuft, und die Gegenecke zu ε_1 ist $\varepsilon_1'=\infty$. Entsprechend wird bei der Abbildung durch

$$\eta^{(2)}=\frac{y_1^{(2)}}{y_2^{(2)}} \quad \text{die Ecke} \quad \varepsilon_2=\eta^{(2)}(e_2)=0$$

und die zugehörige Gegenecke, wenn vorhanden, $\varepsilon_2'=\infty$.

Wir wollen nun zunächst diejenigen Eigenfunktionen der Probleme 1) bis 3) betrachten, die im Intervall $e_1<x<e_2$ keine Nullstellen besitzen. Wir untersuchen dann, in welcher Weise dieses Intervall durch $\eta^{(1)}(x)$ auf s_0 abgebildet wird und insbesondere wie die Ecken ε_1 und ε_2 zueinander liegen, falls eine der Randbedingungen 1) bis 3) erfüllt ist.

Bedingung 1). Es ist hier

$$\eta^{(1)} = \frac{y_1^{(1)}}{y_2^{(1)}} = \frac{k\, y_1^{(2)}}{c_1 y_1^{(2)} + c_2 y_2^{(2)}},$$

d.h. bei der Abbildung durch $\eta^{(1)}(x)$ wird $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = 0$. Da wegen

$$\frac{d\eta^{(1)}}{dx} = \frac{y_1^{(1)\prime} y_2^{(1)} - y_1^{(1)} y_2^{(1)\prime}}{y_2^{(1)\,2}} > 0$$

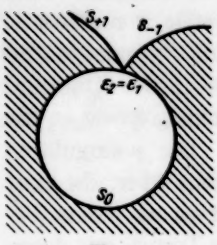

Fig. 3.

die reelle Achse von s_0 nur in einem Sinne durchlaufen wird und außerdem $y_1^{(1)}$ und damit auch $\eta^{(1)}$ keine weiteren Nullstellen für $e_1 < x < e_2$ besitzt, so ist s_0 gleich der genau einmal vollständig durchlaufenen reellen Achse. Kehren wir wieder zum Quotienten $\eta(x)$ zweier beliebiger linear unabhängiger Lösungen von (1) zurück, so wird die vollständig durchlaufene reelle Achse zu einem vollständig durchlaufenen Kreis. Es hat also das betrachtete Kreisbogenpolygon unabhängig von der speziellen Wahl des Quotienten $\eta(x)$ die Eigenschaft, daß seine Ecken ε_1 und ε_2 zusammenfallen und s_0 eine vollständige Kreisperipherie umfaßt (Fig. 3).

Bedingung 2a). Hier ist

$$\eta^{(1)} = \frac{y_1^{(1)}}{y_2^{(1)}} = \frac{c_1 \cdot y_1^{(2)} + c_2 \cdot y_2^{(2)}}{k \cdot y_1^{(2)}},$$

d.h. es wird $\varepsilon = \eta^{(1)}(e_2) = \infty$, s_0 läuft also, da $y_2^{(1)}$ für $e_1 < x < e_2$ keine Nullstellen haben soll und daher $\eta^{(1)}$ dort endlich bleibt, von $\varepsilon_1 = 0$ aus längs der positiv reellen Achse nach $\varepsilon_2 = \infty$. Wenn δ_1 keine ganze Zahl ist, was wir jetzt voraussetzen wollen, dann ist die Stelle $\eta^{(1)} = \infty$ gerade die Gegenecke ε_1' zu ε_1. Die Ecke ε_2 fällt also mit der Gegenecke ε_1' zusammen, und dies trifft natürlich unabhängig von der speziellen Wahl des Quotienten η zu. Das Kreisbogenpolygon ist hier also dadurch gekennzeichnet, daß die eine Seite s_0 das Stück des Kreisbogens zwischen Ecke ε_1 und Gegenecke ε_1' umfaßt (Fig. 4a).

Ganz Entsprechendes gilt für die

Bedingung 2b), nur daß hier ε_1 und ε_2 ihre Rollen vertauscht haben, daß hier also ε_1 mit der Gegenecke ε_2 zusammenfällt (Fig. 4b).

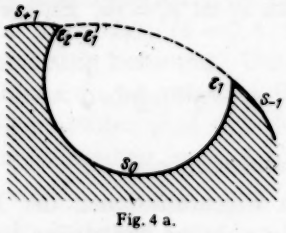

Fig. 4 a.

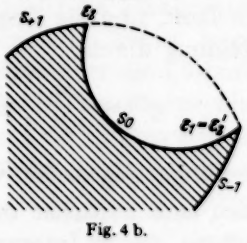

Fig. 4 b.

Bedingung 3). Hier ist

$$\eta^{(1)} = \frac{y_1^{(1)}}{y_2^{(1)}} = \frac{c_1 \cdot y_1^{(2)} + c_2 \cdot y_2^{(2)}}{k \cdot y_2^{(2)}} = \frac{c_1}{k}\,\eta^{(2)} + \frac{c_2}{k}.$$

Die Seite s_0 liegt also, wenn $y_2^{(1)}$ in $e_1 < x < e_2$ keine Nullstellen hat, ganz im Endlichen auf der positiv reellen Achse. Für die invariante Kennzeichnung des Kreisbogenpolygons ist es hier wesentlich, daß die beiden Gegenecken ε_1' und ε_2' zusammenfallen, falls diese Gegenecken existieren. Denn ε_2' liegt an der Stelle $\eta^{(2)} = \infty$ und das ist die Stelle $\eta^{(1)} = \infty$ d.h. ε_1'. Die Seite s_0 ist dann das Stück des Kreisbogens zwischen ε_1 und ε_2, das den Punkt $\varepsilon_1' = \varepsilon_2'$ nicht enthält (Fig. 5).

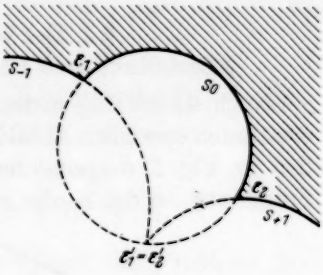

Fig. 5.

Hat die Eigenfunktion $y(x)$ im Intervall $e_1 < x < e_2$ noch n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) Nullstellen, dann muß s_0 bzw. die Punkte $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_1' = \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2'$, $\varepsilon_1' = \varepsilon_2'$ n-mal in seinem Inneren enthalten, was darauf hinauskommt, daß sich diese Seite noch zusätzlich n-mal überschlägt.

Von F. KLEIN und auf seine Anregung hin ist in vielfacher Weise versucht worden, diese Überlegungen dazu zu benutzen, die akzessorischen Parameter der Differentialgleichung zu bestimmen, wenn ein spezielles Kreisbogenpolygon vorgegeben ist. Bekanntlich enthält eine Differentialgleichung zweiter Ordnung der FUCHSschen Klasse mit n singulären Stellen eine gewisse Anzahl von Parametern, die beliebig gewählt werden können, ohne daß die Differentialgleichung aufhört, zu dieser Klasse zu gehören. Es sind dies einmal die $2n$ charakteristischen Exponenten, dann die Lage der n singulären Stellen, und dazu treten noch $n-3$ sog. *akzessorische* Parameter. Wenn nun ein spezielles Kreisbogenpolygon vorgegeben ist, dann kennt man zwar den Typus der zugehörigen Differentialgleichung und auch die zugehörigen Exponentendifferenzen, nicht aber die Lage der singulären Stellen und auch nicht die *akzessorischen* Parameter, und hierin liegt eine der wesentlichsten Schwierigkeiten dieses Abbildungsproblems.

Wenn man nun aber einen der *akzessorischen* Parameter mit unserem Eigenwertparameter λ identifiziert und die Möglichkeit besteht, das Abbildungsproblem als Eigenwertproblem zu formulieren, so können wir hoffen, auf dem Wege über die Eigenwerttheorie diese Schwierigkeit wenigstens teilweise zu überwinden. Das Interesse von F. KLEIN richtete sich dabei vor allem auf die mit den Hauptkreisuniformisierenden zusammenhängenden Kreisbogenpolygone, doch sind hier — von einer Ausnahme abgesehen[5]) — wirklich befriedigende Ergebnisse nicht erzielt worden[6]). Auch der Versuch von E. HILB[7]), Kreisbogenpolygone ganz allgemein auf diese Weise zu behandeln — wobei in großem Umfang Kontinuitätsbetrachtungen herangezogen werden müssen — kann nicht als sehr befriedigend bezeichnet werden. Von einem

[5]) HILBERT, D.: Lineare Integralgleichungen, S. 258—262. Leipzig u. Berlin 1912.

[6]) Einen zusammenfassenden Bericht über diese Arbeiten findet man bei KLEIN, F.: Math. Ann. **64**, 175 (1907). — Numerische Durchführung eines Beispiels bei ROTHE, H.: Mh. Math. **19**, 258 (1908).

[7]) HILB, E.: Math. Ann. **66**, 215 (1908); **68**, 24 (1910).

etwas anderen Standpunkt aus betrachtet J. PLEMELJ[8]) eine Klasse von Eigenwertproblemen, die im wesentlichen mit der von uns untersuchten übereinstimmt. Seine Untersuchungen sind jedoch rein theoretischer Natur — Hinweise für die rechnerisch-praktische Bewältigung des Problems werden nicht gegeben.

§ 2. Der Winkelraum mit Halbkreiskerbe. Aufstellung und Lösung des zugehörigen Eigenwertproblems.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wenden wir uns den zu Anfang erwähnten speziellen Abbildungsaufgaben zu, und zwar behandeln wir zunächst den in Fig. 2 dargestellten Bereich. Wir erweitern diesen Bereich durch Spiegelung an der Kerbe zu dem in Fig. 6 dargestellten Kreisbogenviereck[9]) Dieses Viereck besitzt vier gleiche Winkel der Größe $\delta\pi$. Wir wollen jetzt die Seite des Vierecks, die von $\varepsilon_2 = 0$ auf dem Halbstrahl arc $\eta = \delta\pi$ nach $\varepsilon_1 = \infty$ läuft, mit der Seite s_0 der Probleme des vorigen Paragraphen identifizieren. s_{-1} und s_{+1} sind dann die Stücke der reellen Achse zwischen ε_1 und ε_4, und zwischen ε_2 und ε_3. Es ist also hier sowohl $\varepsilon_1' = \varepsilon_2$ als auch $\varepsilon_1 = \varepsilon_2'$ und wir können daher hier sowohl ein *Problem* 2a) wie ein *Problem* 2b) aufstellen.

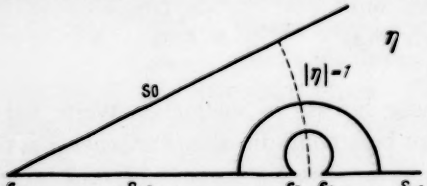

Fig. 6.

Die Differentialgleichung, auf die man zur Lösung dieses Abbildungsproblems geführt wird, ist im wesentlichen die LAMÉsche. Wir wollen sie in der folgenden Form ansetzen[10]):

$$(2)\quad \begin{cases} (x^2-1)(q\,x^2-1)\,y'' + 2(1-\delta)\,x\,[q\,(x^2-1) + (q\,x^2-1)]\,y' + \\ \qquad + 2(2\delta^2 - 3\delta + 1)(q\,x^2 + C)\,y = 0 \qquad (q \text{ reell} > 0). \end{cases}$$

Die singulären Stellen dieser Differentialgleichung sind die Punkte $x = \pm 1$ und $x = \pm q^{-\frac{1}{2}}$, sowie der Punkt $x = \infty$, in dessen Umgebung jedoch der Quotient $\eta(x)$ regulär ist[11]). Die charakteristischen Exponenten für die Stellen $x = \pm 1$, $\pm q^{-\frac{1}{2}}$ sind $\alpha_\nu = \delta$, $\beta_\nu = 0$.

Es soll nun das Intervall $e_1 = -1 \leq x \leq +1 = e_2$ auf s_0 abgebildet werden, d.h. der *akzessorische* Parameter C muß so bestimmt werden, daß die *kanonischen* Lösungen $y_2^{(1)}$ und $y_1^{(2)}$, und andererseits auch $y_1^{(1)}$ und $y_2^{(2)}$ zueinander

[8]) PLEMELJ, J.: Mh. Math. **43**, 321 (1936).

[9]) Für die numerische Behandlung ist dies zweckmäßig. An und für sich läßt sich auch für das ursprüngliche Gebiet von Fig. 2 ein Eigenwertproblem formulieren.

[10]) In der üblichen Form geschrieben, hat die LAMÉsche Differentialgleichung die vier singulären Stellen $x = e_1, e_2, e_3$ und $x = \infty$ mit den Exponentendifferenzen $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ und δ. Ihre Lösungsquotienten $\eta(x)$ bilden die obere Halbebene auf eines der vier Teile ab, in die das Kreisbogenviereck von Fig. 6 unterteilt ist. Um zur Form (2) der LAMÉschen Differentialgleichung zu gelangen, wird die Variable x noch einer rationalen Transformation unterworfen.

[11]) Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir die vier singulären Stellen so verteilen, denn durch eine lineare Transformation der x-Ebene lassen sich vier beliebig verteilte Punkte stets auf diese Form bringen.

proportional werden, und daß außerdem diese *kanonischen* Lösungen im Intervall $-1<x<1$ keine Nullstellen besitzen. Wir erhalten dann die Abbildungsfunktion, die die obere Halbebene $\Im(x)>0$ auf das in Fig. 6 dargestellte Viereck abbildet, als ein Vielfaches des Quotienten der zum Punkt $x=1$ gehörigen *kanonischen* Lösungen

$$\eta(x)=k\,\eta^{(2)}(x)=k\,\frac{y_1^{(2)}(x)}{y_2^{(2)}(x)},$$

wobei wir die Größe k so wählen wollen, daß der Einheitskreis $|\eta|=1$ das Viereck in zwei symmetrische Teile zerlegt.

Durch die Transformation

$$z(x)=(x-1)^{-\delta}\,y(x) \quad \text{bzw.} \quad z^*(x)=(x+1)^{-\delta}\,y(x)$$

können wir erreichen, daß die gesuchten Eigenfunktionen der *Probleme* 2a) *bzw.* 2b) in den Endpunkten $x=\pm 1$ des untersuchten Intervalls regulär werden. So erhalten wir schließlich die beiden Eigenwertprobleme mit $z(x)$ bzw. $z^*(x)$ als Eigenfunktionen:

$$(3\,a)\quad \begin{cases}(x^2-1)(q\,x^2-1)\,z''+2\,[(x+\delta)(q\,x^2-1)+(1-\delta)\,q\,x(x^2-1)]\,z'+\\ \qquad +q\,[(1-\delta)(2-\delta)\,x^2+\delta(1-\delta)\,x]\,z+\lambda z=0\end{cases}$$

bzw.

$$(3\,b)\quad \begin{cases}(x^2-1)(q\,x^2-1)\,z^{*\prime\prime}+2\,[(x-\delta)(q\,x^2-1)+(1-\delta)\,q\,x(x^2-1)]\,z^{*\prime}+\\ \qquad +q\,[(1-\delta)(2-\delta)\,x^2-\delta(1-\delta)\,x]\,z^*+\lambda z^*=0\end{cases}$$

mit den Randbedingungen, daß z, z^* regulär sein sollen für $x=\pm 1$ und außerdem im Intervall $-1<x<1$ keine Nullstellen haben sollen.

Man stellt leicht fest, daß $z^*(x)=z(-x)$ eine Lösung des *Problems* (3b) ist, wenn $z(x)$ das *Problem* (3a) löst. Es ist dann

$$y_1=(x-1)^{\delta}\,z(x), \qquad y_2=(x+1)^{\delta}\,z(-x)$$

ein Paar von linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung (2), deren Quotient

$$(4)\qquad \eta(x)=\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\delta}\frac{z(x)}{z(-x)}$$

die obere Halbebene $\Im(x)>0$ gerade in der geforderten Weise auf das Viereck von Fig. 6 abbildet. Wir brauchen also nur eine Eigenfunktion des *Problems* (3a) aufzusuchen.

Zur praktischen Lösung des Problems empfiehlt sich die Anwendung der sog. *Störungsrechnung*. Diese ist im Prinzip schon von V. Fock in seiner Arbeit über Kreisbogenvierecke mit Nullwinkeln angewandt worden[12]), allerdings ohne ausreichende theoretische Begründung. Wir setzen hierzu voraus — weiter unten in § 6 werden wir den Beweis hierfür nachtragen — daß der Eigenwert λ und die Eigenfunktion $z(x)$ sich nach Potenzen des Parameters q

[12]) Fock, V.: J. reine angew. Math. **161**, 137 (1929).

entwickeln lassen. Es gelte also für hinreichend kleine $|q|$ die Entwicklung:

$$\lambda = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu q^\nu, \qquad z(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu z_\nu(x). \tag{5}$$

Wenn wir dies in (3a) einsetzen und nach Potenzen von q ordnen, erhalten wir das folgende Gleichungssystem:

$$L_0(z_0) - \lambda_0 z_0 = 0 \tag{6.0}$$

$$L_0(z_1) - \lambda_0 z_1 = L_1(z_0) + \lambda_1 z_0 \tag{6.1}$$

$$L_0(z_2) - \lambda_0 z_2 = L_1(z_1) + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_0 \tag{6.2}$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$L_0(z_\nu) - \lambda_0 z_\nu = L_1(z_{\nu-1}) + \lambda_1 z_{\nu-1} + \lambda_2 z_{\nu-2} + \cdots + \lambda_\nu z_0 \tag{6.ν}$$

mit

$$L_0(z) = (x^2 - 1)\, z'' + 2(x + \delta)\, z'$$

$$L_1(z) = x^2(x^2 - 1)\, z'' + 2[x^2(x + \delta) + x(x^2 - 1)(1 - \delta)]z' + \\ + [(1 - \delta)(2 - \delta)\, x^2 + \delta(1 - \delta)\, x]\, z.$$

Die z_ν sollen sämtlich den Randbedingungen genügen. Dies führt zur eindeutigen Bestimmung der λ_ν. Betrachten wir zunächst die Gl. (6.0)

$$L_0(z_0) - \lambda_0 z_0 = (x^2 - 1)\, z_0'' + 2(x + \delta)\, z_0' - \lambda_0 z_0 = 0.$$

Dies ist eine hypergeometrische Differentialgleichung. Mit $\lambda_0 = n(n+1)$ wird die an der Stelle $x = -1$ reguläre Lösung durch die hypergeometrische Reihe

$$z_0 = F\left(-n, n+1, 1-\delta; \frac{x+1}{2}\right)$$

dargestellt. Für ganzzahliges n bricht die Reihe ab und reduziert sich auf ein Polynom. Dann und nur dann stellt sie eine auch an der Stelle $x = +1$ reguläre Funktion dar. Die Lösung $z_0(x)$ ohne Nullstellen im Intervall $-1 \leq x \leq +1$ erhalten wir für $n = 0$. Es ist also

$$\lambda_0 = 0 \quad \text{und} \quad z_0(x) \equiv 1.$$

In der zweiten Gl. (6.1)

$$L_0(z_1) = L_1(z_0) + \lambda_1 z_0 = P_2(x) + \lambda_1$$

steht auf der rechten Seite ein *Polynom zweiten Grades* [was wir durch $P_2(x) + \lambda_1$ angedeutet haben]. Wir können jetzt λ_1 so wählen, daß $z_1(x)$ ebenfalls ein *Polynom zweiten Grades* wird. Dann und nur dann ist auch $z_1(x)$ an den Stellen $x = \pm 1$ regulär. Hierdurch wird λ_1 eindeutig bestimmt, $z_1(x)$ dagegen nur bis auf eine additive Konstante. Wir wählen sie so, daß $z_1(x) = 0$ für $x = -1$.

In dieser Weise können wir jetzt leicht fortfahren. Aus den Gln. (6.0), (6.1), (6.2), ..., (6.$\nu-1$) seien nacheinander die Größen $\lambda_\varkappa$ und $z_\varkappa(x)$ ($\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1$) bestimmt, und die $z_\varkappa(x)$ seien jeweils *Polynome $2\varkappa$-ten Grades*. Die rechte Seite von (6.ν)

$$L_0(z_\nu) = L_1(z_{\nu-1}) + \lambda_\nu z_{\nu-1} + \lambda_2 z_{\nu-2} + \cdots + \lambda_{\nu-1} z_1 + \lambda_\nu z_0$$

ist dann ein *Polynom 2ν-ten Grades*. Wir bestimmen dann wieder λ_ν so, daß auch $z_\nu(x)$ ein *Polynom 2ν-ten Grades* wird, wobei wir über die freie additive Konstante in $z_\nu(x)$ wieder in der Weise verfügen wollen, daß $z_\nu(x)=0$ wird für $x=-1$. Im übrigen sieht man leicht, daß die spezielle Art der Normierung der Funktionen $z_\nu(x)$ für die endgültige Lösung ohne Bedeutung ist; eine andere Art der Normierung bewirkt nur die Multiplikation der ursprünglichen Lösung mit einem konstanten Faktor, der sich bei der Quotientenbildung wieder heraushebt. Zu achten ist lediglich darauf, daß dieser konstante Faktor — der als Potenzreihe in q erscheint — für die in Betracht kommenden Werte von q konvergiert.

Unter der Voraussetzung der Konvergenz der Reihen (5) erhalten wir also eine Lösung unseres Eigenwertproblems in Form einer Potenzreihe

$$z(x)=z_2^{(1)}(x)=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}q^\nu\sum_{\varkappa=0}^{2\nu}a_\varkappa^{(\nu)}x^\varkappa. \tag{7}$$

§ 3. Diskussion der Abbildungsfunktion.

Die Funktion $z(x)$ ist als Lösung unseres Eigenwertproblems für $x=\pm 1$ regulär und daher auch als Lösung der Differentialgleichung (3a) im ganzen Kreis $|x|<q^{-\frac{1}{4}}$. Sie besitzt — was wir später noch genauer nachweisen werden — in $-1<x<1$ keine Nullstellen, und kann daher auf Grund der daraus folgenden Abbildungseigenschaften des Quotienten $\eta(x)$ zumindest für $\delta<1$ im Kreis $|x|<q^{-\frac{1}{4}}$ keine Nullstellen haben. Denn $z(x)=0$ hat ja auch $\eta(x)=0$ zur Folge, das Gebiet, auf das der Kreis $|x|<q^{-\frac{1}{4}}$ durch $\eta(x)$ abgebildet wird, hat aber den Punkt $\eta=0$ für $\delta<1$ sicher nicht in seinem Inneren. [Abgesehen von der Ecke ε_2, die der Stelle $x=1$ entspricht, die sicher keine Nullstelle von $z(x)$ ist.] Der Quotient

$$\frac{z(x)}{z(-x)}=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}q^\nu\sum_{\mu=1}^{2\nu-1}c_\mu^{(\nu)}x^\mu \tag{8}$$

läßt sich also in eine für $|x|<q^{-\frac{1}{4}}$ konvergente Potenzreihe entwickeln[13]).

Für die analytische Fortsetzung der Funktion $\eta(x)$ über den Kreis $|x|<q^{-\frac{1}{4}}$ hinaus können wir das SCHWARZsche Spiegelungsprinzip benutzen. Das Viereck von Fig. 6 war so entstanden, daß wir dem Viereck von Fig. 2 sein Spiegelbild an der Halbkreiskerbe hinzufügten. Die Halbkreiskerbe zerlegt also das Viereck, in das die obere Halbebene $\Im(x)>0$ bei der konformen Abbildung durch $\eta(x)$ übergeht, in zwei symmetrische Teile. Es muß ihr in der x-Ebene eine Kurve entsprechen, die die obere Halbebene in zwei symmetrische Teile zerlegt, und das ist, wie man leicht sieht, der Halbkreis mit $|x|=q^{-\frac{1}{4}}$. Es wird also durch $\eta(x)$ das Gebiet $\Im(x)>0$, $|x|<q^{-\frac{1}{4}}$ auf einen Winkelraum mit Halbkreiskerbe abgebildet, und durch fortgesetzte Spiegelung an dem Kreis $|x|=q^{-\frac{1}{4}}$ und an der reellen x-Achse läßt sich $\eta(x)$ beliebig in der an den Stellen $x=\pm 1$, $\pm q^{-\frac{1}{4}}$ punktierten Ebene fortsetzen.

[13]) Bei der Quotientenbildung verschwinden gewisse Entwicklungskoeffizienten, was in Formel (8) berücksichtigt wurde.

Diese Überlegungen können wir auch dazu benutzen, um unabhängig von der Differentialgleichung die Entwicklungskoeffizienten in (8) zu bestimmen. Wir transformieren hierzu die η-Ebene gemäß

$$\eta^* = \frac{\eta - 1}{\eta + 1}.$$

Unser Kreisbogenviereck erhält dann die folgende Gestalt (Fig. 7).

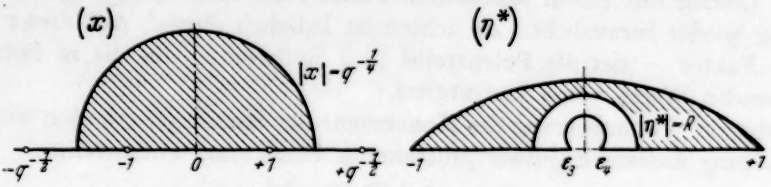

Fig. 7.

Die Funktion $\eta^*(x)$ wollen wir in der folgenden Form schreiben:

$$\eta^*(x) = \frac{\dfrac{z(x)}{z(-x)} - \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^\delta}{\dfrac{z(x)}{z(-x)} + \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^\delta}.$$

$\eta^*(x)$ bildet den Halbkreis $\Im(x) > 0$, $|x| < q^{-\frac{1}{2}}$ auf das in Fig. 7 schraffierte Gebiet ab und insbesondere geht dabei der Kreis $|x| = q^{-\frac{1}{2}}$ in den Kreis $|\eta^*| = R$ über, dessen Radius R noch von der speziellen Gestalt des Vierecks abhängt. Wir wollen diese Größe R zur genaueren Kennzeichnung des Vierecks benutzen.

Es gilt also nach dem SCHWARZschen Spiegelungsprinzip die folgende Relation:

(9) $$\eta^*(x) = \frac{R^2}{\bar{\eta}^*\left(\dfrac{q^{-\frac{1}{2}}}{\bar{x}}\right)},$$

wenn $\bar{\eta}^*$ und $\bar{x}$ die zu η^* und x konjugiert komplexen Werte sind. Wir entwickeln nun die Größe

(10) $$\frac{z(x)}{z(-x)} \pm \left(\frac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}\right)^\delta = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} c_\mu^{\pm(\nu)}\, q^\nu x^\mu$$

in eine für $1 < |x| < q^{-\frac{1}{2}}$ konvergente Potenzreihe. Dabei ist $c_0^{+(0)} = 2$, $c_0^{-(0)} = 0$, $c_\mu^{\pm(0)} = \pm b_\mu$ $(\mu > 0)$, wenn b_μ der Entwicklungskoeffizient von x^μ bei der Potenzreihenentwicklung von $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^\delta$ ist, und für $\nu > 0$ ist $c_\mu^{\pm(\nu)} = c_\mu^{(\nu)}$, d.h. gleich dem Entwicklungskoeffizienten aus (8). Ferner sei:

(11) $$R^2 = q^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu q^\nu \text{ [14]}.$$

[14]) Man sieht leicht, daß die Entwicklung von R^2 diese Gestalt haben muß, wenn man in $\eta^*(x)$ $x = q^{-\frac{1}{2}}$ setzt.

Setzt man dies nun in (9) ein, multipliziert die Nenner herauf und ordnet nach Potenzen von q und x — wobei noch zu berücksichtigen ist, daß $\bar{z}(\bar{x}) = z(x)$ ist — so erhält man folgendes Gleichungssystem in den $c_\mu^{\pm(\nu)}$ und r_ν:

$$(12) \qquad \sum_{\substack{\mu_1-\mu_2=\mu \\ 2\nu_1+2\nu_2-\mu_3=\nu \\ (\nu=1,2,3,\ldots \\ \mu=0,1,2,\ldots,\nu)}} c_{\mu_1}^{-(\nu_1)} c_{\mu_2}^{-(\nu_2)} = \sum_{\substack{\mu_1-\mu_2=\mu \\ 2\nu_1+2\nu_2+1-\mu_3=\nu}} r_{\nu_3} c_{\mu_1}^{+(\nu_1)} c_{\mu_2}^{+(\nu_2)}.$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich leicht nach den gesuchten Entwicklungskoeffizienten $c_\mu^{(\nu)}$ aus (8) und r_ν aus (11) auflösen. In den einzelnen Gleichungen des Systems (12) treten jeweils nur endlich viele der $c_\mu^{(\nu)}$ wirklich auf, da diese Koeffizienten für $\mu > 2\nu - 1$ verschwinden, und in der angegebenen Reihenfolge aufgestellt, tritt in jeder neuen Gleichung höchstens eine neue Unbekannte auf, so daß wir die gesuchten Größen leicht sukzessive berechnen können. Dies ist wesentlich einfacher, als wenn wir diese Größen aus der Differentialgleichung bestimmen wollten. Zudem enthält das System (12) eine größere Anzahl überzähliger Gleichungen, die zur rechnerischen Kontrolle dienen können.

§ 4. Der Parallelstreifen mit Halbkreiskerbe.

Wir wollen jetzt untersuchen, inwieweit wir unser Verfahren auf den Fall $\delta = 0$ ausdehnen können. Zunächst stellen wir fest, daß in diesem Fall die Differentialgleichungen (2), (3a) und (3b) einander gleich werden. Abgesehen davon können wir aber das Eigenwertproblem in genau derselben Weise formulieren und auch mit denselben Methoden behandeln; die hier angestellten Überlegungen sind in keiner Weise von der Größe von δ abhängig. Nur wird in diesem Falle $z(x) = z^*(x)$ und wir können also nicht mehr mittels (4) zu $\eta(x)$ übergehen. Wir müssen uns aber zunächst überhaupt fragen, was für ein Kreisbogenviereck wir bei der konformen Abbildung durch den Quotienten $\eta(x)$ in diesem Falle erhalten.

Die *kanonischen* Lösungen von (2) für die Stellen $x = \pm 1$ lauten jetzt:

$$y_1^{(\nu)} = 1 + a_1(x \mp 1) + a_2(x \mp 1)^2 + \cdots$$

$$y_2^{(\nu)} = C\, y_1^{(\nu)} \log(x \mp 1) + 1 + b_1(x \mp 1) + b_2(x \mp 1)^2 + \cdots \quad (\nu = 1, 2),$$

wo diesmal sicher $C \neq 0$ ist. Das Auffinden einer in $x = \pm 1$ regulären Lösung von (2) [bzw. (3a, b)] bedeutet also nicht mehr die Lösung eines *Problems* 2a), 2b), sondern die Lösung eines *Problems* 1). Die dem Intervall $-1 \leq x \leq 1$ entsprechende Seite s_0 muß also jetzt eine *volle Kreisperipherie* umfassen. Wir erhalten ein solches Viereck, wenn wir bei dem zu Anfang erwähnten Parallelstreifen mit Halbkreiskerbe diesen Bereich an der Kerbe spiegeln. So entsteht das in Fig. 8 dargestellte Viereck mit den vier Winkeln $\delta\pi = 0$. Die Viereckssseite, die auf der Geraden

$$\eta = t + \frac{\pi i}{2} \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

liegt und die in der Tat einer vollen Kreisperipherie äquivalent ist, soll mit unserer Seite s_0 identifiziert werden, d.h. sie soll bei der konformen Abbildung durch $\eta(x)$ ein Bild des Intervalls $-1 \leq x \leq +1$ werden.

Wir müssen jetzt nur noch aus der Eigenfunktion $z(x) = z^*(x)$ den Quotienten $\eta(x)$ wirklich bilden. Dazu können wir so vorgehen: Bekanntlich erhält

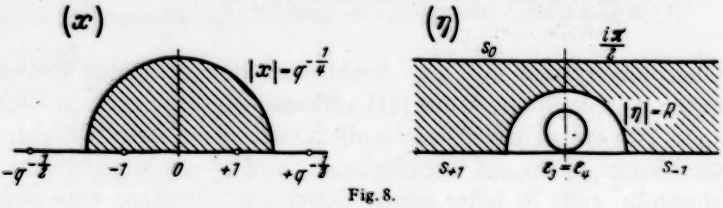

Fig. 8.

man, wenn eine Lösung der Differentialgleichung $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$ bekannt ist, eine dazu linear unabhängige durch:

$$y_2 = y_1 \int \frac{\exp - \int p(x)\, dx}{y_1^2}\, dx.$$

In unserem Falle ist also

$$\eta(x) = \int \frac{q-1}{(x^2-1)\,(q\,x^2-1)\,z^2(x)}\, dx, \tag{13}$$

wo $z(x)$ die nach den Methoden des § 2 gewonnene Eigenfunktion für $\delta = 0$ sein soll, d.h. es ist $z(x)$ die für $x = \pm 1$ reguläre Lösung von (3a) [und auch von (3b), d.h. es ist $z(x) = z(-x)$], die so normiert sein soll, daß $z(x) = 1$ für $x = \pm 1$. Da diese Funktion im Kreise $|x| < q^{-\frac{1}{2}}$ regulär und $\neq 0$ ist, was wir in derselben Weise wie zu Beginn des § 3 feststellen können, läßt sich der Integrand in diesem Kreise in eine Potenzreihe der folgenden Form entwickeln[15]):

$$\frac{q-1}{(x^2-1)\,(q\,x^2-1)\,z^2(x)} = \frac{1}{x^2-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} q^\nu \sum_{\mu=0}^{\nu-1} d_\mu^{(\nu)}\, x^{2\mu}.$$

Daraus ergibt sich für $\eta(x)$ eine für $|x| < q^{-\frac{1}{2}}$ gültige Entwicklung der Form:

$$\eta(x) = \frac{1}{2} \log \frac{x-1}{x+1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1,3,\ldots}^{2\nu-1} c_\mu^{(\nu)}\, q^\nu\, x^\mu. \tag{14}$$

Die analytische Fortsetzung von $\eta(x)$ über diesen Bereich hinaus kann, ähnlich wie im vorigen Paragraphen, auf Grund der Überlegung geschehen, daß der Halbkreis mit $|\eta| = R$ eine Symmetrielinie des Vierecks von Fig. 8 ist. $\eta(x)$ bildet also das Gebiet $\Im(x) > 0$, $|x| < q^{-\frac{1}{2}}$ auf einem Parallelstreifen mit Halbkreiskerbe (Fig. 1) ab. Dies führt auf die der Gl. (9) genau entsprechenden Symmetrierelation:

$$\eta(x) = \frac{R^2}{\bar{\eta}\left(\frac{q^{-\frac{1}{2}}}{\bar{x}}\right)}. \tag{15}$$

[15]) Auch hier fallen gewisse Entwicklungskoeffizienten fort, was in (14) berücksichtigt wird.

Außer zur analytischen Fortsetzung läßt sich Relation (15) wieder dazu benutzen, die Größen $c_\mu^{(\nu)}$ aus (14) zu berechnen.

Dazu entwickeln wir die Größe R, die der Größe R des vorigen § 3 genau entspricht und wie diese zur genauen Kennzeichnung des Vierecks dienen kann, wie in Formel (11):

$$R^2 = q^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu q^\nu .$$

Weiter entwickeln wir $\eta(x)$ in eine für $1 < |x| < q^{\frac{1}{2}}$ konvergente LAURENT-Reihe:

$$\eta(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} c_\mu^{(\nu)} q^\nu x^\mu$$

mit $c_\mu^{(0)} = 1/\mu$ $(\mu = -1, -3, -5, \ldots)$ und für $\nu > 0$, $\mu = 1, 3, \ldots, 2\nu - 1$ $c_\mu^{(\nu)} = c_\mu^{(\nu)}$ aus Formel (14). In (15) eingesetzt, die Nenner heraufmultipliziert und nach Potenzen von x und q geordnet, ergibt das:

$$\sum_{\substack{\mu_1 - \mu_2 = \mu \\ 2\nu_1 + 2\nu_2 - \mu_2 = \nu \\ (\nu = 1, 3, 5, \ldots \\ \mu = 2, 4, 6, \ldots, < \nu)}} c_{\mu_1}^{(\nu_1)} c_{\mu_2}^{(\nu_2)} = 0, \tag{16}$$

$$\sum_{\substack{\nu_1 + \nu_2 - \frac{\mu+1}{2} = \nu \\ (\nu = 0, 1, 2, \ldots)}} c_\mu^{(\nu_1)} c_\mu^{(\nu_2)} = r_\nu . \tag{17}$$

Dieses Gleichungssystem hat dieselbe Gestalt wie das System (12), und es gilt das dort Gesagte sinngemäß auch hier. Die Berechnung der $c_\mu^{(\nu)}$ und r_ν gestaltet sich hier sogar noch erheblich einfacher, da die einzelnen Gleichungen hier einfacher gebaut sind.

§ 5. Verwendung der WEIERSTRASSschen Form der LAMÉschen Differentialgleichung.

Für die praktische Rechnung ist es bisweilen von Vorteil, statt von der Form (2) von der WEIERSTRASSschen Form der LAMÉschen Differentialgleichung auszugehen. Dies empfiehlt sich besonders dann, wenn R nahekommt seinem *Maximalwert*

$$R_{\max} = 1 - \cos \pi\delta \quad \text{bzw. für} \quad \delta = 0, \qquad R_{\max} = \frac{\pi}{2},$$

weil unser bisheriges Verfahren dann nicht mehr schnell genug konvergiert. Allerdings muß dann noch eine konforme Abbildung der oberen Halbebene auf ein Rechteck oder einen Kreisringsektor dazwischengeschaltet werden, was die Rechenarbeit wieder vergrößert. Wir wollen dieses Verfahren kurz skizzieren.

Wir gehen aus von der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dv^2} = [n(n+1)\wp(v) + B]\, y. \tag{18}$$

Die WEIERSTRASSsche $\wp$-Funktion $\wp(v)$ habe eine reelle Periode $\omega_1 = \pi$ und eine rein imaginäre Periode $\omega_2 = iK$ und es sei $n = \delta - \frac{1}{2}$. Dann wird das

Periodenrechteck $0<\Re(v)<\pi$, $0<\Im(v)<K$ durch den Quotienten $\eta(v)$ zweier linear unabhängiger Lösungen von (18) auf ein Kreisbogenviereck mit den vier Winkeln $\delta\pi$ abgebildet, und bei geeigneter Wahl von B erhält man Vierecke des Typus von Fig. 6 bzw. für $\delta=0$ des Typus von Fig. 8.

Wir führen jetzt in bekannter Weise die Größe $h=e^{i\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}}=e^{-K}$ ein[16]) und entwickeln $\wp(v)$ in eine Trigonometrische Reihe. Wir erhalten dann:

$$(18\,a)\qquad \frac{1}{y}\cdot\frac{d^2y}{dv^2}=n(n+1)\left[\frac{1}{\sin^2 v}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\,h^{2n}}{1-h^{2n}}\cos 2nv+B_1\right].$$

Mit $u=\cos v$ geht diese Differentialgleichung über in:

$$(19)\qquad (u^2-1)\cdot y''+u\cdot y'+\left(\frac{1}{4}-\delta^2\right)\left[\frac{1}{u^2-1}+4\sum_{n=1}^{\infty}h^{2n}P_n(u^2)-B_1\right]y=0,$$

wo $P_n(u^2)$ ein Polynom n-ten Grades in u^2 ist.

Das uns interessierende Rechteck $0<\Re(v)<\pi$, $0<\Im(v)<K$ geht dabei in eine *Halbellipse* mit den Brennpunkten $u=\pm 1$ in der u-Ebene über. Die Stellen $u=\pm 1$ sind singuläre Stellen von (19) mit den charakteristischen Exponenten $\alpha=\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}$, $\beta=\frac{1}{4}-\frac{\delta}{2}$. Im übrigen ist das Intervall $-1<u<+1$ frei von singulären Stellen der Differentialgleichung (19). Die Forderung, daß dieses Intervall auf die Seite s_0 des Vierecks von Fig. 6 abgebildet werden soll, wenn die Halbellipse in der u-Ebene durch $\eta(u)$ in ein solches Viereck übergeht, führt also wieder auf ein *Eigenwertproblem des Typus* 2a) *und* 2b).

Durch die Transformation

$$z(u)=(u+1)^{-\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}(u-1)^{-\frac{1}{4}-\frac{\delta}{2}}y(u)$$

$$z^*(u)=(u+1)^{-\frac{1}{4}-\frac{\delta}{2}}(u-1)^{-\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}y(u)$$

können wir wieder erreichen, daß die gesuchten Eigenfunktionen an den Stellen $u=\pm 1$ regulär werden. An Hand der zugehörigen Differentialgleichung stellen wir fest, daß wieder $z^*(u)=z(-u)$ ist, so daß es also genügt, die Funktion $z(u)$ zu bestimmen und von da aus mit Hilfe von

$$(20)\qquad \eta(u)=\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^{\delta}\frac{z(u)}{z(-u)}$$

zu der gesuchten Abbildungsfunktion $\eta(u)$ überzugehen.

$z(u)$ genügt der Differentialgleichung:

$$(21)\qquad (u^2-1)\cdot z''+2(u+\delta)z'-(1-4\delta^2)\left[\sum_{n=1}^{\infty}h^{2n}P_n(u^2)+\lambda\right]\cdot z=0.$$

---

[16]) Beim Übergang von Differentialgleichung (2) zu (18) wird h zu einer auch leicht explizit anzugebenden Funktion von q. Die Größe h spielt hier dieselbe Rolle wie die Größe q in den Entwicklungen des § 2.

An den Stellen $u = \pm 1$ soll $z(u)$ regulär sein und im Intervall $-1 \leq u \leq +1$ keine Nullstellen besitzen. Zur Lösung dieses Problems wenden wir wieder die Störungsrechnung an, und zwar setzen wir jetzt voraus, daß λ und $z(u)$ sich nach Potenzen von h^2 entwickeln lassen:

$$\lambda = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu h^{2\nu}, \qquad z(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu(u)\, h^{2\nu}. \tag{22}$$

Setzen wir dies in (21) ein und ordnen nach Potenzen von h, so erhalten wir folgendes System von Differentialgleichungen:

$$L_0(z_0) - \lambda_0 z_0 = 0 \tag{23.0}$$

$$L_0(z_1) - \lambda_0 z_1 = (4\delta^2 - 1)\, z_0(P_1 + \lambda_1) \tag{23.1}$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$L_0(z_\nu) - \lambda_0 z_\nu = (4\delta^2 - 1)\left[\sum_{\mu=1}^{\nu} z_{\nu-\mu}(P_\mu + \lambda_\mu)\right], \tag{23.ν}$$

wo $$L_0(z) = (u^2 - 1)\, z'' + 2(u + \delta)\, z'$$

dieselbe Bedeutung hat wie in dem ganz ähnlich gebauten System (6). Die dort angestellten Betrachtungen können auf das System (23) ohne weiteres übertragen werden und führen auch zu ganz ähnlichen Ergebnissen. Insbesondere wird $z_0(u) \equiv 1$ und $z_\nu(u)$ ein *Polynom* 2ν*-ten Grades* in u, das wir wieder so normieren können, daß $z_\nu(u) = 0$ für $u = -1$ ist. Für die Funktion $\eta(u)$ ergibt sich daraus eine Entwicklung der folgenden Form:

$$\eta(u) = \left(\frac{u-1}{u+1}\right)^{\delta}\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{2\nu-1} d_\mu^{(\nu)} h^{2\nu} u^\mu\right). \tag{24}$$

Für die weitere Diskussion gehen wir zweckmäßig vom cos zur Exponentialfunktion über. Wir setzen

$$u = \tfrac{1}{2}(t + t^{-1}), \qquad \text{d.h. es ist} \quad t = e^{iv}.$$

Es wird dann

$$\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^{\delta} = \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{2\delta}$$

und

$$\frac{z(t)}{z(-t)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} h^{2\nu}\left[c_0^{(2\nu)} + \sum_{\pm\mu=1}^{2\nu-1} c_{\pm\mu}^{(2\nu)}(t^\mu + t^{-\mu})\right]. \tag{25}$$

Diese Entwicklung konvergiert für $\delta < 1$ und $h < |t| < h^{-1}$. Wir können uns dies folgendermaßen überlegen: Das uns interessierende Rechteck $0 < \Re(v) < \pi$, $0 < \Im(v) < K$ in der v-Ebene geht durch $t = e^{iv}$ in den halben Kreisring $\Im(t) < 0$, $h < |t| < 1$ über. Dieses Gebiet wird also durch $\eta(t)$ auf das Kreisbogenviereck von Fig. 6 abgebildet. Die singulären Stellen der Differentialgleichung (18) $v = m\pi + i\,nK$ $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$ gehen in die Stellen $t = h^n$ in der t-Ebene über und speziell die Stellen $v = 0$ und $v = \pi$ in die Stellen $t = \pm 1$. $z(t)$ ist

in den Stellen $t=\pm 1$ regulär und die für die Umgebung dieser Stellen konvergente LAURENT-Entwicklung konvergiert daher für $h<|t|<h^{-1}$. Für $\delta<1$ hat $z(t)$ in diesem Gebiet auch keine Nullstellen, was wir durch dieselben Überlegungen wie zu Beginn des § 3 nachweisen können. Daher ist dann auch die Entwicklung des Quotienten $\frac{z(t)}{z(-t)}$ für $h<|t|<h^{-1}$ gültig.

Die Entwicklungskoeffizienten $c_\mu^{(\nu)}$ aus (25) können wir wieder unabhängig von der Differentialgleichung mit Hilfe einer Symmetrierelation berechnen. Da das Gebiet $\Im(t)>0$, $h<|t|<1$ auf das ganze Viereck von Fig. 6 durch $\eta(t)$ abgebildet wird, geht das Gebiet $\Im(t)>0$, $h^{\frac{1}{2}}<|t|<1$ in den Winkelraum

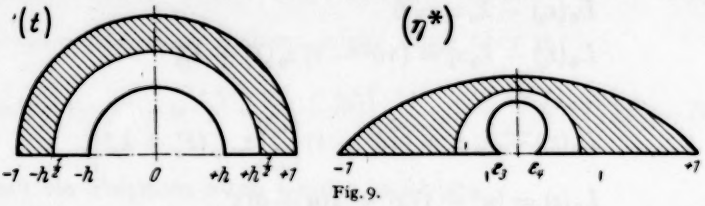

Fig. 9.

mit Halbkreiskerbe von Fig. 2 über. Wenn wir jetzt zu η^*, d.h. zu dem Viereck von Fig. 7 übergehen, dann geht bei der konformen Abbildung durch $\eta^*(t)$ der Kreis $|t|=h^{\frac{1}{2}}$ in den Kreis $|\eta^*|=R$ über (s. Fig. 9). Es gilt also die Relation:

$$\eta^*(t)=\frac{R^2}{\overline{\eta^*\left(\frac{h}{\bar{t}}\right)}}. \tag{26}$$

Wir schreiben jetzt $\eta^*(t)$ in der Form

$$\eta^*(t)=\frac{\frac{z(t)}{z(-t)}-\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{2\delta}}{\frac{z(t)}{z(-t)}+\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{2\delta}}$$

und entwickeln die Größe

$$\frac{z(t)}{z(-t)}\pm\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{2\delta}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}c_\mu^{\pm(\nu)}h^\nu t^\mu$$

in eine für $h<|t|<1$ konvergente LAURENT-Reihe. Ferner setzen wir:

$$R^2=h\sum_{\nu=0}^{\infty}r_\nu h^{2\nu}. \tag{27}$$

Setzen wir dies in (26) ein, multiplizieren die Nenner herauf und ordnen nach Potenzen von h und t, so erhalten wir schließlich folgendes Gleichungssystem, das dem System (12) von § 3 genau entspricht:

$$\sum_{\substack{\mu_1-\mu_2=\mu\\ \nu_1+\nu_2+\mu_2=\nu\\ (\nu=1,2,3,\ldots)\\ \mu=0,1,2,\ldots,\nu)}} c_{\mu_1}^{-(\nu_1)}c_{\mu_2}^{-(\nu_2)}=\sum_{\substack{\mu_1-\mu_2=\mu\\ \nu_1+\nu_2+2\nu_3+1+\mu_2=\nu}} r_{\nu_3}c_{\mu_1}^{+(\nu_1)}c_{\mu_2}^{+(\nu_2)} \tag{28}$$

In derselben Weise läßt sich auch das Viereck mit den vier Nullwinkeln (§ 4, Fig. 8) behandeln. Die Funktion $z(u)$ bestimmt sich auch für $\delta=0$ aus

den Gln. (21) bis (23) und daraus gewinnt man die Funktion $\eta(u)$ mit Hilfe eines Integralansatzes wie in Formel (13). Wir gehen dann wieder zur t-Ebene über und erhalten für die Funktion $\eta(t)$ den folgenden für $h<|t|<h^{-1}$ gültigen Ansatz:

$$\eta(t)=\log\frac{1-t}{1+t}+\sum_{\nu=1}^{\infty}h^{2\nu}\sum_{\mu=1,3,\dots}^{2\nu-1}c_{\pm\mu}^{(2\nu)}(t^{\mu}+t^{-\mu}). \tag{29}$$

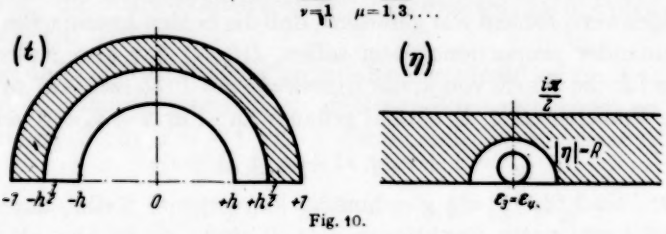

Fig. 10.

$\eta(t)$ bildet das Gebiet $\Im(t)>0$, $h<|t|<1$ auf das Viereck mit den vier Nullwinkeln ab, wobei der Kreis $|t|=h^{\frac{1}{2}}$ in den Kreis $|\eta|=R$ übergeht. Es gilt also wieder die Relation:

$$\eta(t)=\frac{R^2}{\overline{\eta}\left(\frac{h}{t}\right)}. \tag{30}$$

Setzen wir hierin die für $h<|t|<1$ konvergente LAURENT-Entwicklung von $\eta(t)$ ein,

$$\eta(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}c_{\mu}^{(\nu)}h^{\nu}t^{\mu}$$

sowie die Entwicklung für R^2

$$R^2=h\sum_{\nu=0}^{\infty}r_{\nu}h^{2\nu}$$

multiplizieren den Nenner herauf und ordnen nach Potenzen von h und t, so erhalten wir das den Gln. (16), (17) von § 4 entsprechende System:

$$\sum_{\substack{\mu_1-\mu_2=\mu\\ \nu_1+\nu_2+\mu_2=\nu\\ (\nu=1,3,5,\dots\\ \mu=2,4,6,\dots<\nu)}}c_{\mu_1}^{(\nu_1)}c_{\mu_2}^{(\nu_2)}=0. \tag{31}$$

$$\sum_{\substack{\nu_1-\nu_2+\mu-1=2\nu\\ (\nu=0,1,2,\dots)}}c_{\mu}^{(\nu_1)}c_{\mu}^{(\nu_2)}=r_{\nu}. \tag{32}$$

§ 6. Konvergenzbeweis.

Es bleibt jetzt noch der Nachweis für die Zulässigkeit der hier angeführten Entwicklungen zu führen. Wir betrachten hierzu zunächst die Differentialgleichung (3a) bei beliebigen q und λ. Sie besitzt an den Stellen $x=+1$ und $x=-1$ *kanonische Lösungen*, die in der Umgebung dieser Stellen *regulär* sind:

$$z_2^{(1)}=1+a_1(q,\lambda)(x+1)+a_2(q,\lambda)(x+1)^2+\cdots$$

$$z_1^{(2)}=1+b_1(q,\lambda)(x-1)+b_2(q,\lambda)(x-1)^2+\cdots.$$

Diese beiden Funktionen $z_2^{(1)}, z_1^{(2)}$ sind natürlich im allgemeinen voneinander linear unabhängig, die WRONSKIsche Determinante

$$W(z_2^{(1)}, z_1^{(2)}) = z_2^{(1)} z_1^{(2)} - z_2^{(1)} z_1^{(2)} = D(q, \lambda)$$

gebildet für eine *feste reguläre Stelle* $x = x_0$ der Differentialgleichung ist eine wohlbestimmte Funktion von q und λ, die nicht identisch verschwindet. In unserem Eigenwertproblem war gefordert, daß die beiden *kanonischen Lösungen* $z_2^{(1)}, z_1^{(2)}$ zueinander proportional sein sollen, $D(q, \lambda)$ hat also Nullstellen für die und nur für die Werte von λ, die *Eigenwerte des Problems* (3a) sind. Sehen wir uns die Funktion $D(q, \lambda)$ einmal genauer an: Für $x = x_0 = 0$ gebildet, ist

$$z_2^{(1)} = 1 + a_1(q, \lambda) + a_2(q, \lambda) + \cdots$$

eine für alle λ und für $|q| < \frac{1}{4}$ gleichmäßig konvergente Reihe, deren Glieder die in q und λ rationalen Funktionen $a_\nu(q, \lambda)$ sind. $z_2^{(1)}$ ist also als Funktion von q und λ betrachtet zumindest in diesem Gebiet regulär analytisch[17]) und läßt sich also in der Umgebung von $q = 0$ und $\lambda = 0$ in eine Potenzreihe von q und λ entwickeln. Das gleiche gilt natürlich auch für $z_2^{(1)'}, z_1^{(2)}, z_1^{(2)'}$ an der Stelle $x = 0$ und somit auch für $D(q, \lambda)$. Genauer ist:

$$z_2^{(1)} = F\left(-n, n+1, 1-\delta; \frac{1+x}{2}\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu^{(1)}(\lambda)\, q^\nu$$

$$z_2^{(1)'} = \frac{d}{dx} F\left(-n, n+1, 1-\delta; \frac{1+x}{2}\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu^{(1)*}(\lambda)\, q^\nu$$

$$z_1^{(2)} = F\left(-n, n+1, 1+\delta; \frac{1-x}{2}\right) + \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu^{(2)}(\lambda)\, q^\nu$$

$$z_1^{(2)'} = \frac{d}{dx} F\left(-n, n+1, 1+\delta; \frac{1-x}{2}\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu^{(2)*}(\lambda)\, q^\nu,$$

wobei die hypergeometrischen Reihen $F(-n, \ldots)$, $\frac{d}{dx} F(-n, \ldots)$ an der Stelle $x = 0$ zu bilden sind und wir wieder $\lambda = n(n+1)$ (vgl. § 2) setzen. Die Entwicklung von $D(q, \lambda)$ berechnet sich daraus zu:

$$D(q, \lambda) = 2 \frac{\delta}{\sin \pi \delta} \sin \pi n + \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu(\lambda)\, q^\nu.$$

$\sin \pi n$ ist als Funktion von λ betrachtet eine ganze transzendente Funktion, die an den Stellen $\lambda = n(n+1)$ für ganze $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ einfache Nullstellen hat. Für $q = 0$ und $\delta \neq \pm 1, \pm 2, \ldots$ hat also $D(q, \lambda)$ für diese Werte von λ einfache Nullstellen in λ. Nach den Sätzen über implizite Funktionen gibt also eine in einer gewissen Umgebung von $q = 0$ — sagen wir für

[17]) Genauer gilt, daß $z_2^{(1)}$ als Funktion von q im Kreise $|q| < 1$ regulär ist und über diesen Kreis hinaus auf der an den Stellen $q = 0, 1, \infty$ punktierten Ebene überallhin analytisch fortgesetzt werden kann.

$|q|<\varrho>0$ — regulär analytische Funktion

$$\lambda^{(n)}(q) = \lambda_0^{(n)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{(n)} q^\nu \qquad (\lambda_0^{(n)} = n(n+1))$$

derart, daß $D(q, \lambda^{(n)}(q)) \equiv 0$ für alle q wird. Damit ist der erste Teil unserer Behauptung, die Entwickelbarkeit des Eigenwertes nach Potenzen von q, schon bewiesen.

Der zweite Teil, die Entwickelbarkeit der Eigenfunktion $z(x)$ nach Potenzen von q läßt sich daraus sehr einfach ableiten: Wir wollten $z(x)$ so normieren, daß es an der Stelle $x=-1$ gleich der kanonischen Lösung $z_2^{(1)}(x)$ ist, es ist also

$$z(x) = 1 + a_1(q, \lambda^{(n)}(q))\,(x+1) + a_2(q, \lambda^{(n)}(q))\,(x+1)^2 + \cdots.$$

Die $a_\nu(q, \lambda^{(n)}(q))$ sind nach dem eben Bewiesenen für $|q|<\varrho$ regulär analytische Funktionen. Da die Reihe für diese q und in der Umgebung von $x=-1$ absolut und gleichmäßig konvergiert, können wir nach Potenzen von q umordnen und erhalten so:

$$z(x) = z_0(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} q^\nu z_\nu(x).$$

Dabei ist $z_0(x) = F\left(-n, n+1, 1-\delta, \frac{1+x}{2}\right)$, wenn $z(x)$ zum n-ten Eigenwert $\lambda^{(n)}$ gehört, und die $z_\nu(x)$ mit $\nu>0$ müssen an der Stelle $x=-1$ verschwinden.

Wir wollen noch zeigen, daß die zum Eigenwert $\lambda^{(n)}(q)$ gehörigen Eigenfunktionen $z(x)$ auch die geforderte Zahl von n *Nullstellen* besitzen. Für $q=0$ sieht man direkt, daß $z(x)=z_0(x)$ (s. oben) im Intervall $-1<x<+1$ n Nullstellen besitzt. Nun ist $z(x)$ für $|q|<\varrho$ jedenfalls eine stetige Funktion in q. Ändert sich also die Zahl der Nullstellen von $z(x)$ im Intervall $-1\leq x\leq+1$, wenn wir q von $q=0$ nach $q=\varrho$ wachsen lassen, so muß für irgendein $q=q_0$ $(0<q_0<\varrho)$ die Funktion $z(x)$ entweder in einem der Intervallendpunkte $x=\pm 1$ verschwinden, oder im Intervall $-1<x<+1$ mehrfache Nullstellen haben. Beides ist aber unmöglich. In den Intervallendpunkten ist die an diesen Stellen reguläre Lösung jedenfalls $\neq 0$ und im Inneren des Intervalls $-1<x<+1$ können die Lösungen der Differentialgleichung (3a) keine mehrfachen Nullstellen haben. Damit ist alles bewiesen.

In genau der gleichen Weise läuft der Beweis für die Konvergenz des Verfahrens von § 5, wo wir von der Weierstrassschen Form der Laméschen Differentialgleichung ausgingen und nach Potenzen von h^2 entwickelten. Wir brauchen daher hier nicht näher darauf einzugehen. Von Interesse wäre natürlich noch eine nähere Angabe über die Größe des Konvergenzradius ϱ. Besonders für die praktische Durchführung der Abbildungsaufgabe ist es erforderlich, daß das Verfahren nicht nur in einer kleinen Umgebung des Nullpunkts, sondern für alle in Betracht kommenden Fälle konvergiert, und darüber hinaus wäre auch eine Abschätzung des Fehlers, der beim Abbrechen der Reihe entsteht, wünschenswert. Verfahren zur Abschätzung der

Koeffizienten bei der Störungsrechnung sind unter anderen von F. RELLICH[18]) und F. W. SCHÄFKE[19]) angegeben worden, und diese Verfahren lassen sich auch ohne Schwierigkeiten auf unseren Fall übertragen. Sie liefern jedoch in unserem Falle wesentlich zu ungünstige Werte. Es wird hier nämlich als Hindernis für die analytische Fortsetzung der $\lambda^{(\nu)}(q)$ ein Zusammenfallen zweier Eigenwerte angenommen; eine derartige Singularität — d.h. eine Verzweigung der Funktion $\lambda^{(n)}(q)$ — bleibt aber in unserem Falle völlig außer Betracht, weil dann auch die zugehörigen Eigenfunktionen zusammenfallen müßten, was für reelle q wegen der verschiedenen Anzahl der Nullstellen der zu verschiedenen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen ausgeschlossen ist. Für komplexe q läßt sich eine ganz entsprechende Überlegung anstellen[20]). Daraus folgt, daß $\lambda^{(n)}(q)$ in der Umgebung jeder Stelle $q = q_0$ regulär ist, sofern nur das Eigenwertproblem für alle q dieser Umgebung lösbar ist, und Entsprechendes gilt natürlich auch für die Größe h. Es ist daher sehr plausibel, daß sowohl $|q|<1$ als auch $|h|<1$ das wahre Konvergenzgebiet unserer Reihen ist. Ein strenger Beweis hierfür dürfte allerdings außerordentlich schwierig zu führen sein, weil sich für die Existenz der Eigenwerte bei komplexen Parametern, d.h. bei nicht-selbstadjungierten Problemen, keine so einfachen und allgemeingültigen Aussagen machen lassen wie im reellen Bereich. Die praktische Rechnung bestätigt übrigens durchaus unsere Vermutung: Die Koeffizienten $c_\mu^{(\nu)}$ in unseren Formeln sind etwa von der Größenordnung $\frac{1}{\nu\mu}$.

[18]) RELLICH, F.: Math. Ann. **117**, 356 (1940/41).

[19]) SCHÄFKE, F. W.: Math. Nachr. **6**, 109 (1951).

[20]) J. PLEMELJ: definiert in der oben zitierten Arbeit eine *Oszillationszahl* und kann dadurch den Begriff der Oszillation einer reellen Funktion — d.h. der Anzahl ihrer Nullstellen in einem gegebenen Intervall — sinngemäß ins Komplexe fortsetzen.

Mathematisches Institut der Justus-Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 16. Mai 1953.)

LORENTZ, G. G., and M. S. MACPHAIL
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 231—246 (1953)

Direct theorems on methods of summability III: absolute summability functions.

By
G. G. LORENTZ and M. S. MACPHAIL.

1. Introduction. This paper is a continuation of the papers [4], [5], [6]. We begin by recapitulating the main definitions. If $\{p_\nu\}$ is an increasing sequence of positive integers, the value of the *counting-function* $\omega(n)=\omega_p(n)$ is, for any $n \geq 0$, the number of p_ν satisfying the inequality $p_\nu \leq n$. Suppose that A is a linear method of summation corresponding to the transformation

$$1(1) \qquad \sigma_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} s_n \quad (m = 0, 1, \ldots).$$

Throughout this paper, $\Omega(n)$ is always a non-decreasing positive function defined for all real $n \geq 0$ and tending to $+\infty$ with n. A function $\Omega(n)$ is a summability function of the first kind (s.f.1) for A if all real bounded sequences $\{s_n\}$ such that $s_n = 0$ except for a sequence $\{p_\nu\}$ of values of n with $\omega_p(n) \leq \Omega(n)$, are A-summable, and $\Omega(n)$ is an *absolute summability function* (of the first kind) (a.s.f.) for A if all sequences $\{s_n\}$ of the kind just described are absolutely A-summable, that is, if $\sum |\sigma_{m+1} - \sigma_m| < +\infty$ for any such sequence. Furthermore, $\Omega(n)$ is a summability function of the second kind (s.f.2) for A if $S_n = s_0 + \cdots + s_n = O(\Omega(n))$ implies that $\{s_n\}$ is A-summable.

These definitions were all given in the papers above mentioned, and summability functions for various special methods were found. In particular, [6] gives every s.f.1 and s.f.2 for the RIESZ and ABEL methods (under certain assumptions), and every a.s.f. for the CESÀRO, EULER-KNOPP and BOREL methods. In the present paper we shall find every a.s.f. for the RIESZ, ABEL and HAUSDORFF methods (under certain assumptions) with the aid of some general theorems on triangular methods, and it will appear that the sufficient condition given by equation 4.2(2) of [6] [see 2(1) below] is in many cases also necessary. (The question of a.s.f. for the ABEL methods was left open in [6].) For the RIESZ methods some additional results are given (§ 5), including in particular the conditions under which a given method A absolutely includes the RIESZ methods. As an aid in the study of summability functions, we have introduced the notion of "convergence functions" (§ 2), which seem to be of some interest in themselves.

2. Convergence functions. The following result was given in [6, p. 245]. In order that $\Omega(n)$ be an a.s.f. for the method 1(1) in which $\sum |a_{0n}| < +\infty$,

This paper was written while the authors were members of the Summer Research Institute, Canadian Mathematical Congress, Kingston 1952.

it is sufficient that

$$2(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{var}_m a_{m p_\nu} < +\infty$$

for any sequence $p_1 < p_2 < \cdots$ with $\omega_p(n) \leq \Omega(n)$. This result often enables us to determine the a.s.f. of a particular method exactly. To aid in the study of 2(1) we introduce the following definition:

Let $\sum u_n$ be a series of positive terms; $\Omega(n)$ is called a *convergence function* (c.f.) of $\sum u_n$ if $\sum u_{p_\nu}$ converges whenever $\omega_p(n) \leq \Omega(n)$.

Thus for $\Omega(n)$ to be an a.s.f. for A, it is sufficient that $\Omega(n)$ be a c.f. for $\sum v_n$ where $v_n = \operatorname{var}_m a_{mn}$. We note that $\sum u_n$ has c.f. if and only if $u_n \to 0$, and that $\Omega(n) = n$ is a c.f. if and only if $\sum u_n$ converges.

In what follows, we shall give a little more about convergence functions than is required for immediate purposes of the study of a.s.f.

Theorem 1. *A function $\Omega(n)$ is a c.f. of $\sum u_n$ if and only if*

$$2(2) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{r} u_{q_\nu} = 0,$$

where $q = \{q_1, \ldots, q_r\}$ denotes an arbitrary finite sequence depending on n with $\omega_q(k) \leq \Omega(k)$ and $q_1 \geq n$. (This is a generalization of CAUCHY's convergence criterion.)

Proof. It is obvious that the condition is sufficient for $\Omega(n)$ to be a c.f. To prove its necessity, we show that among the series $\sum u_{p_\nu}$ with $\omega_p(n) \leq \Omega(n)$ and sum $s(p)$ there is one with maximal sum. Let $M = \sup_p s(p)$ (we shall see later that $M < +\infty$); there is a sequence $p^{(t)}$ $(t = 1, 2, \ldots)$ of sequences with $s(p^{(t)}) \to M$ for $t \to \infty$. For each n there is an infinity of t such that the $p_\nu^{(t)}$ with $1 \leq p_\nu^{(t)} \leq n$ form the same finite set. By the diagonal method we can extract a subsequence of the $p^{(t)}$ in such a way that for *each* n and all sufficiently large t this set is the same. Then $p_\nu^{(t)} = p_\nu$ is constant for all large t; and $p = \{p_\nu\}$ has its counting function $\omega_p(n) \leq \Omega(n)$, and $s(p) = \sum u_{p_\nu} = M$.

If p is chosen as before, we have also that $\sum_{\nu=s+1}^{\infty} u_{p_\nu}$ is greater than or equal to the sum $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{q_\nu}$ for any sequence q with $q_1 \geq p_{s+1}$ and with a counting function $\omega_q(n) \leq \Omega(n) - s$. Let $U_n = \max_{\nu \geq n} u_\nu$. Then for the q_ν of 2(2) we have, provided $q_1 \geq p_{s+1}$,

$$\sum_{\nu=1}^{r} u_{q_\nu} \leq s\, U_n + \sum_{\nu=s+1}^{\infty} u_{p_\nu}.$$

Taking first s and then n sufficiently large, we obtain 2(2). This completes the proof.

Remark. It follows from Theorem 1, that if $\Omega(n)$ is a c.f. of $\sum u_n$, then all series $\sum u_{p_\nu}$ with $\omega_p(n) \leq \Omega(n)$ are uniformly convergent: for each $\varepsilon > 0$ there is an N such that $\sum_{p_\nu > N} u_{p_\nu} < \varepsilon$.

As another application of Theorem 1 we mention the following result:

Theorem 2. *Let $\sum u_n$ be a series with real terms and let $\Omega(n)$ be a c.f. of $\sum |u_n|$. Suppose that P is a permutation of indices $1, 2, \ldots$ which transforms $\sum u_n$ into $\sum v_n$ and is such that at most $\Omega(n)$ of the numbers $1, 2, \ldots, n$ are moved by P outside of $[1, n]$. Then the series $\sum u_n$ and $\sum v_n$ are both divergent or convergent (to the same sum).*

This generalizes the theorem that an absolutely convergent series is unconditionally convergent.

For the proof it is sufficient to show that $\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu \to 0$. This difference does not exceed $\sum_{\nu=1}^{r} |u_{p_\nu}| + \sum_{\nu=1}^{r} |v_{q_\nu}|$, where the p_ν are indices with $p_\nu > n$ mapped by P into $[1, n]$ and the q_ν indices $q_\nu \leq n$ mapped by P into $[n+1, \infty)$. The first sum tends to 0 by 2(2); this also applies to the second sum, since $q_1 \to \infty$ with $n \to \infty$ and since $\omega_q(m) \leq \Omega(m)$. (For each $1 \leq m \leq n$, all q_ν which satisfy $1 \leq q_\nu \leq m$, are mapped by P into $[m+1, \infty)$, hence their number does not exceed $\Omega(m)$.)

Remark. It is easy to prove that under the above conditions $\sum |u_n|$ and $\sum |v_n|$ have the same c.f.'s.

The following lemma, though simple, is often useful.

Lemma 1. *If $u_n \downarrow 0$, then* $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{p_\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_p(n)\,(u_n - u_{n+1})$.

For we have

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{p_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n \geq p_\nu} (u_n - u_{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_p(n)\,(u_n - u_{n+1}).$$

We shall sometimes make one or other of the following assumptions:

(A) $$\Delta\Omega(n) = \Omega(n+1) - \Omega(n) \leq 1 \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

(B) $u_{p_\nu} \geq K u_{p_{\nu-1}}$ for some constant $K > 0$ and some sequence $\{p_\nu\}$ with

2(3) $$\Omega(p_\nu) - \Omega(p_{\nu-1}) \leq p_\nu - p_{\nu-1}$$

for all sufficiently large ν.

Assumption (A) entails no great loss of generality, since given any $\Omega(n)$ not satisfying (A) we can construct an $\Omega'(n)$ which satisfies (A) and determines the same set of counting functions $\omega_p(n)$ as does $\Omega(n)$. We may however avoid (A) by assuming (B), observing that the inequality 2(3) holds for example if $\Omega(n) = o(n)$, $p_\nu / p_{\nu-1} \geq \lambda > 1$.

Theorem 3. *Assume that $u_n \downarrow 0$. Then*

2(4) $$\sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n)\,(u_n - u_{n+1}) < +\infty$$

implies that

2(5) $$\Omega(n) \text{ is a c.f. of } \sum u_n.$$

Conversely, if (A) *or* (B) *holds,* 2(5) *implies* 2(4).

Proof. The first statement follows at once from Lemma 1. If (A) holds, and $\sum \Omega(n)\ (u_n - u_{n+1}) = +\infty$, we can construct a sequence $\{p_\nu\}$ with

$$\omega_p(n) \leq \Omega(n) \quad \text{and} \quad \sum \omega_p(n)\ (u_n - u_{n+1}) = +\infty.$$

It then follows by lemma 1 that $\Omega(n)$ is not a c.f. of $\sum u_n$. If (B) holds, and $\sum \Omega(n)\ (u_n - u_{n+1}) = +\infty$, we show first that

$$2(6) \qquad \sum u_{p_\nu} [\Omega(p_\nu) - \Omega(p_{\nu-1})] = +\infty.$$

Writing $u(p_\nu)$ for u_{p_ν}, we have

$$\begin{aligned}
(1/K) \sum_{\nu=2}^{N+1} u(p_\nu)\,[\Omega(p_\nu) - \Omega(p_{\nu-1})] &\geq \sum_{\nu=2}^{N+1} u(p_{\nu-1})\,[\Omega(p_\nu) - \Omega(p_{\nu-1})] \\
&= -u(p_1)\,\Omega(p_1) + \sum_{\nu=2}^{N} \Omega(p_\nu)\,[u(p_{\nu-1}) - u(p_\nu)] + u(p_N)\,\Omega(p_{N+1}) \\
&\geq O(1) + \sum_{\nu=2}^{N} \Omega(p_\nu) \sum_{n=p_{\nu-1}}^{p_\nu - 1} [u(n) - u(n+1)] \\
&\geq O(1) + \sum_{n=p_1}^{p_N - 1} \Omega(n)\,[u(n) - u(n+1)].
\end{aligned}$$

The result 2(6) now follows. Let $q_\nu = \Omega(p_\nu) - \Omega(p_{\nu-1})$. The groups of integers n, $p_\nu - q_\nu < n \leq p_\nu$, are disjoint if ν is large enough, say $\nu \geq \nu_0$, since (B) implies $p_{\nu-1} \leq p_\nu - q_\nu$. If we let $u'_n = u_n$ $(p_\nu - q_\nu < n \leq p_\nu,\ \nu = \nu_0,\ \nu_0 + 1, \ldots)$, $u'_n = 0$ otherwise, the series $\sum u'_n$ may be regarded as a subseries of $\sum u_n$ with counting function $\leq \Omega(n)$, and

$$\sum_{n=0}^{\infty} u'_n \geq \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} u_{p_\nu} q_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_{p_\nu} [\Omega(p_\nu) - \Omega(p_{\nu-1})] = +\infty,$$

so that $\Omega(n)$ is not a c.f. for $\sum u_n$.

Theorem 4. *If u_n decreases, $\Omega(n)$ is a c.f. of $\sum u_n$, and* (A) *or* (B) *holds, then $u_n = o(1/\Omega(n))$.*

[This is a generalization of the well-known theorem, proved by L. OLIVIER in 1827, that if $u_n \downarrow 0$ and $\sum u_n$ converges, then $u_n = o(1/n)$.]

Proof. We have by Theorem 3 and the hypothesis that 2(4) holds. Hence $\Omega(m)\ (u_m - u_{m+1}) + \cdots + \Omega(n)\ (u_n - u_{n+1}) \to 0$ as $m \to \infty$, $n > m$. Hence $\Omega(m)\ (u_m - u_{n+1}) \to 0$, and by proper choice of n, $\Omega(m)\,u_m \to 0$ as required.

We next prove a theorem on the representation of c.f.'s.

Theorem 5. *Let $f(x)$ be an arbitrary positive increasing function defined for $0 < x < \infty$ and satisfying*

$$2(7) \qquad \int_1^{\infty} f(x)\,x^{-2}\,dx < +\infty,$$

and let u_n be decreasing. Then

$$2(8) \qquad \Omega(n) = f(1/u_n)$$

is a c.f. of $\sum u_n$, and conversely, if $\Omega(n)$ is a c.f. of $\sum u_n$, if (A) *or* (B) *holds and if $u_n \leq M u_{n+1}$ for some constant M, we can find $f(x)$ satisfying* 2(7) *and* 2(8).

Proof. We have

$$f(1/u_n)\,(u_n - u_{n+1}) \leq \int_{u_{n+1}}^{u_n} f(1/u)\,du = \int_{1/u_n}^{1/u_{n+1}} f(x)\,x^{-2}\,dx.$$

Hence 2(7) implies

$$\sum f(1/u_n)\,(u_n - u_{n+1}) < +\infty.$$

It then follows from theorem 3 that $\Omega(n)$ as defined in 2(8) is a c.f. of $\sum u_n$. Conversely, if $\Omega(n)$ is given with conditions as noted, we write $f(1/u_n) = \Omega(n)$ and define $f(x)$ by linear interpolation. Then by theorem 4, $\Omega(n)u_n = f(1/u_n)\,u_n = o(1)$. We have also

$$\int_{1/u_n}^{1/u_{n+1}} f(x)\,x^{-2}\,dx \leq f(1/u_{n+1})\,(u_n - u_{n+1}),$$

and

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} f(1/u_{n+1})\,(u_n - u_{n+1}) &= \sum_{n=1}^{N} [f(1/u_{n+1}) - f(1/u_n)]\,u_n + O(1)\\ &\leq M \sum_{n=1}^{N} [f(1/u_{n+1}) - f(1/u_n)]\,u_{n+1} + O(1)\\ &= M \sum_{n=1}^{N} f(1/u_n)\,(u_n - u_{n+1}) + O(1).\end{aligned}$$

It now follows by theorem 3 that 2(7) holds. This proves theorem 5.

We now return to summability methods A given by 1(1), and recall 2(1), which is a sufficient condition for $\Omega(n)$ to be an a.s.f. for A. Writing $v_n = \operatorname{var}_m a_{mn}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ we have the following result.

Theorem 6. *If $v_n \downarrow 0$ and $f(x)$ satisfies the conditions of theorem 4, then*

2(9) $$\Omega(n) = f(1/v_n)$$

is an a.s.f. for the method A.

The proof is immediate. We note also that in the cases described below, where all a.s.f. of A are given by 2(1) and the inequality $v_n \leq M\,v_{n+1}$ holds, essentially all a.s.f. of A are given by 2(9). By "essentially all" we mean all satisfying (A).

3. Triangular matrices. In this section we assume $a_{mn} = 0$ $(n > m)$, and we shall find various conditions on a_{mn} under which 2(1) is necessary as well as sufficient in order that $\Omega(n)$ be an a.s.f. for A. The most useful of these will be theorem 7, since it contains a simple condition 3(4) instead of the more complicated conditions 3(5) or 3(6).

Theorem 7. *Let $A = (a_{mn})$ have the properties*

3(1) $$a_{mn} = 0 \quad (n > m), \qquad a_{nn} > 0;$$

3(2) $$a_{mn} \downarrow 0 \text{ as } m \to \infty \quad (n = 0, 1, \ldots;\ m \geq n)$$

3(3) $$\sum_{n=0}^{m} a_{mn} = 1 \quad (m = 0, 1, \ldots)$$

3(4) $$u_{n+1} \leq M\,u_n \text{ for some constant } M \geq 1 \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

where $u_n = a_{nn}$. *Then for* $\Omega(n)$ *to be an a.s.f. for* A *it is necessary (as well as sufficient) that* $\Omega(n)$ *be a c.f. for* $\sum u_n$.

Proof. Let $\{q_\nu\}$ be a sequence with $q_{\nu+1} \geq q_\nu + 2$, $\omega_q(n) \leq \Omega(n)$, $\sum u_{q_\nu} = +\infty$. Define r_ν inductively as follows. If $r_1, \ldots, r_{\nu-1}$ are already defined, consider the two sums

$$A_\nu = \sum_{\mu=1}^{\nu-1} (a_{q_\nu - 2,\, r_\mu} - a_{q_\nu - 1,\, r_\mu}),$$

$$B_\nu = \sum_{\mu=1}^{\nu-1} (a_{q_\nu - 1,\, r_\mu} - a_{q_\nu r_\mu}).$$

Choose $r_\nu = q_\nu$ or $q_\nu - 1$ according as $A_\nu \geq B_\nu$ or $A_\nu < B_\nu$. If $x_n = 1$ $(n = r_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots)$, $x_n = 0$ (otherwise), and $y_m = \sum_n a_{mn} x_n$, we shall show that $\operatorname{var} y_m = +\infty$. But $\omega_r(n) \leq \omega_q(n) + 1$, so unless $\omega_q(n) = 0$ we have

$$\omega_r(n) \leq 2\omega_q(n) \leq 2\Omega(n);$$

thus $2\Omega(n)$ is not an a.s.f. for A and so neither is $\Omega(n)$.

To prove $\operatorname{var} y_m = +\infty$, consider first a ν for which $A_\nu \geq B_\nu$. Then

$$|y_{q_\nu - 2} - y_{q_\nu - 1}| = A_\nu,$$

and by 3(2), 3(3) we have

$$B_\nu \leq \sum_{n=1}^{q_\nu - 1} (a_{q_\nu - 1,\, n} - a_{q_\nu, n}) = u_{q_\nu}.$$

Hence,

$$|y_{q_\nu - 1} - y_{q_\nu}| = u_{q_\nu} - B_\nu = u_{r_\nu} - B_\nu.$$

Similarly if $A_\nu < B_\nu$ we have

$$|y_{q_\nu - 2} - y_{q_\nu - 1}| = u_{q_\nu - 1} - A_\nu = u_{r_\nu} - A_\nu,$$

$$|y_{q_\nu - 1} - y_{q_\nu}| = B_\nu + a_{q_\nu - 1,\, q_\nu - 1} - a_{q_\nu, q_\nu - 1} \geq B_\nu.$$

Hence in either case,

$$|y_{q_\nu - 2} - y_{q_\nu - 1}| + |y_{q_\nu - 1} - y_{q_\nu}| \geq u_{r_\nu},$$

and by 3(4)

$$\operatorname{var} y_m \geq \sum_\nu u_{r_\nu} \geq M^{-1} \sum_\nu u_{q_\nu} = +\infty.$$

This completes the proof.

We mention also the following results:

Theorem 8. *Let* $A = (a_{mn})$ *have the properties:*

3(1)	$a_{mn} = 0 \quad (n > m), \qquad a_{nn} > 0;$	
3(2)	$a_{mn} \downarrow 0 \quad as \quad m \to \infty,$	for $n = 0, 1, \ldots;$ $m \geq n$
3(5)	$a_{m+1,\, n} - a_{m+2,\, n} \leq M(a_{mn} - a_{m+1,\, n})$	

for some constant M. *Let* $u_n = a_{nn}$. *Then in order that* $\Omega(n)$ *be an a.s.f. for* A, *it is necessary (as well as sufficient) that* $\Omega(n)$ *be a c.f. for* $\sum u_n$.

Theorem 9. *The above statement remains true if the condition* 3(5) *is replaced by*

3(6) $a_{mn} - a_{m+1,n}$ *is a monotone function of* n *for each* $m\,(0 \leq n \leq m)$.

We omit the proofs, which again depend on a construction of an appropriate sequence $\{x_n\}$.

4. Hausdorff Means. The method H_g is defined by the matrix $A = (a_{mn})$,

$$a_{mn} = \int_0^1 p_{mn}(t)\, dg(t),$$

where $p_{mn}(t) = \binom{m}{n} t^n (1-t)^{m-n}\,(n \leq m)$, $p_{mn}(t) = 0\ (n > m)$, and $g(t)$ is of bounded variation with $g(0) = g(0+) = 0$, $g(1) = 1$, $g(x) = \frac{1}{2}\{g(x+) + g(x-)\}$. The diagonal terms are given by

$$u_n = a_{nn} = \int_0^1 t^n\, dg(t),$$

and we shall find conditions on $g(t)$ under which $\Omega(n)$ is an a.s.f. for H_g if and only if $\Omega(n)$ is a c.f. for $\sum u_n$. We note also that by lemma 1 we have

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^1 t^{p_\nu}\, dg(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_p(n) \int_0^1 t^n (1-t)\, dg(t).$$

Hence in order that

4(1) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^1 t^{p_\nu}\, dg(t) < +\infty \quad \text{wherever} \quad \omega_p(n) \leq \Omega(n)$$

it is sufficient that

4(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n) \int_0^1 t^n (1-t)\, dg(t) < +\infty.$$

Furthermore, if (A) or (B) holds, 4(2) is necessary as well as sufficient.

Theorem 10. *Let the* HAUSDORFF *method* H_g *be defined by a generating function* $g(t)$ *which is increasing and convex. Then* $\Omega(n)$ *is an a.s.f. for* H_g *if and only if* 4(1) *holds.*

Proof. It is sufficient to show that H_g satisfies the conditions of theorem 7. Conditions 3(1), 3(3) obviously hold, and as for 3(4) we have under our assumptions that

$$u_n = \int_0^1 t^n\, dg(t) = \int_0^1 t^n g'(t)\, dt$$

which is decreasing since $g'(t) \geq 0$. It remains to show that 3(2) holds. We have

4(3) $$a_{mn} - a_{m+1,n} = \int_0^1 \{p_{mn}(t) - p_{m+1,n}(t)\}\, g'(t)\, dt.$$

Putting

$$P(x) = \int_x^1 \{p_{mn}(t) - p_{m+1,n}(t)\}\, dt$$

we obtain from 4(3),

$$a_m - a_{m+1,n} = g'(0)\,P(0) + \int_0^1 P(t)\,g(t)\,dt,$$

from which the desired result follows if we show that $P(x)$ is positive. But

$$P(0) = \int_0^1 p_{mn}(t)\,dt - \int_0^1 p_{m+1,n}(t)\,dt = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} > 0,$$

and

$$p_{mn}(t) - p_{m+1,n}(t) = p_{mn}(t)\,\frac{(m+1)\,t-k}{m+1-k}$$

is negative for $t<n/(m+1)$ and positive for $t>n/(m+1)$. Hence $P(x)$ increases on $(0, n/(m+1))$ and decreases on $(n/(m+1), 1)$. Since $P(0)>0$, $P(1)=0$, we have $P(x)\geq 0$. This proves the theorem.

A result previously obtained [6, theorem 8], that when $0<\alpha\leq 1$, $\Omega(n)$ is an a.s.f. of C_α if and only if

4(4) $$\sum n^{-1-\alpha}\Omega(n) < +\infty$$

is included in the theorem just proved. For the generating function of C_α, namely $g(t)=1-(1-t)^\alpha$, satisfies the conditions of the theorem. Moreover for the diagonal terms we have $u_n = a_{nn} \sim C n^{-\alpha}$, so condition (B) holds with $p_\nu = 2^\nu$, and 4(1) is equivalent to 4(2), which in turn is equivalent to 4(4).

5. RIESZ and ABEL means: absolute inclusion theorems. Let

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$$

be a sequence tending to $+\infty$. There is no loss of generality in supposing $\lambda_0 = 0$, since for each method to be defined, if $\lambda_0 > 0$ we obtain an absolutely equivalent method by changing λ_0 to 0. The RIESZ means are defined by

$$R^\varkappa(\omega) = \sum_{\lambda_n<\omega}\left(1-\frac{\lambda_n}{\omega}\right)^\varkappa x_n = \frac{X^\varkappa(\omega)}{\omega^\varkappa},$$

where

$$X^\varkappa(\omega) = \sum_{\lambda_n<\omega}(\omega-\lambda_n)^\varkappa x_n.$$

If $R^\varkappa(\omega)\to s$ as $\omega\to\infty$ through continuous values, the series $\sum x_n$ is said to be $R(\lambda_n, \varkappa)$-summable to s. If $\lambda(\omega)$ is a continuous monotone extension of λ_n, this is equivalent to asserting that

$$\varrho^\varkappa(\omega) = \sum_{n<\omega}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda(\omega)}\right)^\varkappa x_n \to s;$$

and if we now restrict ω to integral values, we obtain the discrete means

5(1)
$$\begin{cases} \varrho_m^\varkappa = \displaystyle\sum_{n=0}^{m}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{m+1}}\right)^\varkappa x_n \\ \qquad = \displaystyle\sum_{n=0}^{m}\frac{(\lambda_{m+1}-\lambda_n)^\varkappa - (\lambda_{m+1}-\lambda_{n+1})^\varkappa}{\lambda_{m+1}^\varkappa}\,s_n, \end{cases}$$

where $s_n = x_0 + \cdots + x_n$. If $\varrho_m^{\varkappa} \to s$ as $m \to \infty$, the series $\sum x_n$ or the sequence $\{s_n\}$ is said to be $R'(\lambda_n, \varkappa)$ summable to s. The diagonal elements in the transformation 5 (1) are all different from zero. Since $\lambda_0 = 0$, the sum of elements of each row is one.

The ABEL means are defined by

$$\sigma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} x_n;$$

if $\sigma(t) \to s$ as $t \downarrow 0$, the series $\sum x_n$ is said to be $A(\lambda_n)$-summable to s. It is well-known that (compare [3a, theorems 8 and 9])

$$5\,(2) \qquad \sum e^{-\lambda_n t} x_n = \sum (e^{-\lambda_n t} - e^{-\lambda_{n+1} t})\, s_n$$

provided one of these two series converges for each $t > 0$.

The series $\sum x_n$ is absolutely $R(\lambda_n, \varkappa)$-summable [$|R(\lambda_n, \varkappa)|$-summable] if $R^{\varkappa}(\omega)$ is of bounded variation on $(0, +\infty)$, and there are similar definitions for $R'(\lambda_n, \varkappa)$ and $A(\lambda_n)$. If $\varkappa = 1$, the discrete and the continuous RIESZ means are absolutely equivalent. For if $m \leq \omega \leq m+1$, then

$$\varrho_m^1 - \varrho^1(\omega) = \left\{ \frac{1}{\lambda(\omega)} - \frac{1}{\lambda_{m+1}} \right\} \sum_{n=0}^{m} \lambda_n x_n .$$

Thus $\varrho(\omega)$ varies monotonely when ω changes from m to $m+1$, and is of bounded variation on $(0, +\infty)$ if and only if $\{\varrho_m\}$ is of bounded variation.

The following two theorems about the absolute inclusion of the RIESZ and ABEL means will be needed in what follows.

Theorem 11. *If $\sum x_n$ is $|R(\lambda_n, \varkappa)|$-summable to s, it is $|R(\lambda_n, \varkappa+\mu)|$-summable to s, for every $\mu > 0$.*

Proof. A classical theorem [2, theorem 16] states that $R(\lambda_n, \varkappa) < R(\lambda_n, \varkappa+\mu)$, and gives the relation

$$X^{\varkappa+\mu} = H \int_0^{\omega} X^{\varkappa}(u)\, (\omega - u)^{\mu-1}\, du, \qquad H = \frac{\Gamma(\mu+\varkappa+1)}{\Gamma(\varkappa+1)\,\Gamma(\mu)} .$$

Hence,

$$R^{\varkappa+\mu}(\omega) = H\, \omega^{-\varkappa-\mu} \int_0^{\omega} u^{\varkappa} R^{\varkappa}(u)\, (\omega - u)^{\mu-1}\, du$$

$$= H \int_0^{1} v^{\varkappa} R^{\varkappa}(\omega v)\, (1 - v)^{\mu-1}\, dv .$$

We have only to show that $R^{\varkappa+\mu}(\omega)$ is of bounded variation if $R^{\varkappa}(\omega)$ is of bounded variation, or, what is sufficient, that $R^{\varkappa+\mu}(\omega)$ is monotone if $R^{\varkappa}(\omega)$ is monotone. This holds since $v^{\varkappa}(1-v)^{\mu-1} \geq 0$.

Theorem 12. *If $\sum x_n$ is $|R(\lambda_n, \varkappa)|$-summable to s, and $\sum e^{-\lambda_n t} x_n$ converges for each $t > 0$, then $\sum x_n$ is $|A(\lambda_n)|$-summable to s.*

Proof. In view of [2, theorems 23–24] we have under our assumptions that

$$\sigma(t) = \sum e^{-\lambda_n t} x_n = \frac{1}{\Gamma(\varkappa+1)} \int_0^\infty t^{\varkappa+1} e^{-tu} X^\varkappa(u)\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\varkappa+1)} \int_0^\infty v^\varkappa e^{-v} R^\varkappa(v/t)\, dv,$$

and the proof is concluded as before.

We use the opportunity to correct a slight oversight in [6, theorems 1–4, pp. 238–241], where the statement that $R(\lambda_n, \varkappa)$-summability of a series $\sum a_n$ implies its $A(\lambda_n)$-summability (which follows from [2, theorems 23, 24]) was used without the necessary additional assumption that $\sum a_n e^{-\lambda_n x}$ converges for $x > 0$. However, in theorems 1 and 3 on s.f.1, the s_n are bounded and we use the relation 5(2).

In theorem 2 on s.f.2, $s_n = O(\lambda_n/\Delta\lambda_n)$, $\Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n$, hence $a_n = O(\lambda_n/\Delta\lambda_n)$, and $\sum a_n e^{-\lambda_n x}$ converges because $\lambda_n \geq \delta n$ for some $\delta > 0$. Finally, in theorem 4, the assumption $\lambda_n/\log n \to \infty$ should be added in the case of $A(\lambda_n)$; this is sufficient to ensure the convergence of $\sum a_n e^{-\lambda_n x}$.

We shall now indicate conditions under which an arbitrary matrix $A = (a_{mn})$ has the inclusion property $|A| > |R(\lambda_n, 1)|$, (that is, every $|R(\lambda_n, 1)|$-summable sequence is $|A|$-summable to the same value). This is equivalent to $|A| > |R'(\lambda_n, 1)|$. The following theorem is obtained by expressing the A-transform of a sequence s_n by means of its $R'(\lambda_n, 1)$ means and applying a theorem of HAHN [1, theorem XI]:

Theorem 13. *In order that* $|A| > |R(\lambda_n, 1)|$ *it is necessary and sufficient that*

5(3) $$A \text{ is absolutely regular}$$

5(4) $$\operatorname{var}_m a_{mn} \leq M \Delta\lambda_n/\lambda_n \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

for some constant $M \geq 0$.

We note a corollary.

Theorem 14. *Let* $A = (a_{mn})$ *be regular, absolutely regular, triangular, and such that* a_{mn} *decreases for each fixed* n *and* $m \geq n$ *and increases for each fixed* m *and* $n \leq m$. *Let* $\Delta\lambda_n$ *be increasing and* $\Delta\lambda_n/\lambda_n$ *decreasing to zero. Then the relations* $|R(\lambda_n, 1)| < |A|$ *and* $R(\lambda_n, 1) < A$ *are equivalent.*

Proof. The condition

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\Delta\lambda_n} |a_{mn} - a_{m,n+1}| \leq M \quad (m = 0, 1, \ldots)$$

is given in [7, theorem 10] as necessary and sufficient for $R(\lambda_n, 1) < A$. It is easily verified that under the conditions of the present theorem, 6(4) and 5(4) are both equivalent to

$$\lambda_n a_{nn}/\Delta\lambda_n \leq M'.$$

This completes the proof.

6. RIESZ means: absolute summability functions. We treat the cases $\varkappa \geq 1$ and $0<\varkappa<1$ separately.

Theorem 15. *If* (i) $\varkappa \geq 1$, (ii) $u_n = \Delta\lambda_n/\lambda_n$ *decreases to zero*, (iii) $\Delta\lambda_n$ *is non decreasing, then* $\Omega(n)$ *is an a.s.f. for* $R(\lambda_n, \varkappa)$ *if and only if* $\Omega(n)$ *is a c.f. for* $\sum u_n$.

Proof. It follows easily from 2(1) that for $\Omega(n)$ to be an a.s.f. for $R'(\lambda_n, 1)$, hence also for $R(\lambda_n, 1)$ and $R(\lambda_n, \varkappa)$ (see theorem 11), it is sufficient for $\Omega(n)$ to be a c.f. for $\sum \Delta\lambda_n/\lambda_{n+1}$. It will be shown in theorem 19 that under the assumptions (ii), (iii), for $\Omega(n)$ to be an a.s.f. for $A(\lambda_n)$ it is necessary that $\Omega(n)$ be a c.f. for $\sum \Delta\lambda_n/\lambda_n$. The result then follows by theorem 12; we note that by 5(2) and the definition of a.s.f., the conditions of theorem 12 are satisfied; moreover by (ii), $\lambda_{n+1}/\lambda_n \downarrow 1$, so that the series $\sum \Delta\lambda_n/\lambda_n$ and $\sum \Delta\lambda_n/\lambda_{n+1}$ have identical c.f. In the next theorem we denote $(\Delta\lambda_n/\lambda_{n+1})^\varkappa$ by w_n.

Theorem 16. *Assume that* (i) $0<\varkappa<1$, (ii) $w_{n+1} \leq M w_n$ $(n=0, 1, \ldots)$ *for some constant* M. *Then for* $\Omega(n)$ *to be an a.s.f. for* $R(\lambda_n, \varkappa)$ *or* $R'(\lambda_n, \varkappa)$ *it is necessary and sufficient that* $\Omega(n)$ *be a c.f. for* $\sum w_n$.

Proof. We write the $R(\lambda_n, \varkappa)$ transformation in the sequence-to-sequence form,

$$\varrho^\varkappa(\omega) = \sum_{n<\omega} a_n(\omega)\, s_n,$$

where

$$a_n(\omega) = \begin{cases} 0 & (\omega \leq n) \\ \left(1 - \dfrac{\lambda_n}{\lambda(\omega)}\right)^\varkappa & (n < \omega \leq n+1) \\ \left(1 - \dfrac{\lambda_n}{\lambda(\omega)}\right)^\varkappa - \left(1 - \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda(\omega)}\right)^\varkappa & (n+1 < \omega). \end{cases}$$

We shall show that $a_n(\omega)$ as a function of ω is decreasing for $\omega \geq n+1$; to do this it suffices to show that

$$f(x) = \left(1 - \frac{a}{x}\right)^\varkappa - \left(1 - \frac{b}{x}\right)^\varkappa$$

is a decreasing function of x for $x \geq b$, $0 \leq a < b$, or that

$$F(t) = (1 - a\,t)^\varkappa - (1 - b\,t)^\varkappa$$

is an increasing function of t for $0<t \leq 1/b$. This holds since for $0<\varkappa<1$ we have

$$F'(t) = \varkappa\{b(1 - b\,t)^{\varkappa-1} - a(1 - a\,t)^{\varkappa-1}\} > 0.$$

Thus we see that $\operatorname{var} a_n(\omega) = 2w_n$, and for $\Omega(n)$ to be an a.s.f. for $R(\lambda_n, \varkappa)$, and hence for $R'(\lambda_n, \varkappa)$, it is sufficient that $\Omega(n)$ be a c.f. for $\sum w_n$. But the diagonal terms of the matrix of the discrete sequence-to-sequence method are also given by w_n [see 5(1)], hence by (ii) and theorem 7, it is also necessary that $\Omega(n)$ be a c.f. for $\sum w_n$. This proves the theorem.

We observe that in some cases the conditions can be put in a different form. If $w_n \downarrow 0$ and (A) or (B) holds, then for $\Omega(n)$ to be an a.s.f. for $R(\lambda_n, \varkappa)$

or $R'(\lambda_n, x)$ it is necessary and sufficient that

6(1) $$\sum \Omega(n)\,(w_n - w_{n+1}) < +\infty;$$

this follows from theorem 2. If w_n is not monotonic, but is of bounded variation and

6(2) $$\operatorname{var}_{p \geq n} w_p \leq M\, w_n$$

for some constant M, we can still get a similar result. For if 6(2) holds we can show as in lemma 1 that $\sum u_{p\nu} < +\infty$ if and only if $\sum \omega_p(n)\,|w_n - w_{n+1}| < +\infty$. Then if (A) holds, 6(1) may be replaced by

6(3) $$\sum \Omega(n)\,|w_n - w_{n+1}| < +\infty$$

and in any case 6(3) is sufficient for $\Omega(n)$ to be an a.s.f. for $R(\lambda_n, \dot{x})$.

We remark here that the condition $\Delta\lambda_n/\lambda_{n+1} \to 0$ is necessary and sufficient for $R'(\lambda_n, 1)$ to possess a.s.f., and therefore sufficient for $|R'(\lambda_n, 1)|$ to be stronger than absolute convergence. If we apply MEARS' conditions for absolute regularity [8] to the inverse transformation $(R'(\lambda_n, 1))^{-1}$, we find that the exact condition for $|R(\lambda_n, 1)|$ to be stronger than absolute convergence is $\underline{\lim}\, \Delta\lambda_n/\lambda_{n+1} = 0$. We conclude this section with the following theorems.

Theorem 17. *A method $A = (a_{mn})$, for which $\sum |a_{0n}| < +\infty$, has a.s.f. if and only if $|A| > |R(\lambda_n, 1)|$ for some method $R(\lambda_n, 1)$ such that $\Delta\lambda_n/\lambda_{n+1} \to 0$.*

Proof. By [6, theorem 7], the method A has a.s.f. if and only if

$$v_n = \operatorname{var}_m a_{mn} \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

We can find a sequence λ_n such that $\lambda_n \uparrow +\infty$, $\Delta\lambda_n/\lambda_{n+1} \to 0$, $v_n \leq M\,\Delta\lambda_n/\lambda_n$. To do this, we need only choose w_n so that $\sum w_n = +\infty$, $w_n \to 0$, $v_n < w_n$, and then define $\lambda_n = \exp(w_0 + \cdots + w_{n-1})$. This gives $\Delta\lambda_n = \lambda_n(e^{w_n} - 1) \sim \lambda_n w_n$, and the result now follows by theorem 13.

Theorem 18. *If $\Omega(n) = o(n)$, $\Omega(n)$ increases, then there is a $R(\lambda_n, 1)$ method such that $\Omega(n)$ is an a.s.f. of $R(\lambda_n, 1)$.*

Proof. Choose $\delta_n \geq 0$ with $\sum n\,\delta_n = +\infty$, $\sum \Omega(n)\,\delta_n < +\infty$, and define $c_n = \delta_n + \delta_{n+1} + \cdots$. Then $c_n \downarrow 0$, $\sum c_n = \sum n\,\delta_n = +\infty$, but $\sum (c_n - c_{n+1})\,\Omega(n) < +\infty$. Taking $\lambda_n = \exp(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)$, we deduce that 6(3) with $w_n = \Delta\lambda_n/\lambda_{n+1}$ is fulfilled and hence $\Omega(n)$ is an a.s.f. of $R(\lambda_n, 1)$.

7. ABEL means: absolute summability functions. The ABEL means have been defined in § 5. We shall write

$$\sigma(t) = \sum a_n(t)\, s_n, \qquad a_n(t) = e^{-\lambda_n t} - e^{-\lambda_{n+1} t}.$$

It is easily verified that for any fixed $n \geq 1$, $a_n(t)$ has a single maximum at a certain value τ_n of t between $1/\lambda_{n+1}$ and $1/\lambda_n$. This maximum is given by

$$a_n(\tau_n) = e^{-\lambda_n \tau_n}(1 - e^{-\tau_n \Delta\lambda_n}) < e^{-\lambda_n \tau_n}\, \tau_n\, \Delta\lambda_n < \Delta\lambda_n/\lambda_n.$$

We denote $\Delta\lambda_n/\lambda_n$ by u_n. Then in order that

7(1) $\Omega(n)$ is an a.s.f. for $A(\lambda_n)$,

it is sufficient that

7(2) $$\Omega(n) \text{ is a c.f. for } \sum u_n.$$

If $u_n \downarrow 0$, it follows from theorem 2 that a sufficient condition for 7(2) to hold is that

7(3) $$\sum \Omega(n)\,(u_n - u_{n+1}) < +\infty.$$

Under assumptions described below, we shall show that 7(3) is a necessary condition for 7(1), and so 7(1), 7(2), 7(3) are equivalent. As the $A(\lambda_n)$ method is not defined by a triangular matrix, a more delicate analysis is required than in the preceding theorems.

Theorem 19. *If* (i) $u_n = \Delta\lambda_n/\lambda_n$ *decreases to zero,* (ii) $\Delta\lambda_n$ *is increasing, then* $\Omega(n)$ *is an a.s.f. for* $A(\lambda_n)$ *if and only if* $\Omega(n)$ *is a c.f. for* $\sum u_n$ *and if and only if* 7(3) *holds.*

[In particular, (i) and (ii) are satisfied for ABEL's method A, for which $\lambda_n = n$; then 7(3) is equivalent to $\sum n^{-2}\Omega(n) < +\infty$.]

Proof. We choose $r_1 = 1$ and the r_ν inductively so that $r_{\nu+1}$ is the first index satisfying $5\lambda_{r_\nu} < \lambda_{r_{\nu+1}}$. Then we shall have

$$5\lambda_{r_\nu} < \lambda_{r_{\nu+1}} = 5\varrho_\nu \lambda_{r_\nu}, \quad \varrho_\nu \to 1, \quad \varrho_\nu > 1.$$

Let $\varrho = \max \varrho_\nu$, and $p_\nu = r_{2\nu}$. Then by (ii),

7(4) $$u_{p_\nu} = \frac{\Delta\lambda_{p_\nu}}{\lambda_{p_\nu}} \geq \frac{\Delta\lambda_{p_{\nu-1}}}{25\varrho^2\lambda_{p_{\nu-1}}} = \frac{1}{25\varrho^2}\,u_{p_{\nu-1}}.$$

Let $q_\nu = \Omega(p_\nu) - \Omega(p_{\nu-1})$. We write $\lambda(r_\nu)$ for λ_{r_ν}, and

$$f_\nu(t) = \sum_{n=p_\nu}^{p_\nu+q_\nu-1} a_n(t),$$

$$t_\nu = \frac{1}{\lambda(r_\nu)},$$

so that

$$t_{2\nu} = \frac{1}{\lambda(r_{2\nu})} = \frac{1}{\lambda(p_\nu)},$$

and

$$\frac{1}{5\varrho_\nu\lambda(p_\nu)} = \frac{1}{\lambda(r_{2\nu+1})} = t_{2\nu+1} < \frac{1}{5\lambda(r_{2\nu})} = \frac{1}{5\lambda(p_\nu)}.$$

We shall assume that $\Omega(n)$ is an a.s.f. for $A(\lambda_n)$, but that 7(3) does not hold. The function $\Omega(n)$ is also a s.f.f. for $A(\lambda_n)$ and by [5, theorem 1, 2.3 (2)] we see that $f_\nu(t_{2\nu}) \to 0$ as $\nu \to \infty$.

We have also

7(5) $$\begin{cases} f_\nu(t_{2\nu}) = e^{-\lambda(p_\nu)t_{2\nu}} - e^{-\lambda(p_\nu+q_\nu)t_{2\nu}} \\ \qquad = e^{-\lambda(p_\nu)t_{2\nu}}\{1 - e^{-[\lambda(p_\nu+q_\nu)-\lambda(p_\nu)]t_{2\nu}}\} \\ \qquad = e^{-1}\{1 - e^{-[\lambda(p_\nu+q_\nu)-\lambda(p_\nu)]/\lambda(p_\nu)}\}; \end{cases}$$

hence we obtain that

7(6) $$\frac{\lambda(p_\nu+q_\nu)-\lambda(p_\nu)}{\lambda(p_\nu)} = \Delta_\nu \to 0 \quad \text{as} \quad \nu \to +\infty.$$

This implies that $\lambda(p_\nu+q_\nu)/\lambda(p_\nu)\to 1$, and since $\lambda(p_{\nu+1})>25\lambda(p_\nu)$ we obtain $p_\nu+q_\nu<p_{\nu+1}$ for all large ν. From this together with 7(4) we have, as in the proof of theorem 3 [see equation 2(6)] that

$$\sum q_\nu u_{p_\nu}=+\infty. \tag{7(7)}$$

Now let $x_n=1$ for $p_\nu\leq n<p_\nu+q_\nu$ and ν so large that the intervals $(p_\nu, p_\nu+q_\nu)$ do not overlap and $x_n=0$ otherwise, and let $y(t)=\sum a_n(t)\,x_n$. The non-vanishing x_n's have counting function $\leq\Omega(n)$, but we shall show that $y(t)$ is not of bounded variation, and thus obtain a contradiction to our assumption that $\Omega(n)$ is an a.s.f. We have

$$y(t)=\sum_\mu f_\mu(t).$$

As already observed, each $a_n(t)$ has its maximum at a value of t between $1/\lambda_{n+1}$ and $1/\lambda_n$. Hence $f_\mu(t_{2\nu})>f_\mu(t_{2\nu+1})$ for $\mu<\nu$. Since $f_\mu(t)\geq 0$ for each μ, t, we have

$$y(t_{2\nu})-y(t_{2\nu+1})>f_\nu(t_{2\nu})-f_\nu(t_{2\nu+1})-f_{\nu+1}(t_{2\nu+1})-\cdots. \tag{7(8)}$$

We do not know whether the last expression is always positive, but we shall show that it is positive for a sufficient number of values of ν to make the sum taken over these values equal to $+\infty$, and from this it will follow that var $y(t)=+\infty$.

For all sufficiently large values of ν, the following estimations hold. First, by 7(5) and 7(6),

$$f_\nu(t_{2\nu})>\tfrac{1}{8}\Delta_\nu.$$

Next,

$$f_\nu(t_{2\nu+1})=e^{-\lambda(p_\nu)t_{2\nu+1}}\{1-e^{-[\lambda(p_\nu+q_\nu)-\lambda(p_\nu)]t_{2\nu+1}}\}<\frac{\lambda(p_\nu+q_\nu)-\lambda(p_\nu)}{5\lambda(p_\nu)}=\frac{1}{5}\Delta_\nu,$$

so that

$$f_\nu(t_{2\nu})-f_\nu(t_{2\nu+1})>\tfrac{1}{8}\Delta_\nu\geq\tfrac{1}{8}q_\nu u(p_\nu)$$

[writing $u(p_\nu)$ for u_{p_ν}].

Now $a_n(t)$ as a function of n is decreasing if $\lambda_n>1/t$. For we may write $a_n(t)=e^{-\lambda_n t}(1-e^{-t\Delta\lambda_n})=e^{-\lambda_n t}(1-e^{-t\varepsilon_n\lambda_n})$, $\varepsilon_n\downarrow 0$. Consider the function $\varphi_\varepsilon(\mu)=e^{-\mu}(1-e^{-\varepsilon\mu})$. For fixed positive ε, $\varphi_\varepsilon(\mu)$ is decreasing if $\mu>1$, whence *a fortiori*, $\varphi_\varepsilon(\mu)$ is decreasing if $\mu>1$ and $\varepsilon\downarrow 0$. This proves the statement just made. We have therefore

$$\begin{aligned}
f_{\nu+k}(t_{2\nu+1}) &\leq q_{\nu+k}\{e^{-\lambda(p_{\nu+k})t_{2\nu+1}}-e^{-\lambda(p_{\nu+k}+1)t_{2\nu+1}}\}\\
&=q_{\nu+k}\,e^{-\lambda(p_{\nu+k})t_{2\nu+1}}\{1-e^{-[\lambda(p_{\nu+k}+1)-\lambda(p_{\nu+k})]t_{2\nu+1}}\}\\
&=q_{\nu+k}\,e^{-\lambda(p_{\nu+k})/[5\varrho_\nu\lambda(p_\nu)]}\,\frac{\Delta\lambda(p_{\nu+k})}{5\lambda(p_\nu)}\\
&<1_{\nu+k}\,e^{-\lambda(p_{\nu+k})/[5.1\,\lambda\,p_\nu)]}\,\frac{\lambda(p_{\nu+k})}{5\lambda(p_\nu)}\,u(p_{\nu+k}).
\end{aligned}$$

We now have from (8) for all sufficiently large values of ν,

$$\left\{\begin{aligned}
y(t_{2\nu})-y(t_{2\nu+1})\geq{}&\tfrac{1}{8}q_\nu u(p_\nu)-5.1\,e^{-4.9}q_{\nu+1}u(p_{\nu+1})\\
&-(5.1)^3\,e^{-(4.9)^2}q_{\nu+2}\,u(p_{\nu+2})-\cdots.
\end{aligned}\right. \tag{7(9)}$$

We now introduce the following lemma:

Lemma 2. *Let $\beta_1, \beta_2, \ldots$ be a sequence of positive numbers, tending to zero, with $\sum \beta_\nu = +\infty$; let $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ be a sequence of positive numbers such that*

$$\alpha_p \alpha_q \leq \alpha_1^{p+q} \quad (p, q = 1, 2, \ldots)$$

and

$$\alpha_1 < \tfrac{1}{2}.$$

Let $c_\nu = \beta_\nu - \alpha_1 \beta_{\nu+1} - \alpha_2 \beta_{\nu+2} - \cdots$, and let $c_\nu^+ = max(c_\nu, 0)$. Then $\sum_\nu c_\nu^+ = +\infty$.

Proof. We find first an expression for the β_ν in terms of the c_ν. We write

$$\beta_\nu = c_\nu + \alpha_1 \beta_{\nu+1} + \alpha_2 \beta_{\nu+2} + \cdots,$$

and substitute for $\beta_{\nu+1}$ the expression obtained by changing ν to $\nu+1$ in the same equation, viz.,

$$\beta_{\nu+1} = c_{\nu+1} + \alpha_1 \beta_{\nu+2} + \alpha_2 \beta_{\nu+3} + \cdots;$$

After that, we replace $\beta_{\nu+2}$ by the corresponding expression, and so on. After the p-th step, we shall have

7(10) $$\beta_\nu = c_\nu + \delta_1 c_{\nu+1} + \cdots + \delta_p c_{\nu+p} + \sum_{q>p} \gamma_{pq} \beta_{\nu+q}.$$

We have clearly the recursive relation

$$\gamma_{pq} = \gamma_{p-1,q} + \gamma_{p-1,p} \alpha_{q-p},$$

whence it follows by induction that

$$0 \leq \gamma_{pq} \leq 2^p \alpha_1^q.$$

Therefore if $\varepsilon_n = \max_{\nu \geq n} \beta_\nu$, we have

$$0 \leq \sum_{q>p} \gamma_{pq} \beta_{\nu+q} \leq \varepsilon_{\nu+p} \sum_{q>p} \alpha_1^{q-p} \to 0,$$

as $p \to \infty$. Passing in 7(10) to the limit, we obtain

7(11) $$\beta_\nu = c_\nu + \delta_1 c_{\nu+1} + \delta_2 c_{\nu+2} + \cdots + \delta_p c_{\nu+p} + \cdots,$$

where $\delta_p = \gamma_{p-1,p}$, hence

$$0 \leq \delta_p \leq (2\alpha_1)^p = \zeta^p \quad (0 < \zeta < 1).$$

We have from 7(11) that

$$\sum_{\nu=1}^{N} \beta_\nu = c_1 + c_2(1+\delta_1) + c_3(1+\delta_1+\delta_2) + \cdots + c_N(1+\delta_1+\cdots+\delta_{N-1}) + \\ + \cdots + c_{N+k}(\delta_k + \delta_{k+1} + \cdots + \delta_{N+k-1}) + \cdots.$$

Now suppose if possible that $\sum c_\nu^+ = M < +\infty$. Since the δ's are all positive, and $\sum \delta_k = \Delta < +\infty$, we have $\sum_{\nu=1}^{N} \beta_\nu \leq M\Delta$, so that $\sum \beta_\nu$ converges, contrary to hypothesis. This proves the lemma.

It is now clear that c_ν may be taken as the right hand side of 7(9) with $\beta_\nu = \frac{1}{8}(q_\nu u_{p_\nu})$, $\alpha_1 = 8(5.1)\, e^{-4.9}$, $\alpha_2 = 8(5.1)^3\, e^{-4.9)^2}$, and so forth.

Then $\sum c_\nu^+ = +\infty$ implies that var $y(t) = +\infty$, and with this the theorem is proved.

References.

[1] Hahn, H.: Über Folgen linearer Operationen. Mh. Math. Phys. **32**, 3—88 (1922). — [2] Hardy, G. H., and M. Riesz: The General Theory of Dirichlet Series. Cambridge 1915. — [3] Knopp, K., and G. G. Lorentz: Beiträge zur absoluten Limitierung. Arch. d. Math. **2**, 10—16 (1949). — [3a] Lorentz, G. G.: Über Limitierungsverfahren, die von einem Stieltjes-Integral abhängen. Acta Math. **79**, 255—272 (1947). — [4] Lorentz, G. G.: A contribution to the theory of divergent sequences. Acta Math. **80**, 167—190 (1948). — [5] Lorentz, G. G.: Direct theorems on methods of summability. Canad. J. Math. **1**, 305—319 (1949). — [6] Lorentz, G. G.: Direct theorems on methods of summability. II. Canad. J. Math. **3**, 236—256 (1951). — [7] Lorentz, G. G.: Riesz methods of summation and orthogonal series. Trans. Roy. Soc. Canada, III. Ser. **45**, 19—32 (1951). — [8] Mears, F. M.: Absolute regularity and the Nörlund mean. Ann. of Math. **38**, 594—601 (1937).

Wayne University, Detroit, and Carleton College, Ottawa.

(Eingegangen am 22. Juni 1953.)

VOLKMANN, B.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 247—254 (1953)

Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. II.*)

Von
BODO VOLKMANN.

1. Für eine Zahl ϱ mit $0<\varrho\leq 1$ und der g-adischen Entwicklung

$$(1)\qquad \varrho=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{e_i}{g^i}\qquad (e_i \text{ ganz};\ 0\leq e_i<g;\ \text{unendlich viele } e_i\neq 0;\ g\geq 2)$$

sei $A_j(\varrho,n)=A_j(n)$ die Anzahl der Ziffern e_i mit $i\leq n$, die den Wert j haben. Dann gibt es zu vorgegebenen Zahlen $\zeta_0,\zeta_1,\ldots,\zeta_{g-1}$ mit $0\leq\zeta_j\leq 1$ und $\sum_{j=0}^{g-1}\zeta_j=1$ immer eine Menge $G(\zeta_0,\ldots,\zeta_{g-1})$ von Zahlen ϱ, bei denen die relativen Häufigkeiten $\frac{A_j(\varrho,n)}{n}$ der g vorhandenen Ziffern den Bedingungen

$$(2)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{A_j(\varrho,n)}{n}=\zeta_j\qquad (j=0,\ldots,g-1)$$

genügen. Es ist seit langem[1]) bekannt, daß das LEBESGUEsche Maß von $G(\zeta_0,\ldots,\zeta_{g-1})$ Eins oder Null ist, je nachdem ob sämtliche ζ_j den Wert $1/g$ haben, also alle g Ziffern asymptotisch gleich oft auftreten, oder nicht. Dieses Ergebnis wurde 1948 von H. G. EGGLESTON[2]) verschärft durch den Nachweis, daß die gebrochene Dimension

$$(3)\qquad \dim G(\zeta_0,\ldots,\zeta_{g-1})=\frac{\sum_{j=0}^{g-1}\zeta_j\log\zeta_j}{\log\frac{1}{g}}$$

ist.

In Nr. 2 und 3 der vorliegenden Arbeit wird (3) folgendermaßen verallgemeinert: Die Menge $\mathfrak{G}=\{0,1,\ldots,g-1\}$ werde so in $m\geq 1$ Mengen $\mathfrak{G}_1,\ldots,\mathfrak{G}_m$ zerlegt, daß jede Ziffer $j\in\mathfrak{G}$ genau einem $\mathfrak{G}_\mu$ angehört. Man läßt dann die Unterscheidung zwischen Ziffern aus der gleichen Menge $\mathfrak{G}_\mu$ fortfallen und betrachtet bei festem ϱ die Anzahlen $A_\mu(\varrho,n)$ der Ziffern e_i mit $e_i\leq n$ und

*) Teil I dieser Arbeit, im folgenden mit I zitiert, wurde in Math. Z. **58**, 284—287 (1953) veröffentlicht. Die dort verwendete Terminologie und Schreibweise [illegible] hier beibehalten. In Gl. (2) muß es „$e_i\geq f_i$" statt „$e_i\leq f_i$" heißen.

[1]) Siehe BOREL, E.: Les probabilités denombrables et leurs applications arithmétiques, Rend. Circ. Mat. Palermo **27**, 247—271 (1909), wo der Beweis für den Fall $g=2$ ausgeführt ist.

[2]) EGGLESTON, H. G.: The fractional dimension of a set defined by decimal properties. Quart. J. Math. **20**, 31—36 (1949).

$i \in \mathfrak{G}_\mu$. Bezeichnet man bei gegebenen Zahlen ζ_μ mit $0 \leq \zeta_\mu \leq 1$ und $\sum_{\mu=1}^{m} \zeta_\mu = 1$ die Mengen der Zahlen ϱ, für die

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_\mu(\varrho, n)}{n} = \zeta_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{4}$$

gilt, mit $G = G(\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_m; \zeta_1, \ldots, \zeta_m)$, so gilt der

Satz 1. *Die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{G}_\mu$ sei w_μ $(\mu = 1, \ldots, m)$. Dann ist die gebrochene Dimension von G*

$$\dim G(\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_m; \zeta_1, \ldots, \zeta_m) = \frac{\sum_{\mu=1}^{m} \zeta_\mu \log \frac{\zeta_\mu}{w_\mu}}{\log \frac{1}{g}} = \delta.$$

Der nachfolgende Beweis stellt eine Kombination von Methoden dar, wie sie einerseits EGGLESTON zum Beweis von (3) und andererseits der Verfasser[3]) bei Untersuchungen im Fall $g = 2$ angewendet haben. Mit der gleichen Beweisanordnung wird in Nr. 4 für den Fall, daß in (3) alle ζ_μ bis auf eines verschwinden und folglich $\dim G = 0$ wird, eine gewisse Erweiterung von (3) bewiesen, die wiederum in Nr. 5 für den Fall $g = 2$ noch etwas verschärft wird.

2. Zum *Beweis von Satz 1* zeigen wir zunächst

$$\dim G \leq \delta. \tag{5}$$

Die Menge der ϱ, die den Bedingungen

$$\zeta_\mu - \varepsilon \leq \frac{A_\mu(\varrho, n)}{n} \leq \zeta_\mu + \varepsilon \qquad (\mu = 1, \ldots, m;\ \varepsilon > 0) \tag{6}$$

genügen, werde mit $T_n(\varepsilon)$ bezeichnet. Dann läßt sich $T_n(\varepsilon)$ in eine gewisse Anzahl $h_n(\varepsilon)$ von Intervallen der Form $\left(\frac{k}{g^n}, \frac{k+1}{g^n}\right)$ zerlegen, und zwar ist

$$h_n(\varepsilon) = \sum \frac{n!}{t_1! \ldots t_m!} w_1^{t_1} \ldots w_m^{t_m}, \tag{7}$$

wobei die Summation über alle m-Tupel $t_1, \ldots, t_m$ mit

$$\zeta_\mu - \varepsilon \leq \frac{t_\mu}{n} \leq \zeta_\mu + \varepsilon \ (\mu = 1, \ldots, m) \quad \text{und} \quad \sum_{\mu=1}^{m} t_\mu = n$$

zu erstrecken ist. Denn es gibt $\frac{n!}{t_1! \ldots t_m!}$ Möglichkeiten, t_1 bzw. $t_2, \ldots, t_m$ Ziffern der m Mengen $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_m$ auf n Stellen zu verteilen, und bei einer solchen Verteilung kann an jeder der t_μ Stellen, die für Ziffern aus $\mathfrak{G}_\mu$ vorgesehen werden, jede der w_μ vorhandenen Ziffern stehen.

Da die Grenzwerte ζ_μ die Summe Eins haben und folglich nicht alle verschwinden, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\zeta_m > 0$ angenommen werden. Sind dann Q_1 und Q_2 zwei Summanden von (7), etwa

$$Q_1 = \frac{n!}{t_1'! \ldots t_m'!} w_1^{t_1'} \ldots w_m^{t_m'} \quad \text{und} \quad Q_2 = \frac{n!}{t_1''! \ldots t_m''!} w_1^{t_1''} \ldots w_m^{t_m''},$$

[3]) VOLKMANN, B.: Über Klassen von Mengen natürlicher Zahlen. J. reine angew. Math. **190**, 199—230, § 8 (1952).

für die es einen Index $\sigma<m$ gibt, so daß $t'_\sigma=t''_\sigma-1$, $t'_m=t''_m+1$ und $t'_\mu=t''_\mu$ für alle übrigen μ ist, so ist

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{t''_\sigma w_m}{t'_m w_\sigma}\leq\frac{(\zeta_\sigma+\varepsilon)\,w_m}{(\zeta_m-\varepsilon)\,w_\sigma}. \tag{8}$$

Wegen $\zeta_m>0$ wird somit bei genügend kleinem ε sicher $\frac{Q_1}{Q_2}<K_1$, wenn

$$K_1>\max_{\sigma=1,\ldots,m-1}\frac{\zeta_\sigma w_m}{\zeta_m w_\sigma}$$

ist[4]). Setzt man

$$Q_0=\frac{n!}{t_1!\ldots t_m!}w_1^{t_1}\ldots w_m^{t_m},$$

wobei $t_\mu=[(\zeta_\mu+\varepsilon)\,n]$ für $\mu=1,\ldots,m-1$ und $t_m=n-\sum_{\mu=1}^{m-1}t_\mu$

ist, so kann jeder Summand von (7) durch sukzessive ausgeführte Operationen der Form $Q_1\to Q_2$ in Q_0 übergeführt werden. Da die Anzahl der dabei erforderlichen Schritte höchstens gleich $2\varepsilon\,n(m-1)$ ist, wird für jeden Summanden Q somit $Q<Q_0K_1^{2\varepsilon n(m-1)}$. Für Q_0 gilt, wie man durch Anwendung der STIRLINGschen Formel bestätigt, die asymptotische Gleichung

$$Q_0\cong K_2\,g^{\frac{n\sum_{\mu=1}^{m}\zeta^*_\mu(\log w_\mu-\log\zeta^*_\mu)+K_3\log n}{\log g}},$$

wobei $\zeta^*_\mu=\zeta_\mu+\varepsilon(\mu=1,\ldots,m-1)$ und $\zeta^*_m=1-\sum_{\mu=1}^{m-1}\zeta^*_\mu$ ist. Für jedes $\eta>0$ wird also bei hinreichend kleinem ε und hinreichend großem n offenbar $Q_0<g^{n(\delta+\eta)}$, und aus

$$h_n(\varepsilon)<Q_0\,K_1^{2\varepsilon n(m-1)}(2\varepsilon\,n)^{m-1},$$

folgt daher für jedes $\alpha>\delta$ bei hinreichend kleinen η und ε

$$\frac{h_n(\varepsilon)}{g^{n\alpha}}<\frac{g^{n(\delta+\eta)}\,K_1^{2\varepsilon n(m-1)}(2\varepsilon\,n)^{m-1}}{g^{n\alpha}}\to 0$$

für $n\to\infty$. Da die Menge $\bigvee_{l=n}^{\infty}T_l(\varepsilon)$ in der betrachteten Zerlegung eine g^{-n}-Überdeckung von $G(\mathfrak{G}_1,\ldots,\mathfrak{G}_m;\,\zeta_1,\ldots,\zeta_m)$ darstellt, verschwindet folglich das mit $\mu^{(\alpha)}(t)=t^\alpha$ gebildete Maß $\mu^\alpha\{G\}$, woraus (5) folgt.

3. Zum Abschluß des Beweises ist nun noch

$$\dim G\geq\delta \tag{9}$$

zu zeigen. Sei $M_n(s)$ die Menge der ϱ mit

$$A_\mu(\varrho,i\,s)=[\zeta_\mu\,i\,s]\quad(s=1,2,\ldots;\,n=1,2,\ldots;\,i=1,\ldots,n;\,\mu=1,\ldots,m-1)$$

und

$$A_m(\varrho,i\,s)=i\,s-\sum_{\mu=1}^{m-1}A_\mu(\varrho,i\,s).$$

Dann ist $M_n(s)\geq M_{n+1}(s)$ $(n=1,2,\ldots)$, und für den Durchschnitt

[4]) $K_1,\ldots,K_3$ sind positive Konstanten.

$M(s) = \bigwedge_{n=1}^{\infty} M_n(s)$ gilt $M(s) \subsetneqq G$. Offenbar läßt sich $M_n(s)$ als Vereinigung einer Anzahl $f_n(s)$ von Intervallen $\mathfrak{m}_n(s)$ der Länge $\lambda_n = g^{-ns}$ auffassen, von denen jedes die gleiche Anzahl $\frac{f_{n+1}(s)}{f_n(s)}$ von Intervallen $\mathfrak{m}_{n+1}$ enthält. Setzt man $[\zeta_\mu(n+1)\,s] - [\zeta_\mu\, n\, s] = d_\mu(n)$ $(\mu = 1, \ldots, m-1)$ und $s - \sum_{\mu=1}^{m-1} d_\mu(n) = d_m(n)$, so wird

$$\frac{f_{n+1}(s)}{f(s)} = \frac{s!}{d_1(n)! \ldots d_m(n)!}\, w_1^{d_1(n)} \ldots w_m^{d_m(n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ f_0(s) = 1).$$

Somit wird für große s

$$f_n(s) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{f_{i+1}(s)}{f_i(s)} = \left(\frac{s!\, w_1^{\zeta_1 s} \ldots w_m^{\zeta_m s}}{[\zeta_1 s]! \ldots [\zeta_m s]!}\right)^{n(1+o(1))} = g^{n s \delta(1+o(1))},$$

letzteres aufgrund der STIRLINGschen Formel. Nach dem in I zitierten Satz von EGGLESTON, dessen Voraussetzung a) nach den obigen Überlegungen zutrifft und dessen Voraussetzung b) für $\alpha < \delta$ wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \cdot \frac{g^{n s \alpha}}{f_n(s)} < K_4 \sum_{n=1}^{\infty} g^{n s (\alpha - \delta - o(1))} < \infty$$

ebenfalls erfüllt ist, folgt also (9), womit Satz 1 bewiesen ist.

Setzt man $m = g$, so daß jede Menge $\mathfrak{G}_\mu$ aus einer einzigen Ziffer besteht, so erhält man aus Satz 1 wieder (3). Ferner ergibt sich die

Folgerung. Werden nur über $w < g$ Ziffern, etwa über die Ziffern $0, 1, \ldots, w-1$, Voraussetzungen der Form (2) gemacht, so ergibt sich statt $G(\zeta_0, \ldots, \zeta_{g-1})$ die Vereinigungsmenge

$$H(\zeta_0, \ldots, \zeta_{w-1}) = \bigvee_{\substack{0 \le \zeta_\mu \le 1 \\ \mu = w, w+1, \ldots, g-1}} G(\zeta_0, \ldots, \zeta_{g-1}),$$

und es ist

$$\dim H(\zeta_0, \ldots, \zeta_{w-1}) = \frac{\sum_{\mu=0}^{w-1} \zeta_\mu \log \zeta_\mu + \zeta' \log \frac{\zeta'}{g-w}}{\log \frac{1}{g}},$$

wobei $\zeta' = 1 - \sum_{\mu=0}^{w-1} \zeta_\mu$ gesetzt ist.

4. Wenn $g-1$ von den g vorgegebenen Grenzwerten ζ_i in (3) verschwinden, der übrigbleibende, etwa ζ_0, also den Wert Eins hat, wird $\dim G(\zeta_0, \ldots, \zeta_{g-1}) = 0$. Es liegt daher nahe, in diesem Falle Grenzwerte der Form $\lim_{n \to \infty} \frac{A_j(\varrho, n)}{n^{\beta_j}}$ heranzuziehen und für die damit definierten Untermengen von $G(1, 0, \ldots, 0)$ die HAUSDORFFschen Dimensionen in bezug auf geeignet gewählte Funktionenklassen zu bestimmen. Es seien $\beta_1, \ldots, \beta_{g-1}$ Zahlen mit $0 < \beta_j < 1$, ferner (in neuer Bezeichnung) $\zeta_1, \ldots, \zeta_{g-1}$ positive Zahlen, und die Menge der Zahlen ϱ, für die

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_j(\varrho, n)}{n^{\beta_j}} = \zeta_j \qquad (j = 1, \ldots, g-1) \tag{10}$$

gilt, werde mit $E = E(\beta_1, \ldots, \beta_{g-1}; \zeta_1, \ldots, \zeta_{g-1})$ bezeichnet. Setzt man ferner für geeignete Intervalle $0 \leq t \leq t_0(\alpha)$

$$\varkappa^{(\alpha)}(t) = \left(\frac{\log g}{-\log t}\right)^{\left(\frac{-\log t}{\log g}\right)^{\alpha}},$$

so sind die $\varkappa^{(\alpha)}(t)$ M-Funktionen, für die Gl. (4) von I erfüllt ist. Es gilt der

Satz 2. *In bezug auf die Klasse K der Funktionen $\varkappa^{(\alpha)}(t)$ ist*

$$\dim_K E = \beta,$$

wenn $\beta = \max\limits_{j=1,\ldots,g-1} \beta_j$ gesetzt wird.

Zum Beweis benötigt man den folgenden

Hilfssatz 1. *Für die Funktion*

$$P(n) = \frac{n!}{(\zeta_{0n}\, n)!\,[\zeta_1 n^{\beta_1}]! \ldots [\zeta_{g-1} n^{\beta_{g-1}}]!}, \qquad \zeta_{0n}\, n = n - \sum_{j=1}^{g-1} \zeta_j n^{\beta_j}$$

gilt bei gegebenem $\varepsilon > 0$ für hinreichend große n

$$n^{n^{\beta-\varepsilon}} < P(n) < n^{n^{\beta+\varepsilon}}.$$

Beweis. Nach der STIRLINGschen Formel ist

$$[\zeta_j n^{\beta_j}]! \cong \sqrt{2\pi\zeta_j}\left(\frac{\zeta_j n^{\beta_j}}{e}\right)^{\zeta_j n^{\beta_j}} n^{\frac{\beta_j}{2}}$$

und daher

$$P(n) \cong K_5 \left(\prod_{j=1}^{g-1} \zeta_j^{\zeta_j n^{\beta_j}}\right)^{-1} n^{-\left(\sum_{j=1}^{g-1} \beta_j \zeta_j n^{\beta_j} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{g-1} \beta_j\right)(1+o(1))} \varphi(n). \tag{11}$$

Dabei ist, wenn abkürzend $\sum\limits_{j=1}^{g-1} \zeta_j n^{\beta_j} = S(n)$ gesetzt wird,

$$\varphi(n) = \frac{n^n}{(n - S(n))^{n-S(n)}} = \left(\frac{n}{n - S(n)}\right)^{n-S(n)} n^{S(n)} = \left(\frac{\frac{n}{S(n)}}{\frac{n}{S(n)} - 1}\right)^{\left(\frac{n}{S(n)} - 1\right) S(n)} n^{S(n)}.$$

Da $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} = e$ ist, wird also

$$\varphi(n) \cong (e\, n)^{S(n)}.$$

Setzt man dies in (11) ein und berücksichtigt man, daß wegen $\beta_j < 1$ für hinreichend große n

$$n^{\beta-\varepsilon} < S(n) - \sum_{j=1}^{g-1} \beta_j \zeta_j n^{\beta_j} < n^{\beta+\varepsilon}$$

ist, so erhält man die Behauptung.

Der *Beweis von Satz 2* läßt sich nun nach der gleichen Methode wie der von Satz 1 erbringen. Um

$$\dim_K E \leq \beta \tag{5'}$$

zu zeigen, betrachtet man die Mengen $T_n'(\varepsilon)$ der ϱ mit

$$\zeta_j - \varepsilon \leq \frac{A_j(\varrho, n)}{n^{\beta_j}} \leq \zeta_j + \varepsilon \qquad (j = 1, \ldots, g-1). \tag{6'}$$

$T_n'(\varepsilon)$ besteht aus

$$h_n'(\varepsilon) = \sum \frac{n!}{t_0! \dots t_{g-1}!} \tag{7'}$$

Intervallen der Länge g^{-n}, wobei die Summation über alle g-Tupel $t_0, \dots, t_{g-1}$ mit

$$(\zeta_j - \varepsilon)\, n^{\beta_j} \le t_j \le (\zeta_j + \varepsilon)\, n^{\beta_j} \quad (j = 1, \dots, g-1) \quad \text{und} \quad t_0 = n - \sum_{j=1}^{g-1} t_j$$

zu erstrecken ist. Sind

$$Q_1 = \frac{n!}{t_0'! \dots t_{g-1}'!} \quad \text{und} \quad Q_2 = \frac{n!}{t_0''! \dots t_{g-1}''!}$$

zwei Summanden von (7'), für die es ein Indexpaar σ, τ gibt, so daß $t_\sigma' = t_\sigma'' - 1$, $t_\tau' = t_\tau'' + 1$ und $t_j' = t_j''$ für alle übrigen j ist, so wird, wenn man $\beta_0 = \zeta_0 = 1$ setzt, für hinreichend kleines ε und für hinreichend großes n

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{t_\sigma'}{t_\tau''} \le \frac{(\zeta_\sigma - \varepsilon)\, n^{\beta_\sigma}}{(\zeta_\tau + \varepsilon)\, n^{\beta_\tau}}.$$

Setzt man also $\xi = \max_{\sigma, \tau = 0, \dots, g-1} |\beta_\tau - \beta_\sigma|$, so wird $\frac{Q_1}{Q_2} < K_5\, n^{\xi}$, wenn $K_5 > \max_{\sigma, \tau = 0, \dots, g-1} \frac{\zeta_\sigma}{\zeta_\tau}$ ist. Setzt man nun

$$Q_0 = \frac{n!}{t_0! \dots t_{g-1}!}, \quad \text{wo} \quad t_j = [\zeta_j\, n^{\beta_j}] \quad (j = 1, \dots, g-1) \quad \text{und} \quad t_0 = n - \sum_{j=1}^{g-1} t_j$$

ist, so wird für jeden Summanden Q von (7')

$$Q < Q_0 (K_5\, n^{\xi})^{2\varepsilon (g-1)\, n^{\beta}}.$$

Da nach Hilfssatz 1 für genügend großes n

$$Q_0 < n^{n^{\beta} + \varepsilon}$$

und die Anzahl der Summanden von (7') höchstens gleich $(2\varepsilon\, n^{\beta})^{g-1}$ ist, wird somit

$$h_n'(\varepsilon) < Q_0 (K_5\, n^{\xi})^{2\varepsilon (g-1)\, n^{\beta}} \cdot (2\varepsilon\, n^{\beta})^{g-1} = n^{n^{\beta} + o(1)},$$

und folglich gilt für $\alpha > \beta$

$$h_n'(\varepsilon)\, x^{(\alpha)}(g^{-n}) = \frac{h_n(\varepsilon)}{n^{n^{\alpha}}} = \frac{n^{n^{\beta} + o(1)}}{n^{n^{\alpha}}} \to 0,$$

woraus (5') folgt.

Zum Nachweis von

$$\dim_K E \ge \beta \tag{9'}$$

führt man entsprechend wie in Nr. 3 die Mengen $M_n'(s)$ der Zahlen ϱ mit

$$A_j(\varrho, i\, s) = [\zeta_j (i\, s)^{\beta_j}] \qquad (i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, g-1)$$

ein. In naheliegender Bezeichnungsweise erhält man, wenn abkürzend

$$[(n+1)^{\beta_j} s^{\beta_j} \zeta_j] - [n^{\beta_j} s^{\beta_j} \zeta_j] = p_j(n, s) \qquad (n = 0, 1, \dots)$$

gesetzt wird,

$$\frac{f'_{n+1}(s)}{f'_n(s)} = \frac{s!}{\left(s - \sum_{j=1}^{g-1} p_j(n,s)\right)!\, p_1(n,s)! \dots p_{g-1}(n,s)!}, \qquad (f'_0(s) = 1).$$

Für hinreichend große n nimmt jeder der Ausdrücke $p_j(n,s)$ nur die Werte Null und Eins an, so daß dann immer

$$\frac{f'_{n+1}(s)}{f'_n(s)} = \frac{s!}{(s-v_n)!} \qquad (0 \leq v_n \leq g-1)$$

wird, wenn v_n die Anzahl der Indizes ist, für die $p_j(n,s) = 1$ ist. Bei festem n_0 ist die Anzahl der $n \leq n_0$, für die $v_n > 0$ ausfällt, sicher mindestens gleich $K_6 n^\beta s^\beta$. Daher wird

$$f'_n(s) = \prod_{i=1}^{n} \frac{f'_i(s)}{f'_{i-1}(s)} \geq K_7 \left(\frac{s!}{(s-1)!}\right)^{K_6 n^\beta s^\beta} = K_7 s^{K_6 n^\beta s^\beta}.$$

Man erkennt nun wie in Nr. 3, daß für $\alpha < \beta$ der dort verwendete Satz von EGGLESTON anwendbar ist; denn es wird

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \cdot \frac{1}{x^{(\alpha)}(g^{-n}s)\, f'_n(s)} \leq \frac{2^s}{K_7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ns)^{(ns)\alpha}}{s^{(ns)\beta} K_6} < \infty,$$

so daß (9′) folgt und damit Satz 2 bewiesen ist.

5. Für den Fall $g = 2$ gehen, wenn man wie in I die Zahl $\varrho = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{2^i}$ als Dualwert $\Gamma(\mathfrak{A})$ der Menge $\mathfrak{A}$ von natürlichen Zahlen auffaßt, $A_1(\varrho, n)$ und $A_0(\varrho, n)$ in die Anzahlfunktionen $A(n)$ und $\bar{A}(n)$ von $\mathfrak{A}$ bzw. der Komplementärmenge $\bar{\mathfrak{A}}$ über. Wir können in diesem Falle den Satz 2 etwas verschärfen und bezeichnen dazu bei $0 < \beta < 1$, $0 < \zeta$

die Klasse der Mengen $\mathfrak{A}$, für die $\lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n^\beta} = \zeta$ ist,

die Klasse der Mengen $\mathfrak{A}$, für die $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n^\beta} = \zeta$ ist,

die Klasse der Mengen $\mathfrak{A}$, für die $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n^\beta} = \zeta$ ist und

die Klasse der Mengen $\mathfrak{A}$, für die ζ Häufungspunkt der Folge $\frac{A(n)}{n^\beta}$ ist,

respektive mit $G_1(\beta,\zeta)$, $G_2(\beta,\zeta)$, $G_3(\beta,\zeta)$ und $G_4(\beta,\zeta)$. Dann gilt, wenn allgemein für eine Klasse M von Mengen natürlicher Zahlen die Menge der zugehörigen Dualwerte mit ${}_\Gamma M$ bezeichnet und zur Abkürzung $\bigvee_{0 \leq \zeta' \leq \zeta} G_4(\beta,\zeta') = V(\beta,\zeta)$ gesetzt wird, der

Satz 3 [5]. *Sei $Q(\beta,\zeta)$ eine Klasse von Mengen $\mathfrak{A}$ mit*

$$G_1(\beta,\zeta) \subseteq Q(\beta,\zeta) \subseteq V(\beta,\zeta). \tag{12}$$

[5]) Ein diesem Satz analoger, der die gebrochene Dimension von ${}_\Gamma Q(\beta,\zeta)$ für den Fall $\beta = 1$ angibt, wurde vom Verfasser in einer früheren Arbeit bewiesen: l. c. [3]), Satz 52.

Dann ist in bezug auf die von den Funktionen

$$\varkappa^{(\alpha)}(t) = \left(\frac{\log 2}{-\log t}\right)^{\left(\frac{-\log t}{\log 2}\right)^{\alpha}}$$

gebildete Funktionenklasse K

$$\dim_K {}_rQ(\beta,\zeta) = \beta.$$

Beweis. Man hat

(13) $\dim_K {}_rG_1(\beta,\zeta) \geq \beta$ und (14) $\dim {}_rV(\beta,\zeta) \leq \beta$

zu zeigen. (13) ist in (9') enthalten, da ${}_rG_1(\beta,\zeta) = E(\beta;\zeta)$ ist. Zum Beweis von (14) braucht man den

Hilfssatz 2. *Sei $\chi(n)$ eine positive zahlentheoretische Funktion mit $\chi(n) = o(n)$. Dann ist*

$$\binom{n}{\chi(n)} = (1 - o(1)) \sum_{i=1}^{\chi(n)} \binom{n}{i}.$$

Beweis. Im Summationsbereich ist, wenn $\frac{\chi(n)+1}{n-\chi(n)} = \xi_n$ gesetzt wird,

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{i+1}\frac{i+1}{n-i} < \binom{n}{i+1}\xi_n < \binom{n}{i+2}\xi_n^2 < \cdots < \binom{n}{\chi(n)}\xi_n^{\chi(n)-i}.$$

Folglich wird

$$\sum_{i=0}^{\chi(n)} \binom{n}{i} < \binom{n}{\chi(n)} \sum_{i=0}^{\chi(n)} \xi_n^{\chi(n)-i} < \binom{n}{\chi(n)} \sum_{i=0}^{\infty} \xi_n^i = \binom{n}{\chi(n)} \frac{1}{1-\xi_n},$$

und hieraus folgt die Behauptung, da wegen $\chi(n) = o(n)$ offenbar $\xi_n = o(1)$ ist.

Ist $\vartheta > \zeta$, so bezeichnen wir die Klasse der Mengen $\mathfrak{A}$, für die $A(n) < [\vartheta\, n^{\beta}]$ gilt, mit $J_n(\vartheta)$. Dann läßt sich ${}_rJ_n(\vartheta)$ in der üblichen Weise in eine Anzahl

$$b_n(\vartheta) = \sum_{i=0}^{[\vartheta\, n^{\beta}]} \binom{n}{i}$$

von Intervallen der Länge 2^{-n} zerlegen. Die Mengen $\overset{\infty}{\underset{n=m}{\mathsf{V}}} {}_rJ_n(\vartheta)$ sind 2^{-m}-Überdeckungen von ${}_rV(\beta,\zeta)$; denn definitionsgemäß gehört jedes $\mathfrak{A} \in V(\beta,\zeta)$ unendlich vielen $J_n(\vartheta)$ an. Somit wird, da nach Hilfssatz 2

$$b_n(\vartheta) \cong \binom{n}{[\vartheta\, n^{\beta}]}$$

ist, für $\alpha > \beta$

$$\varkappa^{(\alpha)}_{2^{-m}}\{{}_rV(\beta,\zeta)\} \leq \sum_{n=m}^{\infty} b_n(\vartheta)\, \varkappa^{(\alpha)}(2^{-m}) < K_8 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\binom{n}{[\vartheta\, n^{\beta}]}}{n^{n^{\alpha}}},$$

und diese Reihe ist nach Hilfssatz 1 konvergent, so daß $\varkappa^{(\alpha)}\{{}_rV(\beta,\zeta)\} = 0$ und damit (14) folgt.

Mainz, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 28. Mai 1953.)

KRUBECK, E.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 255—257 (1953)

Über Zerfällungen in paarweis ungleiche Polynomwerte.

Von
ELEONORE KRUBECK.

Wie Herr SPRAGUE gezeigt hat, gibt es zu jeder positiven ganzen Zahl k eine Schranke, oberhalb welcher jede natürliche Zahl als Summe von lauter verschiedenen Gliedern der Folge $1^k, 2^k, \ldots$ darstellbar ist[1]). Mit Methoden, die den seinen nachgebildet sind, läßt sich folgender Satz beweisen:

Zu jedem Polynom $f(x)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ mit reellen Koeffizienten und $a_n>0$ gibt es eine positive Zahl s_0 derart, daß jede Zahl $z \geqq 0$ darstellbar ist in der Form

$$z = r + f(x_1) + f(x_2) + \cdots$$

mit $0<f(x_1)<f(x_2)<\cdots$, $0<x_1<x_2<\cdots$, ganzen positiven x_i und $0 \leqq r < s_0$.

Dem Beweis schicke ich eine Hilfsbetrachtung voraus. Sie dient der Konstruktion eines Systems von paarweis verschiedenen natürlichen Zahlen $b_{\mu\nu}$ mit

$$(1)\quad b_{11}^m + b_{12}^m + \cdots + b_{1k}^m = b_{21}^m + b_{22}^m + \cdots + b_{2k}^m = \cdots = b_{l1}^m + b_{l2}^m + \cdots + b_{lk}^m$$
$$\text{für} \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Ich wähle zunächst $l=4$ bei beliebigem n; auf den Wert von k kommt es nicht an. Für einen späteren Zweck beachte ich dabei, daß die $b_{\mu\nu}$ ungerade werden.

Aus

$$(2)\qquad 1 + 15 = 3 + 13 = 5 + 11 = 7 + 9$$

folgt, zunächst für $m=1$, die Gleichheit des Ausdrucks

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} (1+y_{11})^m + (15+y_{11})^m + (3+y_{12})^m + (13+y_{12})^m + \\ \qquad + (5+y_{13})^m + (11+y_{13})^m + (7+y_{14})^m + (9+y_{14})^m \end{array} \right.$$

mit den durch zyklische Vertauschungen der y_{1i} daraus hervorgehenden drei anderen Ausdrücken.

Aber auch für $m=2$ ist (3) eine symmetrische Funktion der y_{1i}, da die Koeffizienten entsprechender Potenzen wegen (2) gleich sind. Um in den Klammern der $l=4$ Ausdrücke, wie erwähnt, lauter verschiedene ungerade Zahlen zu bekommen, braucht man nur die y_{1i} in geeigneter Weise zu wählen,

[1]) SPRAGUE, R.: Über Zerlegungen in n-te Potenzen mit lauter verschiedenen Grundzahlen. Math. Z. **51**, 466—468 (1948).

z.B. $y_{11}=0$, $y_{12}=16$, $y_{13}=32$, $y_{14}=48$. In diesem Falle erreicht man eine Einteilung der ungeraden Zahlen von 1 bis 63 in vier Klassen zu je acht Gliedern, die sowohl in der Summe als auch in der Summe der Quadrate ihrer Glieder übereinstimmen. Wiederholt man das Verfahren, das von (2) zu (3) führt, an diesen vier Klassen und wählt dabei $y_{21}=0$, $y_{22}=64$, $y_{23}=128$, $y_{24}=192$, so erhält man ein Gleichungssystem, das eine Einteilung der ungeraden Zahlen von 1 bis 255 in vier Klassen darstellt und deren Übereinstimmung sowohl in der Summe der Glieder als auch Summe der Quadrate und Summe der Kuben ausdrückt; usw.

Um allgemein l Klassen zu erhalten, geht man aus von

$$1+(4l-1)=3+(4l-3)=\cdots=(2l-1)+(2l+1)$$

und wählt

$$y_{\mu 1}=0, \qquad y_{\mu 2}=4l^{\mu}, \qquad y_{\mu\nu}=(\nu-1)\,y_{\mu 2},$$
$$\mu=1,2,\ldots,(n-1); \qquad \nu=3,4,\ldots,l.$$

Auf diese Weise erreicht man eine Einteilung der ungeraden Zahlen von 1 bis $4l^n-1$ in l Klassen (mit je $2l^{n-1}$ Gliedern), die in der Summe der m-ten Potenzen ihrer Glieder übereinstimmen für $m=1,2,\ldots,n$.

Man kann so mit jedem l bis zu jedem beliebigen n aufsteigen. Sämtliche Zahlen des so konstruierten Systems dürfen größer als eine vorgegebene Zahl x_0 angenommen werden; denn die Gültigkeit von (1) bleibt bestehen, wenn man jede Zahl $b_{\mu\nu}$ um dieselbe Konstante C vermehrt. Wählt man C gerade, so sind mit den $b_{\mu\nu}$ auch die $(b_{\mu\nu}+C)$ ungerade und paarweis verschieden.

Mit Hilfe dieser Betrachtung läßt sich der oben behauptete Satz leicht beweisen. Es sei $f(x)$ ein Polynom vom Grade $n>0$ mit reellen Koeffizienten:

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0 \qquad (a_n>0).$$

Für $x\to\infty$ gilt

$$\frac{f(2x)}{f(x)}\to 2^n;$$

daher ist

$$\frac{f(2x)}{f(x)}<2^n+1 \quad \text{für alle } x\geq x_0,$$

wenn x_0 genügend groß gewählt wird. Ich nehme x_0 gleich so groß an, daß $f(x)$ für $x\geq x_0$ monoton wächst und positiv ist. Wegen (1) ist

$$\sum_{i=1}^{k} f(b_{1i})=\cdots=\sum_{i=1}^{k} f(b_{li}).$$

Da man in (1) die $b_{\mu\nu}$ durch $2^t b_{\mu\nu}$ ersetzen darf, ist auch

$$\sum_{i=1}^{k} f(2^t b_{1i})=\cdots=\sum_{i=1}^{k} f(2^t b_{li})=s_t, \qquad t=0,1,2,\ldots. \tag{4}$$

Es kann, wie erwähnt, $b_{\mu\nu}\geq x_0$ angenommen werden; dann ist für jedes $t=0,1,2,\ldots$

$$\frac{s_{t+1}}{s_t}<2^n+1.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar, daß jede Zahl $z \geq 0$ darstellbar ist in der Form

$$z = r + t_0 s_0 + t_1 s_1 + \cdots \quad \text{mit} \quad t_i \leq 2^n \quad \text{und} \quad 0 \leq r < s_0.$$

Jetzt sei in (1) $l = 2^n$. Dann stehen in (4) 2^n Ausdrücke für s_i zur Verfügung, und man kann $t_i s_i$ durch lauter verschiedene davon zusammensetzen. So erhält man im ganzen für z eine Darstellung

$$z = r + f(x_1) + f(x_2) + \cdots \quad \text{mit} \quad 0 \leq r < s_0.$$

Dabei sind die natürlichen Zahlen $x_1, x_2, \ldots$ paarweise verschieden; denn aus $x_p = x_q$, also $2^u b_{\mu_1 \nu_1} = 2^v b_{\mu_2 \nu_2}$ folgt wegen der paarweisen Verschiedenheit der ungeraden Zahlen $b_{\mu\nu}$ sowohl $u = v$ als auch $\mu_1 = \mu_2$ und $\nu_1 = \nu_2$, d.h. $p = q$.

Da alle Argumente $x_i \geq x_0$ sind und daher positive, paarweise verschiedene Werte von $f(x)$ liefern, lassen sie sich so benennen, daß, wie behauptet, zugleich

$$0 < f(x_1) < f(x_2) < \cdots \quad \text{und} \quad 0 < x_1 < x_2 < \cdots$$

gilt.

Berlin N 20, Steegerstr. 22.

(Eingegangen am 21. März 1953.)

GROTEMEYER, K. P.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 258 (1953)

Bemerkung zur Verbiegung konvexer Flächen.

Von
K. P. GROTEMEYER.

Wie in meiner Arbeit „Über die Verbiegung konvexer Flächen mit einer Randkurve, die Eigenschattengrenze ist" (Math. Z. Bd. 58, S. 272–280) bemerkt ist (auf S. 277 oben), gilt für eine beschränkte, konvexe[1]), dreimal stetig differenzierbare Fläche $\mathfrak{F}$, die von einer geschlossenen Eigenschattengrenze berandet wird: $G(\mathfrak{F}) \leq 0$. Die dortige Gl. (15) ist für jede zu $\mathfrak{F}$ isometrische, dreimal stetig differenzierbare Fläche $\mathfrak{F}^*$ gültig. Es ist daher

$$2\pi \leq \oint \cos(\Theta - \Theta^*)\, d\sigma^* \leq \oint d\sigma^*.$$

Aus $\oint d\sigma^* = 2\pi$, d.h. aus $\oint \cos(\Theta - \Theta^*)\, d\sigma^* = 2\pi$ folgt $G(\mathfrak{F}) = 0$ und daraus die Kongruenz oder Symmetrie der Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$. Es gilt daher der Satz:

In der Gesamtheit $\{\mathfrak{F}^*\}$ der zu $\mathfrak{F}$ isometrischen, dreimal stetig differenzierbaren Flächen ist $\mathfrak{F}$ dadurch ausgezeichnet, die kürzeste Gesamtlänge (2π) des sphärischen Bildes der Randkurve zu besitzen. $\mathfrak{F}$ ist bis auf Bewegungen oder Spiegelungen die einzige Fläche in $\{\mathfrak{F}^*\}$ mit dieser Eigenschaft.

Speziell für die endlichen Verbiegungen dürfen wir daher sagen:

Bei jeder endlichen Verbiegung der Fläche $\mathfrak{F}$ wird die Gesamtbogenlänge des sphärischen Bildes der Randkurve länger. Das sphärische Bild der Randkurve behält nur dann seine Gesamtlänge, wenn die Verbiegung eine Bewegung oder Spiegelung ist.

Der Satz 3 der genannten Arbeit ist in diesen Sätzen enthalten, da das sphärische Bild einer Eigenschattengrenze, die geschlossen ist, stets ein Großkreis ist.

[1]) Auf der Fläche $\mathfrak{F}$ sind Punktmengen vom LEBESGUEschen Maß Null zugelassen, in denen die GAUSSsche Krümmung verschwindet. Sonst sei überall $K > 0$.

Freiburg i. Br., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 10. Juli 1953.)

VOLKMANN, B.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 259—270 (1953)

Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. III.*)

Von
BODO VOLKMANN.

1. Ist $F=(f_1 f_2 \dots f_i)$ eine endliche Sequenz von $i \geq 1$ nicht notwendig verschiedenen Ziffern im g-adischen Ziffernsystem, also eine geordnete Menge von i ganzen Zahlen f_j mit $0 \leq f_j < g$, so sei $K(F, g)$ die Menge der reellen Zahlen ϱ mit $0 < \varrho \leq 1$, in deren g-adischer Entwicklung

$$\varrho = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e_j}{g^j} \quad (e_j \text{ ganz};\ 0 \leq e_j < g;\ \text{unendlich viele } e_j \neq 0;\ g \geq 2) \tag{1}$$

die Sequenz F nicht auftritt. Man kann leicht einsehen, daß jede solche Menge $K(F, g)$ vom LEBESGUEschen Maß Null ist, und es liegt daher nahe, nach der gebrochenen Dimension von $K(F, g)$ zu fragen. Diese wird in der vorliegenden Arbeit bestimmt.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{P}(F) = \{p_1, \dots, p_c\}$ die (möglicherweise leere) Menge der Zahlen p_s mit $0 < p_s < i$, für die die Sequenz der ersten p_s Ziffern und die der letzten p_s Ziffern von F gleich sind, und mit $\gamma(F, g)$ die größte reelle Wurzel der Gleichung

$$z^i - g\, z^{i-1} + \sum_{s=1}^{c} z^{p_s} - g \sum_{s=1}^{c} z^{p_s - 1} + 1 = 0, \tag{2}$$

worin bei leerem $\mathfrak{P}(F)$ die beiden Summen durch Null zu ersetzen sind, so gilt der

Satz 1. Die gebrochene Dimension von $K(F, g)$ ist

$$\dim K(F, g) = \frac{\log \gamma(F, g)}{\log g}.$$

In dem Spezialfall, wo die Sequenz F nur aus einer einzigen Ziffer besteht, also $i = 1$ ist, wird somit

$$\dim K(F, g) = \frac{\log (g-1)}{\log g}.$$

Dieses Ergebnis fand 1940 E. BEST[1]). Ein anderer Spezialfall von Satz 1 wurde 1951 vom Verfasser[2]) bewiesen: Es sei $g = 2$, $i \neq 2$, und die Ziffern f_j

*) Die Teile I und II dieser Arbeit wurden in Bd. 58, 284—287 (1953) bzw. Bd. 59, 247—254 (1953) veröffentlicht. Zum Verständnis des vorliegenden Teiles ist nur die Terminologie von Teil I erforderlich.

[1]) BEST, E.: On sets of fractional dimension. III. Proc. London Math. Soc. II, **47**, 436—454 (1942).

[2]) VOLKMANN, B.: Über Klassen von Mengen natürlicher Zahlen. J. reine angew. Math. **190**, 199—230 (1952), Satz 39.

der Sequenz F seien alle gleich Eins. Dann nimmt (2) die Form $z^i - \sum_{j=0}^{i-1} z^j = 0$ an, und wenn die positive Wurzel dieser Gleichung mit γ_i bezeichnet wird, ist

$$\dim K(F, g) = \frac{\log \gamma_i}{\log 2} .$$

Zum Beweis von Satz 1 führen wir in Nr. 2 eine besondere Art von Fächern im Sinne von TH. KALUZA jr.[3]) ein und beweisen für diese einen Satz, der auch unabhängig von der hier gemachten Anwendung von Interesse sein dürfte. Der eigentliche Beweis von Satz 1 zerfällt dann in einen ziffern-theoretischen (Nr. 3) und einen maßtheoretischen Teil (Nr. 4). Schließlich werden (Nr. 5 und 6) einige Folgerungen bewiesen, insbesondere eine über das asymptotische Verhalten der Anzahlfunktion bei gewissen Mengen natürlicher Zahlen (Nr. 6).

2. Einen unendlichen kreislosen zusammenhängenden Graphen endlichen Grades mit höchstens einem Endpunkt nennen wir mit K einen Fächer. Der Endpunkt eines solchen Fächers oder, falls ein solcher nicht vorhanden ist, irgendein anderer Knotenpunkt, werde mit A_0 bezeichnet. Legt man jeder Kante die Länge Eins zu, so läßt sich jedem Knotenpunkt A des Fächers eindeutig eine nichtnegative ganze Zahl zuordnen — wir nennen sie seinen Index —, die seine Entfernung von A_0, d.h. die Länge des eindeutig vorhandenen Weges $A_0 \dots A$ angibt. Dabei ist A_0 der einzige Knotenpunkt vom Index Null.

Da die Indizes der beiden Endpunkte einer Kante sich genau um Eins unterscheiden, wird der Fächer zu einem gerichteten Graphen durch die Festsetzung, daß die Richtung jeder Kante von einem Knotenpunkt mit niederem zu einem Knotenpunkt mit höherem Index verlaufen soll.

Ist A_n ein Knotenpunkt des Fächers Γ vom Index n, so bilden alle Knotenpunkte mit Indizes $\geq n$, die auf von A_0 aus über A_n verlaufenden Wegen liegen, zusammen mit den sie verbindenden Kanten einen gewissen Teilfächer $\Gamma(A_n)$ von Γ. Teilfächer dieser speziellen Form $\Gamma(A_n)$ für irgendein A_n wollen wir Unterfächer nennen.

Es kann nun vorkommen, daß mehrere Unterfächer einander oder auch dem Fächer $\Gamma = \Gamma(A_0)$ selbst gleich sind. Beispielsweise sind bei den in K eingeführten Fächern V_p, wo der Anfangspunkt A_0 vom Grade p und jeder weitere Knotenpunkt vom Grade $p+1$ ist, alle Unterfächer einschließlich V_p selbst einander gleich. Einen Fächer Γ, bei dem es unter den (abzählbar vielen) Unterfächern nur endlich viele verschiedene gibt, wollen wir einen E-Fächer nennen. Von solchen E-Fächern ist im folgenden ausschließlich die Rede.

Die Anzahl der verschiedenen Unterfächer eines E-Fächers Ξ sei k. Dann kann Ξ folgendermaßen durch eine k-reihige Matrix $\mathfrak{A}(\Xi)$ beschrieben werden:

[3]) KALUZA, TH.: Struktur- und Mächtigkeitsuntersuchungen an gewissen unendlichen Graphen mit einigen Anwendungen auf lineare Punktmengen. Math. Ann. **122**, 235—258 (1950), im folgenden mit K bezeichnet.

Seien $\Xi_1, \ldots, \Xi_k$ die verschiedenen Unterfächer von Ξ und sei etwa $\Xi = \Xi_1$. Dann sei das Matrixelement $a_{\varkappa\lambda}$ gleich der Anzahl der Knotenpunkte A vom Index Eins des Fächers Ξ_λ, für die $\Xi(A) = \Xi_\varkappa$ ist. Wenn die Matrix $\mathfrak{A}(\Xi)$ bekannt ist, läßt sich der Fächer Ξ von seinem Anfangspunkt A_0 aus sukzessive konstruieren, da mit jedem Knotenpunkt A, den man bei dieser Konstruktion erhält, vermöge einer Beziehung der Form $\Xi(A) = \Xi_\varkappa$ sein Grad gegeben ist.

Die Anzahl der Knotenpunkte vom Index n werde mit $h(n)$ bezeichnet. Dann gilt der

Satz 2. Bei einem E-Fächer Ξ genügt die Folge $h(n)$ der linearen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten, deren charakteristische Gleichung die charakteristische Gleichung der Matrix $\mathfrak{A}(\Xi)$ ist.

Beweis. Sei $V_n = \{A_n^1, \ldots, A_n^{h(n)}\}$ die Menge aller Knotenpunkte vom Index n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) und $a_\varkappa(n)$ die Anzahl derjenigen unter ihnen, für die $\Xi(A_n) = \Xi_\varkappa$ ist ($\varkappa = 1, \ldots, k$). Dann ist $h(n) = \sum_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa(n)$. Bezeichnet man die Elemente der Matrix $\mathfrak{A}(\Xi)^n$ mit $a_{\varkappa\lambda}^{(n)}$, so gilt ferner

$$h(n) = \sum_{\varkappa=1}^{k} a_{\varkappa 1}^{(n)} \quad (n = 1, 2, \ldots;\ h(0) = 1). \tag{3}$$

Denn nach Definition wird $a_\varkappa(1) = a_{\varkappa 1}$ und

$$a_\varkappa(2) = \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\varkappa\lambda}\, a_\lambda(1) = \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\varkappa\lambda}\, a_{\lambda 1} = a_{\varkappa 1}^{(2)},$$

und wenn die Beziehung

$$a_\varkappa(n) = a_{\varkappa 1}^{(n)} \quad (\varkappa = 1, \ldots, k) \tag{4}$$

für irgendein n bewiesen ist, dann folgt

$$a_\varkappa(n+1) = \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\varkappa\lambda}\, a_\lambda(n) = \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\varkappa\lambda}\, a_{\lambda 1}^{(n)} = a_{\varkappa 1}^{(n+1)},$$

so daß (4) für alle n gilt. Daraus folgt (3).

Die charakteristische Gleichung der Matrix $\mathfrak{A}(\Xi)$ sei

$$z^k + q_{k-1} z^{k-1} + \cdots + q_1 z + q_0 = 0.$$

Dann gilt nach der sog. CAYLEYschen Relation[4])

$$\mathfrak{A}^k + q_{k-1}\mathfrak{A}^{k-1} + \cdots + q_1\mathfrak{A} + q_0\mathfrak{E} = \mathfrak{N} \quad (\mathfrak{E} = \text{Einheitsmatrix},\ \mathfrak{N} = \text{Nullmatrix}).$$

[4]) Siehe z. B. MACDUFFEE: The Theory of Matrices. Erg. Math. 2, 18 (1946), 2. Aufl.

Nach Multiplikation mit $\mathfrak{A}^{n+1-k}$ erhält man somit für $n \geq k$, wenn man die letzte Gleichung für ein einzelnes Matrixelement hinschreibt,

$$a_{\varkappa\lambda}^{(n+1)} + q_{k-1} a_{\varkappa\lambda}^{(n)} + \cdots + q_1 a_{\varkappa\lambda}^{(n-k+2)} + q_0 a_{\varkappa\lambda}^{(n-k+1)} = 0 \quad (\varkappa, \lambda = 1, \ldots, k).$$

Setzt man dies mit $\lambda = 1$ in (3) für jeden Summanden ein, so ergibt sich

$$h(n+1) + q_{k-1} h(n) + \cdots + q_1 h(n-k+2) + q_0 h(n-k+1) = 0 \quad (n \geq k).$$

3. Es sei $R_n = R_n(F, g)$ die Menge aller n-stelligen g-adischen Brüche, unter deren Ziffern die Sequenz F nicht auftritt ($n = 1, 2, \ldots$; $R_0 = \{0\}$). Bezeichnet man mit $I_n = I_n(F, g)$ die Menge der Intervalle $\mathfrak{i}_n^m$ der Länge g^{-n}, deren linker Endpunkt zu R_n gehört[5]), so ist $K(F, g) = \bigwedge_{n=0}^{\infty} I_n$, und offenbar gilt $I_n \geq I_{n+1}$ ($n = 1, 2, \ldots$). Wir ordnen nun der Menge $K(F, g)$ einen Fächer $\Xi(F, g)$ derart zu, daß jedem Intervall $\mathfrak{i}_n^m$ ein Knotenpunkt — er werde ebenfalls mit $\mathfrak{i}_n^m$ bezeichnet — vom Index n entspricht, wobei für zwei Knotenpunkte $\mathfrak{i}_n^m$ und $\mathfrak{i}_{n'}^{m'}$ genau dann $\mathfrak{i}_n^m$ ein Knotenpunkt des Fächers $\Xi(\mathfrak{i}_{n'}^{m'})$ ist, wenn für die zugehörigen Intervalle $\mathfrak{i}_n^m \leqq \mathfrak{i}_{n'}^{m'}$ gilt. Jedem Knotenpunkt $\mathfrak{i}_n^m$ ist dann eindeutig der n-stellige g-adische Bruch aus R_n zugeordnet, der dem linken Endpunkt des Intervalls $\mathfrak{i}_n^m$ entspricht. Wenn j ($0 \leq j < i$) die größte Zahl ist, für die die Sequenz der letzten j Ziffern dieses Bruches mit der Sequenz der ersten j Ziffern von F übereinstimmt, so sagen wir, der Unterfächer $\Xi(\mathfrak{i}_n^m)$ sei vom Typ Ξ_j. Sind $\Xi(\mathfrak{i}_n^m)$ und $\Xi(\mathfrak{i}_r^t)$ zwei Unterfächer vom gleichen Typ und sind etwa

$$0, e_1 \ldots e_{n-j} f_1 \ldots f_j \quad \text{und} \quad 0, e_1' \ldots e_{r-j}' f_1 \ldots f_j$$

die zugehörigen g-adischen Brüche aus R_n bzw. R_r, so ist $\Xi(\mathfrak{i}_n^m) = \Xi(\mathfrak{i}_r^t)$. Denn wenn $\mathfrak{i}_{n+k}^s$ irgendein Knotenpunkt aus $\Xi(\mathfrak{i}_n^m)$ ist, der zugehörige g-adische Bruch $0, e_1 \ldots e_{n-j} f_1 \ldots f_j e_{n+1} \ldots e_{n+k}$ also nicht die Sequenz F enthält, so enthält auch der Bruch $0, e_1 \ldots e_{r-j} f_1 \ldots f_j e_{n+1} \ldots e_{n+k}$ die Sequenz F nicht, gehört also zu einem Knotenpunkt von $\Xi(\mathfrak{i}_r^t)$. Da auch umgekehrt jedem Knotenpunkt von $\Xi(\mathfrak{i}_r^t)$ ein Knotenpunkt von $\Xi(\mathfrak{i}_n^m)$ entspricht und alle Inklusionen zugehöriger Intervalle bei dieser Zuordnung trivialerweise erhalten bleiben, folgt $\Xi(\mathfrak{i}_n^m) = \Xi(\mathfrak{i}_r^t)$. Also ist $\Xi(F, g)$ ein E-Fächer mit i verschiedenen Typen $\Xi_0, \ldots, \Xi_{i-1}$ von Unterfächern.

Die Anzahl der Knotenpunkte von $\Xi(F, g)$ vom Index n, die definitionsgemäß gleich der Anzahl der Elemente von R_n ist, werde wie die entsprechende Anzahl bei den allgemeineren Betrachtungen von Nr. 2 mit $h(n) = h(n; F, g)$ bezeichnet. Wir benötigen drei Hilfssätze:

Hilfssatz 1. Die Folge $h(n)$ genügt der Differenzengleichung[6])

$$(5) \quad h(n+1) = g\,h(n) - \sum_{s=1}^{c} h(n+1-i+p_s) + g \sum_{s=1}^{c} h(n-i+p_s) - h(n-i+1) \quad (n \geq i-1)$$

[5]) Die Intervalle $\mathfrak{i}_n^m$ sollen nach links abgeschlossen und nach rechts offen sein.

[6]) Wenn $\mathfrak{P}(F)$ leer ist, sind die Summen in (5) fortzulassen.

mit den Anfangsbedingungen

$$h(n) = g^n \qquad (n = 0, \ldots, i-1). \tag{6}$$

Beweis. Da im Falle $0 \leq n < i$ die Menge R_n alle g^n möglichen Brüche enthält, ist (6) richtig. Zum Beweise von (5) bezeichnen wir wie in Nr. 2 mit $a_j(n)$ die Anzahl der Knotenpunkte $\mathfrak{i}_n^m$ vom Index n, bei denen der Unterfächer $\Xi(\mathfrak{i}_n^m)$ gleich Ξ_j ist. Dann ist offenbar

$$h(n+1) = g\,h(n) - a_{i-1}(n) \qquad (n \geq i-1); \tag{7}$$

denn jedes Intervall $\mathfrak{i}_n^m$ enthält g oder $g-1$ Intervalle mit Knotenpunkten vom Index $n+1$, je nachdem ob die Sequenz F durch Anfügen einer Ziffer an den zu $\mathfrak{i}_n^m$ gehörigen Bruch erzeugt werden kann oder nicht. Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) Wenn $\mathfrak{P}(F)$ leer ist, gilt

$$a_{i-1}(n) = h(n-i+1), \tag{8}$$

da dann jeder Bruch $0, e_1 \ldots e_{n-i+1}$ aus R_{n-i+1} durch Anfügen der Ziffernsequenz $f_1 \ldots f_{i-1}$ in einen Bruch aus R_n übergeht, also $h(n-i+1) \leq a_{i-1}(n)$ gilt und umgekehrt sicher $a_{i-1}(n) \leq h(n-i+1)$ ist.

b) Wenn $\mathfrak{P}(F)$ nicht leer und p ein Element dieser Menge ist, kann ein Bruch $0, e_1 \ldots e_{n-i+1} f_1 \ldots f_{i-1}$ die Form

$$0, e_1 \ldots e_{n-i+1-p} f_1 \ldots f_p f_1 \ldots f_{i-1} = 0, e_1 \ldots e_{n-i+1-p} F f_{i-p+1} \ldots f_{i-1}$$

haben und somit die Sequenz F enthalten. An Stelle von (8) erhält man

$$a_{i-1}(n) = a_{p_c-1}(n-i+p_c) - a_{i-1}(n-i+p_c)$$

und ebenso

$$a_{p_s-1}(n-i+p_s) = a_{p_{s-1}-1}(n-i+p_{s-1}) - a_{i-1}(n-i+p_{s-1}) \quad (s = 2, \ldots, c)$$

sowie schließlich

$$a_{p_1-1}(n-i+p_1) = h(n-i+1),$$

wobei vorausgesetzt wird, daß die Elemente der Menge $\mathfrak{P}(F) = \{p_1, \ldots, p_c\}$ der Größe nach angeordnet sind. Mit Hilfe dieser Gleichungen erhält man aus (7)

$$\begin{aligned} h(n+1) &= g\,h(n) - a_{p_c-1}(n-i+p_c) + a_{i-1}(n-i+p_c) \\ &= g\,h(n) - a_{p_{c-1}-1}(n-i+p_{c-1}) + a_{i-1}(n-i+p_{c-1}) + \\ &\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad + a_{i-1}(n-i+p_c) \\ h(n+1) &= g\,h(n) + \sum_{s=1}^{c} a_{i-1}(n-i+p_s) - h(n-i+1). \end{aligned}$$

Setzt man hierin gemäß (7)

$$a_{i-1}(n-i+p_s) = g\,h(n-i+p_s) - h(n+1-i+p_s),$$

so ergibt sich die Behauptung (5).

Die zu dem E-Fächer $\Xi(F, g)$ gehörende i-reihige Matrix werde mit $\mathfrak{A}(F, g)$ bezeichnet. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ die verschiedenen Eigenwerte von $\mathfrak{A}(F, g)$ und $v_1, \ldots, v_q$ ihre Vielfachheiten $\left(\sum_{j=1}^{q} v_j = i\right)$, so folgt aus Satz 2 auf Grund der Theorie der linearen Differenzengleichungen[7]), daß $h(n)$ sich in der Form

$$h(n) = P_1(n)\,\lambda_1^n + \cdots + P_q(n)\,\lambda_q^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

darstellen läßt, wobei jedes $P_j(n)$ ein Polynom von einem Grade $\leq v_j - 1$ ist. Entsprechend gibt es, wenn die verschiedenen Wurzeln von (2) mit $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ und ihre Vielfachheiten mit $v_1', \ldots, v_r'$ bezeichnet werden, eine Darstellung der Form

$$h(n) = P_1'(n)\,\gamma_1^n + \cdots + P_r'(n)\,\gamma_r^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{10}$$

wobei jedes $P_j'(n)$ ein Polynom von einem Grade $\leq v_j' - 1$ ist; denn (2) ist die charakteristische Gleichung der Differenzengleichung (5). Da (9) und (10) für alle n gelten, sind, wie sich leicht zeigen läßt, beide Darstellungen identisch, d.h. es ist $r = q$ und bei geeigneter Numerierung der λ_j auch $\lambda_j = \gamma_j$ sowie $P_j(n) = P_j'(n)$ $(j = 1, \ldots, r)$.

Hilfssatz 2. Keines der Polynome $P_j(n)$ verschwindet identisch.

Beweis. Sei etwa $j = 1$ und $P_1(n) = \sigma_w n^w + \sigma_{w-1} n^{w-1} + \cdots + \sigma_0$ mit $w = v_1 - 1$. Angenommen, es ist $\sigma_w = \sigma_{w-1} = \cdots = \sigma_1 = 0$. Dann gibt es, falls die Wurzeln $\gamma_2, \ldots, \gamma_r$ alle einfach sind, also $r = i - w$ ist, nach (10) eine Darstellung $h(n) = \tau_1 \gamma_1^n + \cdots + \tau_r \gamma_r^n$ mit konstanten τ_j, wobei $\tau_1 = \sigma_0$ ist. Da somit nach (6) $\tau_1 \gamma_1^j + \cdots \tau_r \gamma_r^j = g^j$ $(j = 0, \ldots, r-1)$ gilt, folgt $\tau_1 = \Delta_1/\Delta$, wenn

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} g^0 & \gamma_2^0 & \cdots \gamma_r^0 \\ g^1 & \gamma_2^1 & \cdots \gamma_r^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g^{r-1} & \gamma_2^{r-1} & \cdots \gamma_r^{r-1} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta = \begin{vmatrix} \gamma_1^0 & \gamma_2^0 & \cdots \gamma_r^0 \\ \gamma_1^1 & \gamma_2^1 & \cdots \gamma_r^1 \\ \vdots & \vdots & \\ \gamma_1^{r-1} & \gamma_2^{r-1} & \cdots \gamma_r^{r-1} \end{vmatrix}$$

gesetzt wird. Da $\Delta_1 = \prod_{j=2}^{r} (g - \gamma_j) \prod_{\substack{k,l=2 \\ k<l}}^{r} (\gamma_k - \gamma_l)$ und $\Delta = \prod_{\substack{k,l=1 \\ k<l}}^{r} (\gamma_k - \gamma_l)$ ist, also $\Delta \neq 0$ ausfällt, wird

$$\tau_1 = \frac{\prod_{j=2}^{r} (g - \gamma_j)}{\prod_{j=2}^{r} (\gamma_1 - \gamma_j)},$$

und eine Stetigkeitsbetrachtung zeigt, daß diese Gleichung auch bestehen bleibt, wenn unter den Wurzeln $\gamma_2, \ldots, \gamma_r$ mehrfache vorkommen. Da die Gl. (2) sich in der Form $(z - g) \sum_{s=1}^{c+1} z^{p_s - 1} + 1 = 0$ schreiben läßt $(p_{c+1} = i)$, ist g keine Wurzel und daher $\tau_1 \neq 0$.

[7]) Siehe z.B. NÖRLUND: Vorlesungen über Differenzenrechnung, S. 297. Berlin 1924.

Setzt man $\gamma(F, g) = \gamma_1$, so gilt der

Hilfssatz 3. Ist σ_v der höchste nichtverschwindende Koeffizient von $P_1(n)$, so ist

$$h(n) = \gamma_1^n n^v \left(\sigma_v + o(1)\right).$$

Beweis. Da die Elemente der Matrix $\mathfrak{A}(F, g)$ nichtnegativ sind, ist nach einem Satz von Frobenius[8]) die Wurzel $\gamma(F, g) = \gamma_1 > |\gamma_j|$ für $j = 2, \ldots, r$. Somit wird nach Hilfssatz 2

$$h(n) = \gamma_1^n P_1(n) \left(1 + o(1)\right) = \gamma_1^n n^v \left(\sigma_v + o(1)\right).$$

4. Um nun den eingangs formulierten Satz 1 zu beweisen, verwenden wir folgenden

Satz von Moran[9]). Ist $\mu(t)$ eine stetige, monoton wachsende Funktion mit $\mu(0) = 0$ und M eine abgeschlossene beschränkte lineare Punktmenge mit $\mu\{M\} < \infty$, so ist dann und nur dann $\mu\{M\} > 0$, wenn es eine nichtnegative Funktion $\Phi(R)$ von halboffenen Intervallmengen[10]) R gibt derart, daß für gewisse Konstanten $\varkappa_1 > 0$ und $\varkappa_2 > 0$ folgendes gilt[11]):

a) $\Phi(R) \leqq \varkappa_1 \mu(|R|)$ für jede halboffene Intervallmenge R,

b) $\Phi(R) \geqq \varkappa_2$ für jede halboffene Intervallmenge R mit $R \supseteqq M$.

Es soll gezeigt werden, daß dieser Satz auf die abgeschlossene Hülle $K'(F, g)$ von $K(F, g)$ mit

$$\mu(t) = t^{\frac{\log \gamma_1}{\log g}} \left(\frac{\log g}{-\log t}\right)^v, \qquad \mu(0) = 0$$

anwendbar ist. Da die Differenz $K'(F, g) - K(F, g)$ eine abzählbare Menge ist, gelten die Überlegungen wegen $\mu\{K(F, g)\} = \mu\{K'(F, g)\}$ dann auch für $K(F, g)$.

Die Voraussetzung $\mu\{K'(F, g)\} < \infty$ ist sicher erfüllt; denn jedes I_n bildet eine g^{-n}-Überdeckung von $K(F, g)$, und daher wird, wenn man $\frac{\log \gamma_1}{\log g} = \alpha$ setzt, nach Hilfssatz 3

$$\begin{cases} \mu\{K'(F, g)\} = \mu\{K(F, g)\} \leqq \lim\limits_{n \to \infty} h(n)\, \mu(g^{-n}) \\ \qquad = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\gamma_1^n n^v \left(\sigma_v + o(1)\right)}{g^{n\alpha} n^v} = \sigma_v < \infty. \end{cases} \tag{11}$$

Zur Konstruktion einer Funktion $\Phi(R)$ mit den verlangten Eigenschaften definieren wir zunächst für jedes Intervall i_n^m die Funktion $\psi(i_n^m) = \gamma_1^{-n} n^{-v}$ und setzen für jede halboffene Intervallmenge R

$$\Phi(R) = \lim_{n \to \infty} \psi(i_n^m), \tag{12}$$

---

[8]) Frobenius, G.: Über Matrizen aus positiven Elementen. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. **26**, 471—476 (1908), § 4.

[9]) Moran, P. A. P.: Additive functions of intervals and Hausdorff measure. Proc. Cambridge Philos. Soc. **42**, 15—23 (1946), Theorem I. Wir spezialisieren den Satz hier auf den Fall linearer Mengen.

[10]) Unter einer halboffenen Intervallmenge wird die Vereinigungsmenge von endlich vielen halboffenen Intervallen verstanden.

[11]) Den Durchmesser einer Punktmenge W bezeichnen wir mit $|W|$.

wobei über alle $\mathfrak{i}_n^m$ mit festem n summiert wird, die ganz in R liegen. Um zu zeigen, daß dieser Grenzwert existiert, gehen wir in mehreren Schritten vor:

1. Sei R ein Intervall $\mathfrak{i}_j^m$. Bezeichnet man die Anzahl der darin enthaltenen Intervalle $\mathfrak{i}_n^{m'}$ $(n \geqq j)$ mit $h_j^{(m)}(n-j)$, so genügt diese Folge in n wie $h(n)$ der Differenzengleichung (5), da sich die dortige Herleitung wörtlich beibehalten läßt. Somit gibt es eine Darstellung

$$h_j^{(m)}(n) = P_{1mj}(n)\,\gamma_1^n + \cdots + P_{rmj}(n)\,\gamma_r^n \qquad (n \geqq j),$$

wobei jedes $P_{tmj}(n)$ ein Polynom in n von einem Grade $\leqq v_t - 1$ ist. Dabei ist der Grad u von $P_{1mj}(n)$ sicher $\leqq v$; denn andernfalls wäre etwa

$$P_{1mj}(n) = \zeta_u n^u + \zeta_{u-1} n^{u-1} + \cdots + \zeta_0 \quad \text{mit} \quad \zeta_u \neq 0,$$

und daher erhielte man die asymptotische Gleichung

$$\frac{h_j^{(m)}(n)}{h(n)} \cong \frac{\gamma_1^{n-j}(n-j)^u \zeta_u}{\gamma_1^n n^v \sigma_v} \to \infty,$$

während doch trivialerweise $\dfrac{h_j^{(m)}(n)}{h(n)} \leqq 1$ ist. Setzt man daher $P_{1mj}(n)$ formal als Polynom vom Grade v an, wobei der höchste Koeffizient verschwinden darf, so wird in jedem Falle

$$\Phi(\mathfrak{i}_j^m) = \lim_{n\to\infty} \frac{h_j^{(m)}(n)}{\gamma_1^n n^v} = \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_1^{n-j}(n-j)^v \zeta_v}{n^v} = \frac{\zeta_v}{\gamma_1^j},$$

so daß der Grenzwert $\Phi(\mathfrak{i}_j^m)$ existiert.

2. Sei R Vereinigungsmenge von endlich vielen, sich nicht überschneidenden Intervallen $\mathfrak{i}_j^m$. Dann existiert der Grenzwert $\Phi(R)$ und ist gleich der Summe der zu diesen Intervallen gehörenden Werte $\Phi(\mathfrak{i}_j^m)$, wie man unmittelbar erkennt.

3. Sei R ein beliebiges Intervall $\mathfrak{r}$ und sei n_0 so groß gewählt, daß $g^{-n_0} < |\mathfrak{r}|$ wird. Für $n \geqq n_0$ ist dann, da es höchstens zwei Intervalle von I_{n_0} gibt, die mit $\mathfrak{r}$ einen nichtleeren Durchschnitt haben, ohne ganz in $\mathfrak{r}$ enthalten zu sein,

$$0 \leqq \sum_{\mathfrak{i}_n^m \subseteq \mathfrak{r}} \Phi(\mathfrak{i}_n^m) - \sum_{\mathfrak{i}_{n_0}^{m'} \subseteq \mathfrak{r}} \Phi(\mathfrak{i}_{n_0}^{m'}) \leqq 2\Phi(\mathfrak{i}_{n_0}^{m'}),$$

wie aus (12) hervorgeht. Da $\lim\limits_{n_0\to\infty} 2\Phi(\mathfrak{i}_{n_0}^{m'}) = 0$ ist, existiert der Grenzwert $\Phi(\mathfrak{r})$.

4. Sei R irgendeine halboffene Intervallmenge, also etwa $R = \mathfrak{r}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{r}_t$, wobei diese $\mathfrak{r}_j$ halboffene, sich nicht überschneidende Intervalle sind. Dann kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, daß zwischen je zweien dieser Intervalle immer ein Intervall liegt, das keinen Punkt von R enthält, und man kann den Schritt 3. auf jedes $\mathfrak{r}_j$ gesondert anwenden, woraus folgt, daß der Grenzwert $\Phi(R)$ existiert und $\Phi(R) = \sum\limits_{j=1}^{t} \Phi(\mathfrak{r}_j)$ ist.

Damit ist $\Phi(R)$ für alle R definiert, und eine einfache Betrachtung zeigt, daß $\Phi(R)$ auch additiv ist. Wir haben nun zu zeigen, daß die Voraussetzungen a) und b) des Satzes von Moran erfüllt sind.

Zu a). Sei R eine halboffene Intervallmenge und sei k so bestimmt, daß $g^{-(k+1)} \leq |R| < g^{-k}$ wird. Ist $\varrho \in R$, so wird R sicher von dem Intervall $[\varrho - |R|,\ \varrho + |R|]$ überdeckt. Daher wird, wenn etwa $i_{k+1}^{j_1}, \ldots, i_{k+1}^{j_l}$ die in $[\varrho - |R|,\ \varrho + |R|]$ enthaltenen Intervalle von I_{k+1} sind,

$$\Phi(R) \leq \sum_{\lambda=1}^{l} \Phi(i_{k+1}^{j_\lambda}) = \frac{l}{\gamma_1^{k+1}(k+1)^v}.$$

Trivialerweise ist $l \leq \frac{2|R|}{g^{-(k+1)}}$ und damit

$$\Phi(R) \leq \frac{2|R|}{g^{-(k+1)}\gamma_1^{k+1}(k+1)^v} = \frac{2|R|g^{k+1}}{(k+1)^v g^{\alpha(k+1)}} = \frac{2|R|^{1-\alpha} g^{(k+1)(1-\alpha)}}{(k+1)^v} \cdot |R|^\alpha.$$

Daraus folgt, da $|R| g^{k+1} < g$ ist,

$$\Phi(R) \leq 2g^{1-\alpha} \frac{|R|^\alpha}{(k+1)^v} \leq \varkappa_1 |R|^\alpha \left(\frac{\log g}{-\log |R|}\right)^v = \varkappa_1 \mu(|R|).$$

Zu b): Sei $R \geqq K'(F, g)$. Ist etwa $R = \mathfrak{r}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{r}_t$, wo diese $\mathfrak{r}_j$ halboffene Intervalle sind, so gibt es bei genügend großem n höchstens $2t$ Intervalle von I_n, die nicht vollständig in R enthalten sind. Daher wird nach Hilfssatz 3 und (12)

$$\Phi(R) \geq \lim_{n \to \infty} \frac{h(n) - 2t}{g^{n\alpha} n^v} = \sigma_v > 0.$$

Also ist der Satz von Moran anwendbar, und man erhält $\mu\{K'(F, g)\} > 0$, also nach (11)

$$0 < \mu\{K(F, g)\} = \mu\{K'(F, g)\} < \infty.$$

Für das mit der Funktion $\mu^{(\beta)}(t) = t^\beta$ $(0 < \beta < 1)$ gebildete Maß $\mu^{(\beta)}\{K(F, g)\}$ wird somit für jede hinreichend kleine positive ε, da immer

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mu^{(\alpha-\varepsilon)}(t)}{\mu(t)} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{t \to 0} \frac{\mu^{(\alpha+\varepsilon)}(t)}{\mu(t)} = 0$$

ist, $\mu^{(\alpha-\varepsilon)}\{K(F, g)\} = \infty$ und $\mu^{(\alpha+\varepsilon)}\{K(F, g)\} = 0$, woraus die Behauptung $\dim K(F, g) = \alpha = \frac{\log \gamma_1}{\log g}$ folgt.

5. Als naheliegende Verallgemeinerung von Satz 1 ergibt sich der

Satz 3. Sei $E(F, g)$ die Menge der Zahlen ϱ mit $0 < \varrho \leq 1$, in deren g-adischer Entwicklung (1) die Sequenz F höchstens endlich oft auftritt. Dann ist

$$\dim E(F, g) = \frac{\log \gamma(F, g)}{\log g}.$$

Beweis. Ist $\varrho \in E(F, g)$, so tritt in der zugehörigen g-adischen Entwicklung (1) die Sequenz F von einer gewissen Stelle an nicht auf. Folglich gibt

es ein n derart, daß $\chi = g^n \varrho - [g^n \varrho]$ zu $K(F, g)$ gehört oder verschwindet. Daher wird, wenn man die Menge der Zahlen $\varrho = (\chi + k)\, g^{-n}$ mit $\chi \in K(F, g)$, $0 < \varrho \leq 1$ und ganzem k als $K_n(F, g)$ bezeichnet,

$$E(F, g) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\vee}} K_n(F, g).$$

Da $K_n(F, g)$ sich als Vereinigungsmenge von g^n elementfremden Mengen auffassen läßt, von denen jede im Verhältnis $1 : g^n$ zu $K(F, g)$ geometrisch ähnlich ist, wird $\dim K_n(F, g) = \dim K(F, g) = \dfrac{\log \gamma(F, g)}{\log g}$ und damit[12]) auch

$$\dim E(F, g) = \dim \left(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\vee}} K_n(F, g) \right) = \dim K(F, g) = \frac{\log \gamma(F, g)}{\log g}.$$

Satz 4. Die Menge N_g der Zahlen ϱ mit $0 < \varrho \leq 1$, in deren g-adischer Entwicklung (1) nicht jede Sequenz F auftritt, hat die Dimension Eins und das LEBESGUEsche Maß Null.

Beweis. Offenbar ist N_g die Vereinigungsmenge aller $K(F, g)$, wobei F alle abzählbar vielen g-adischen Sequenzen durchläuft. Für jedes F ist, wie man aus (2) erkennt, $\gamma(F, g) < g$ und damit $\dim K(F, g) < 1$. Daher ist für jedes F das LEBESGUEsche Maß $\mu^{(1)}\{K(F, g)\} = 0$ und somit auch $\mu^{(1)}\{N_g\} = 0$. Andererseits entnimmt man der Gl. (2), daß für hinreichend großes i die Wurzel $\gamma(F, g)$ beliebig nahe an g und damit $\dim K(F, g)$ beliebig nahe an Eins liegt. Daraus folgt die Behauptung wegen[12]) $\dim N_g = \overline{\underset{F}{\text{fin}}} \dim K(F, g)$.

Satz 5. Dann und nur dann ist $\dim K(F, g) = 0$, wenn $g = 2$ und F von der Form (0), (1), (01) oder (10) ist. In diesen vier Fällen ist $K(F, g)$ sogar abzählbar.

Beweis. Wenn $\dim K(F, g) = 0$ ist, so folgt $\gamma(F, g) = 1$ und damit nach (2)

$$1 - g + c(1 - g) + 1 = 0,$$

d.h. $(g - 1)(c + 1) = 1$. Da $g - 1$ und $c + 1$ natürliche Zahlen sind, so folgt $g = 2$ und $c = 0$. Die Menge $\mathfrak{P}(F)$ ist also leer, und (2) nimmt die Gestalt

$$z^i - 2z^{i-1} + 1 = 0$$

an. Da die linke Seite gleich $(z - 1)\left(z^{i-1} - \sum_{j=0}^{i-2} z^j\right)$ ist, so folgt aus der Bedingung, daß $\gamma(F, 2) = 1$ die größte Wurzel von (2) ist, $i \leq 2$, wie eine einfache algebraische Betrachtung zeigt. Im Falle $i = 1$ gibt es die beiden Sequenzen (0) und (1), im Falle $i = 2$ bei leerem $\mathfrak{P}(F)$ die beiden Sequenzen (01) und 10), also insgesamt gerade die vier im Satz genannten Sequenzen.

Offenbar besteht $K((0), 2)$ nur aus der Zahl $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1$, und $K((1), 2)$ ist leer, da außer der Null jede Zahl Einsen in ihrer dyadischen Entwicklung aufweist, diese aber keine dyadische Entwicklung im Sinne von (1) hat.

[12]) Siehe z.B. VOLKMANN, B.: l. c. [2]), Satz 27.

Schließlich besteht $K((10), 2)$ aus den abzählbar vielen Zahlen der Form $\varrho_n = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, und $K((01), 2)$ ist gleich $K((0), 2)) = \{1\}$.

Sind zwei verschiedene g-adische Ziffernsequenzen $F = (f_1 \ldots f_i)$ und $F' = (f'_1, \ldots, f'_{i'})$ gegeben, so erhebt sich die Frage, welche der Mengen $K(F, g)$ und $K(F', g)$ die größere Dimension hat, d.h. welche von den Zahlen $\gamma(F, g)$ und $\gamma(F', g)$ die größere ist. Hierzu beweisen wir den

Satz 6. a) Ist $i < i'$, so wird $\gamma(F, g) \leq \gamma(F', g)$, wobei die Gleichheit genau dann eintritt, wenn $g = 2$, $i' = i + 1$, $\mathfrak{P}(F) = \{1, 2, \ldots, i-1\}$ und $\mathfrak{P}(F')$ leer ist.

b) Ist $i = i'$ und $\mathfrak{P}(F) = \mathfrak{P}(F')$, so ist $\gamma(F, g) = \gamma(F', g)$.

c) Ist $i = i'$, $\mathfrak{P}(F) \neq \mathfrak{P}(F')$ und etwa p das größte Element der symmetrischen Differenz[13]) von $\mathfrak{P}(F)$ und $\mathfrak{P}(F')$, so ist $\gamma(F, g) < \gamma(F', g)$ oder $\gamma(F', g) < \gamma(F, g)$, je nachdem ob p zu $\mathfrak{P}(F)$ oder zu $\mathfrak{P}(F')$ gehört.

Beweis. Die linke Seite von (2) läßt sich in der Form

$$f(\mathfrak{P}(F), g, i; z) = (z - g) \sum_{s=1}^{c+1} z^{p_s - 1} + 1 \qquad (p_{c+1} = i) \tag{13}$$

schreiben, woraus unmittelbar zu entnehmen ist, daß $g - 1 \leq \gamma(F, g) < g$ gilt. Für reelles z mit $0 < z < g$ ist, wenn man die leere Menge mit $\mathfrak{L}$ und die Menge $\{1, 2, \ldots, i-1\}$ mit $\mathfrak{B}_i$ bezeichnet, offenbar

$$f(\mathfrak{B}_i, i, g; z) \leq f(\mathfrak{P}(F), i, g; z) \leq f(\mathfrak{L}, i, g; z)$$

für jede Sequenz F von der Länge i. Da ferner in dem betrachteten Intervall

$$\begin{cases} f(\mathfrak{L}, i+1, g; z) = z^{i+1} - g z^i + 1 \leq z^{i+1} - g z^i + g - 1 \\ \qquad = (z-1)\left(z^i - (g-1)\sum_{j=0}^{i-1} z^j\right) = (z-1) f(\mathfrak{B}_i, i, g; z) \end{cases} \tag{14}$$

ist, folgt für die zugehörigen Wurzeln, wenn $\gamma(F, g) = \gamma(\mathfrak{P}(F), i, g)$ geschrieben wird,

$$\gamma(\mathfrak{L}, i, g) = \gamma(\mathfrak{P}(F), i, g) \leq \gamma(\mathfrak{B}_i, i, g) = \gamma(\mathfrak{L}, i+1, g).$$

Wie aus (14) hervorgeht, ist genau dann $\gamma(\mathfrak{B}_i, i, g) = \gamma(\mathfrak{L}, i+1, g)$, wenn $g = 2$ ist, und damit ist Teil a) bewiesen.

Teil b) folgt unmittelbar aus Satz 1.

Zum Beweise von Teil c) ist zu berücksichtigen, daß etwa im Falle $p \in \mathfrak{P}(F)$ für reelles z mit $0 < z < g$

$$f(\mathfrak{P}(F), i, g; z) - f(\mathfrak{P}(F'), i, g; z) = (z - g)\left(z^{p-1} + \sum_{\substack{p_s < p \\ p_s \in \mathfrak{P}(F)}} z^{p_s - 1} - \sum_{\substack{p'_i < p \\ p'_i \in \mathfrak{P}(F')}} z^{p'_i - 1}\right) \tag{15}$$

wird. Der zweite Faktor rechts ist ein Polynom der Form

$$z^{p-1} - a_{p-2} z^{p-2} + \cdots + a_0 \qquad (a_j = 1, -1 \text{ oder } 0),$$

[13]) Die symmetrische Differenz zweier Mengen besteht bekanntlich aus den Elementen, die zu genau einer von beiden gehören.

ist also im betrachteten Intervall $\geq z^{p-1} - \sum_{j=0}^{p-2} z^j$ und daher für $z > \gamma(\mathfrak{V}_{i-1}, i-1, 2)$, also erst recht für $z > \gamma(\mathfrak{V}_{i-1}, i-1, g)$ positiv. Nach (15) ist folglich

$$\gamma(\mathfrak{P}(F), i, g) < \gamma(\mathfrak{P}(F'), i, g).$$

6. Sei $\mathfrak{N}(F, g)$ die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen, in deren g-adischer Entwicklung

$$k = \sum_{j=1}^{n} e_j g^j \qquad (0 \leq e_j < g)$$

die Sequenz F nicht auftritt, und sei $K(F, g; x) = K(x)$ die Anzahl der Elemente $k \in \mathfrak{N}(F, g)$ mit $k \leq x$. Dann gilt der

Satz 7. Es gibt positive Konstanten β_1 und β_2 mit

$$\beta_1 x^{\frac{\log \gamma(F,g)}{\log g}} \left(\frac{\log x}{\log g}\right)^{\nu} < K(x) < \beta_2 x^{\frac{\log \gamma(F,g)}{\log g}} \left(\frac{\log x}{\log g}\right)^{\nu}.$$

Beweis. Ist ϱ ein Element der Menge $R_n(F, g)$ von Nr. **3** und etwa $\varrho = \sum_{j=1}^{n} \frac{e_j}{g^j}$ die zugehörige g-adische Entwicklung, so ist die ganze Zahl $k = \sum_{j=0}^{n-1} e_j g^{n-j}$ ein Element von $\mathfrak{N}(F, g)$ mit $0 \leq k < g^n$. Da auch umgekehrt jeder ganzen Zahl $k \in \mathfrak{N}(F, g)$ mit $0 \leq k < g^n$ in entsprechender Weise eindeutig ein Element von $R_n(F, g)$ zugeordnet werden kann, ist

$$h(n) = K(g^n - 1) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Folglich ist für jede ganze Zahl x mit $g^n \leq x < g^{n+1}$ offenbar

$$h(n) \leq K(x-1) < h(n+1)$$

und damit

$$h\left(\left[\frac{\log x}{\log g}\right]\right) \leq K(x-1) < h\left(\left[\frac{\log x}{\log g}\right] + 1\right),$$

also auf Grund von Hilfssatz 3

$$\left[\frac{\log x}{\log g}\right]^{\nu} \gamma_1^{\left[\frac{\log x}{\log g}\right]} (\sigma_\nu + o(1)) \leq K(x-1) < \left(\left[\frac{\log x}{\log g} + 1\right]\right) \gamma_1^{\left[\frac{\log x}{\log g}\right]+1} (\sigma_\nu + o(1)).$$

Hieraus folgt die Behauptung, da $0 \leq K(x) - K(x-1) \leq 1$ ist.

Mainz, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 15. Juli 1953.)

ZELLER, K.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 271—277 (1953)

Über die Darstellbarkeit von Limitierungsverfahren mittels Matrixtransformationen.

Von
K. ZELLER.

1. Einleitung.

Ein Limitierungsverfahren V ist eine Vorschrift, durch die jeder Zahlenfolge $\mathfrak{x}=\{x_k\}$ aus dem Wirkfeld $\mathfrak{W}$ dieses Verfahrens ein Grenzwert $V\text{-}\lim x_k$ zugeordnet wird. Zwei Verfahren V und W heißen äquivalent, wenn sie dasselbe Wirkfeld besitzen und jeder Folge aus dem Wirkfeld denselben Grenzwert geben. Meistens wird ein Limitierungsverfahren mit Hilfe einer Matrixtransformation

$$\mathfrak{y}=A\mathfrak{x} \quad \equiv \quad y_n=\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\,x_k \qquad (n=0,1,\ldots)$$

erklärt. Die Folge $\mathfrak{x}$ heißt limitierbar durch das Matrixverfahren A, wenn alle Summen y_n existieren und $\lim y_n$ vorhanden ist. Es gibt jedoch auch Verfahren V, die anders definiert werden (s. unten); und es fragt sich dann, ob V durch ein Matrixverfahren A im obigen Sinn ersetzt werden kann, d.h. ob es ein Matrixverfahren A gibt, das mit V äquivalent ist.

Wir behandeln die Frage in zwei Fällen:

I. V ist das Verfahren $\overline{C}_1^{(q)}$ der starken C_1-Limitierbarkeit q-ter Ordnung. Für $0<q<1$ ist $\overline{C}_1^{(q)}$ keinem Matrixverfahren äquivalent. Für dieses Ergebnis von KUTTNER [1946] geben wir einen kürzeren Beweis, indem wir die „Faktorfolgen" bei $\overline{C}_1^{(q)}$ betrachten. Der Beweis enthält den KUTTNERschen Grundgedanken in versteckter Form. Bei $q\geq 1$ gibt es überraschenderweise Matrixverfahren, die mit $\overline{C}_1^{(q)}$ äquivalent sind. Der Beweis beruht auf Abschätzungen wie

$$\sum_{k=0}^{n}|x_k|\leq 4\sup_{\mathfrak{N}}\left|\sum_{k\in\mathfrak{N}}x_k\right|$$

($\mathfrak{N}$ durchläuft alle Teilmengen von $\{0,1,\ldots,n\}$).

II. V ist der Durchschnitt von Matrixverfahren $A^{(i)}$. Unter gewissen Voraussetzungen ist V keinem Matrixverfahren äquivalent. Der Beweis beruht auf dem Unterschied zwischen B- und F-Räumen. Das Ergebnis gestattet eine Anwendung auf den Durchschnitt von CESÁRO-Verfahren.

Herrn W. MEYER-KÖNIG bin ich für mehrere Ratschläge zu Dank verpflichtet.

Eine Zusammenstellung von Literatur über Inäquivalenzsätze findet man bei MEYER-KÖNIG–ZELLER [1953]. Zu nennen sind außerdem die Arbeiten von MAZUR-ORLICZ [1933], ERDÖS-PIRANIAN [1950] und WILANSKY [1952], in

denen der Unterschied zwischen zeilenfiniten und nichtzeilenfiniten Matrixverfahren behandelt wird.

2. Starke Limitierbarkeit.

Wir definieren die starke C_1-Limitierbarkeit q-ter Ordnung: Eine Folge $\{x_k\}$ heißt $\overline{C}_1^{(q)}$-limitierbar zum Werte x, wenn

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|x_k - x|^q \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

gilt.

Satz 1. Die starke C_1-Limitierbarkeit q-ter Ordnung ist für $0<q<1$ keinem Matrixverfahren äquivalent, jedoch für $q \geq 1$ gewissen Matrixverfahren äquivalent.

Beweis. I. $0<q<1$. Es genügt der Nachweis, daß unter den Matrixverfahren A mit der Eigenschaft

(1) $$\text{Aus} \quad \overline{C}_1^{(q)} - \lim x_k = 0 \quad \text{folgt} \quad A - \lim x_k \text{ ex.}$$

kein mit $\overline{C}_1^{(q)}$ äquivalentes Verfahren ist. Dazu betrachten wir die Faktorfolgen von $\overline{C}_1^{(q)}$. Gilt $\overline{C}_1^{(q)}$-$\lim x_k = 0$, so ist für jede beschränkte Folge b_k (Faktorfolge) ebenfalls $\overline{C}_1^{(q)}$-$\lim x_k b_k = 0$, d.h. die Matrix $\{a_{nk} x_k\}$ limitiert jede beschränkte Folge b_k, insbesondere gilt

(2) $$\sup_k \sup_n |a_{nk} x_k| < \infty.$$

Jede Folge der Form

$$x_k = \alpha_k^{1/q}(k+1)^{1/q} \qquad (\sum |\alpha_k| < \infty)$$

wird von $\overline{C}_1^{(q)}$ zu Null limitiert. Ein solches x_k kann „fast" die Größenordnung $(k+1)^{1/q}$ erreichen. Aus (2) ergibt sich

$$\sup_n |a_{nk}| \leq \frac{\varrho}{(k+1)^{1/q}} \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

mit einem geeigneten ϱ und somit

(3) $$\sum_{k=0}^{\infty} \sup_n |a_{nk}| < \infty.$$

Aus (1) folgt natürlich

(4) $$\lim_{n\to\infty} a_{nk} \text{ ex.} \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

(3) und (4) ergeben zusammen, daß A jede beschränkte Folge zu Null limitiert, eine Eigenschaft, die bei $\overline{C}_1^{(q)}$ fehlt. Wir haben das gewünschte Ziel erreicht.

II. $q=1$. Wir stützen uns auf den

Hilfssatz. Die $n+1$ Zahlen $x_k (k=0, 1, \ldots, n)$ mit $\sum_{k=0}^{n}|x_k| = 1$ seien gegeben, $\left[\frac{n+2}{2}\right] = m$ gesetzt. Dann gibt es eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\{0, 1, \ldots, n\}$

mit m Elementen, so daß

$$\left|\sum_{k\in\mathfrak{M}} x_k\right| \geq \tfrac{1}{4}$$

ist.

Beim Beweis nehmen wir zunächst die x_k als reell an. Dann gilt

$$1 = \sum_{k\in\mathfrak{P}} x_k - \sum_{k\in\mathfrak{N}} x_k = \Theta - (\Theta - 1),$$

wo $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{N}$ die k mit $x_k \geq 0$ bzw. $x_k < 0$ enthält. Wir dürfen (nach eventueller Multiplikation mit -1) annehmen, daß $\mathfrak{P}$ mindestens m Elemente, $\mathfrak{N}$ also höchstens m Elemente umfaßt. Den trivialen Fall $\mathfrak{N} = 0$ schließen wir aus. Für ein geeignetes $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{P}$ ($\mathfrak{M}$ wie oben) ist

$$\left|\sum_{k\in\mathfrak{M}} x_k\right| \geq \frac{\Theta}{2},$$

für ein anderes geeignetes $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{N}$ ($\mathfrak{M}$ wie oben)

$$\left|\sum_{k\in\mathfrak{M}} x_k\right| \geq (1-\Theta) - \frac{\Theta}{2} = 1 - \frac{3}{2}\Theta.$$

Nun gilt

$$\operatorname*{Min}_{0\leq\Theta\leq 1} \operatorname*{Max}\left[\frac{\Theta}{2},\ 1-\frac{3}{2}\Theta\right] = \frac{1}{4}.$$

Eines der beiden genannten $\mathfrak{M}$ genügt somit der Ungleichung

$$\left|\sum_{k\in\mathfrak{M}} x_k\right| \geq \tfrac{1}{4}.$$

Zulassung komplexer x_k verschlechtert die Konstante 1/4 höchstens um den Faktor 1/2, w. z. z. w.

Zurück zum Beweis des Satzes im Falle $q = 1$! Wir erhalten für jedes n endlich viele $\mathfrak{M}(n, p)$ der im Hilfssatz beschriebenen Art. Wir betrachten die Matrixtransformation

$$y_r = z_{np} = \frac{2}{n+1} \sum_{k\in\mathfrak{M}(n,p)} x_k$$

(wobei die y_r die lexikographisch angeordneten z_{np} sind). Die Transformation $\{x_k\} \to \{y_r\}$ ist permanent, d.h. führt konvergente Folgen in konvergente Folgen gleichen Grenzwerts über [wegen dieser Permanenz hatten wir die $\mathfrak{M}(n, p)$ sorgfältig ausgewählt]. Das der Transformation entsprechende Limitierungsverfahren limitiert wegen

$$|z_{np}| \leq \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |x_k| \leq 8 \sup_p |z_{np}|$$

(vgl. den Hilfssatz!) genau dieselben Folgen zu Null wie $\overline{C}_1^{(1)}$, woraus die Äquivalenz folgt.

III. $q > 1$. Der einfacheren Bezeichnung halber führen wir den Beweis nur für $q = 2$ durch. Wir betrachten $(n+1)$-gliedrige Vektoren $\mathfrak{x} = \{x_0, \ldots, x_n\}$,

$\mathfrak{h} = \{h_0, \ldots, h_n\}$ und setzen

$$||\mathfrak{x}|| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |x_k|^2},$$

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{h} = \sum_{k=0}^{n} x_k h_k.$$

Hilfssatz. Es gibt endlich viele Vektoren $\mathfrak{h}$ mit $||\mathfrak{h}|| \leq 3$ und $\sum h_k = \sqrt{n+1}$, so daß

$$\operatorname{Max}_{\mathfrak{h}} |\mathfrak{x}\,\mathfrak{h}| \geq \tfrac{1}{2}\,||\mathfrak{x}||$$

für jedes $\mathfrak{x}$ gilt.

Beweis. Es ist

$$\operatorname{Max}_{\mathfrak{f}} |\mathfrak{x}\,\mathfrak{f}| = 2 \cdot ||\mathfrak{x}|| \qquad (||\mathfrak{f}|| \leq 2,\ f = \sum f_k \geq 0).$$

Betrachte für $\mathfrak{x} \neq 0$ das $\mathfrak{f}$ mit

$$f_k = \tau \cdot \frac{2}{||\mathfrak{x}||}\,\bar{x}_k, \qquad \tau = \operatorname{sign} \sum_{k=0}^{n} \bar{x}_k.)$$

Wir approximieren nun diese $\mathfrak{f}$ durch Vektoren $\mathfrak{h}$ der beschriebenen Art. Zunächst setzen wir

$$g_k = f_k + \frac{\sqrt{n+1} - f}{n+1} \qquad (f = \sum f_k).$$

Dann gilt

$$\sum g_k = f + \sqrt{n+1} - f = \sqrt{n+1}$$

und

$$||\mathfrak{f} - \mathfrak{g}|| \leq (n+1)\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\right)^2 = 1, \quad \text{also} \quad ||\mathfrak{g}|| \leq 3,$$

da

$$0 \leq f = \sum f_k \leq \sum |f_k| \leq ||\mathfrak{f}|| \cdot \sqrt{n+1} = 2\sqrt{n+1}$$

ist.

Unter den $\mathfrak{g}$ können wir endlich viele Vektoren $\mathfrak{h}$ aussuchen, so daß jedes $\mathfrak{g}$ durch ein $\mathfrak{h}$ gemäß

$$||\mathfrak{g} - \mathfrak{h}|| \leq \tfrac{1}{2}$$

angenähert werden kann. Zu jedem $\mathfrak{f}$ ($\mathfrak{f}$ wie oben) gibt es dann ein $\mathfrak{h}$ mit

$$||\mathfrak{f} - \mathfrak{h}|| \leq ||\mathfrak{f} - \mathfrak{g}|| + ||\mathfrak{g} - \mathfrak{h}|| \leq 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2},$$

also

$$|\mathfrak{x}\,\mathfrak{h}| \geq |\mathfrak{x}\,\mathfrak{f}| - \tfrac{3}{2}\,||\mathfrak{x}||.$$

Es ergibt sich die Behauptung.

Dieselben Überlegungen wie in II. liefern nun den Beweis des Satzes für $q=2$; man beachte, daß sich die $\overline{C}_1^{(q)}$-Limitierbarkeit auch durch

$$(n+1)^{-\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k - x|^q \right)^{\frac{1}{q}} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

definieren läßt.

Satz 1 läßt sich verallgemeinern, indem man der starken Limitierbarkeit andere Matrizen statt der Matrix der arithmetischen Mittel zugrunde legt. Jedoch ergeben sich dabei gewisse Änderungen; so gilt z.B. für $0<q<1$ nicht immer ein Inäquivalenzsatz.

3. Der Durchschnitt von Matrixverfahren.

Wir schließen uns in Bezeichnung und Methode an Verf. [1951_2, insbesondere § 8] an. $\mathfrak{S}_N$ ist die Menge der Nullfolgen, $\mathfrak{S}_N A$ die Menge der Folgen, die von der Matrix A in Nullfolgen transformiert werden. $\mathfrak{S}_N A$ ist ein FK-Raum (s. l. c.) mit geeigneten Halbnormen p_j. A heißt perfekt, wenn die abbrechenden Folgen im FK-Raum $\mathfrak{S}_N A$ dicht liegen.

Satz 2. Voraussetzung. Die Matrixverfahren $A^{(i)}$ $(i=0, 1, \ldots)$ haben folgende Eigenschaften:

Die $A^{(i)}$ sind permanent und perfekt.

Es ist $\mathfrak{S}_N A^{(i)} \supseteq \mathfrak{S}_N A^{(i+1)}$ $(i=0, 1, \ldots)$.

Zu jeder Folge $\delta_k \nearrow \infty$ und jedem j gibt es eine Folge

$$\mathfrak{x} \notin \bigcap \mathfrak{S}_N A^{(i)}, \qquad \mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_N A^{(j)}, \qquad x_k = O(\delta_k).$$

Behauptung. Es gibt keine Matrix A mit $\mathfrak{S}_N A = \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{S}_N A^{(i)}$, d.h. kein Matrixverfahren A ist dem Durchschnitt der Verfahren $A^{(i)}$ äquivalent.

Beweis. Wir verwenden fast dieselbe Methode wie Verf. [1951_2, Satz 8.1] und fassen uns daher kurz. $\bigcap \mathfrak{S}_N A^{(i)}$ ist ein FK-Raum mit den Halbnormen p_{ji} der Räume $\mathfrak{S}_N A^{(i)}$. Wir dürfen $\mathfrak{S}_N A \supseteq \bigcap \mathfrak{S}_N A^{(i)}$ annehmen. A bildet also $\bigcap \mathfrak{S}_N A^{(i)}$ in $\mathfrak{S}_N$ ab, diese Abbildung ist stetig, somit gilt für die Halbnorm

$$q(\mathfrak{x}) = \sup_n \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \right|$$

eine Ungleichung

$$q(\mathfrak{x}) \leq \varrho \sum_{j=0}^{l'} \sum_{i=0}^{l} p_{ji}(\mathfrak{x}) \qquad (\mathfrak{x} \in \bigcap \mathfrak{S}_N A^{(i)}).$$

Die Funktionale

$$a_n(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

lassen sich daher stetig auf den Raum $\bigcap_{i=0}^{l} \mathfrak{S}_N A^{(i)} = \mathfrak{S}_N A^{(l)}$ fortsetzen, so daß

$$\sup_n |a_n(\mathfrak{x})| < \infty \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_N A^{(l)})$$

gilt. Die Perfektheit von $A^{(l)}$ liefert hier sogar die Existenz von $\lim_n a_n(\xi) = 0$, m. a. W.: Das „natürlich erweiterte" Verfahren A ist so stark wie $A^{(l)}$. Es muß nur noch gezeigt werden, daß die Gleichungen

$$a_n(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

auch für gewisse $\xi \in \mathfrak{S}_N A^{(l)}$, $\xi \notin \bigcap \mathfrak{S}_N A^{(i)}$ gelten. Dazu dient uns die dritte Voraussetzung. Als stetige Linearformen in $\mathfrak{S}_N A^{(l)}$ sind die $a_m(\xi)$ von der Gestalt (vgl. Verf. [1951_1, Satz 5.2])

$$a_m(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(m) \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}^{(l)} x_k + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(m)\, x_k \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n(m)| < \infty\right).$$

Wegen der Permanenz von $A^{(l)}$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n(m)\, a_{nk}^{(l)}| < \infty \qquad (m = 0, 1, \ldots)$$

und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n(m)\, a_{nk}^{(l)}\, \delta_k| < \infty \qquad (m = 0, 1, \ldots),$$

wenn nur δ_k genügend langsam wächst. Für $x_k = O(\delta_k)$ darf man also oben die Summationsreihenfolge vertauschen und erhält

$$a_m(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(m)\, x_k$$

mit gewissen $\gamma_k(m)$. Einsetzen abbrechender Folgen x_k lehrt

$$\gamma_k(m) = a_{mk} \qquad (k, m = 0, 1, \ldots).$$

Wir nehmen nun das in der dritten Voraussetzung genannte ξ für $j = l$ und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} a_n(\xi) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k = 0,$$

womit die Behauptung folgt.

Wir fügen einige Bemerkungen an, die die Lage bei „Durchschnittssätzen" und die Stellung von Satz 2 beleuchten.

I. Satz 2 gestattet den Nachweis, daß für jedes $a > 0$ der Durchschnitt der CESÁRO-Verfahren mit Ordnung $\alpha > a$ keinem Matrixverfahren äquivalent ist. (Darauf wird Verf. noch zusammen mit Herrn MEYER-KÖNIG zurückkommen.) Für $a \geq 1$ kann dies nicht mit den Methoden des Verf. [1951_2, § 8] bewiesen werden, weil — mit den dortigen Bezeichnungen — die Menge der ξ, die in $\mathfrak{S}_N C^{(\alpha)}$ die Eigenschaft SAK bzw. AK besitzen, für alle $\alpha > 1$ bzw. $\alpha \geq 1$ gleich ist.

II. Die $A^{(i)}$ seien permanente Matrixverfahren, $\mathfrak{S}_N A^{(i)} \supsetneqq \mathfrak{S}_N A^{(i+1)}$. Dann kann $\bigcap \mathfrak{S}_N A^{(i)} = \mathfrak{S}_N$ sein. Sind jedoch die $A^{(i)}$ perfekt, so ist $\bigcap \mathfrak{S}_N A^{(i)}$ sicher keinem zeilenfiniten Matrixverfahren äquivalent. Jedoch gibt es Beispiele perfekter $A^{(i)}$, für die $\bigcap \mathfrak{S}_N A^{(i)}$ einem gewissen nichtzeilenfiniten Verfahren äquivalent ist.

Literatur.

ERDÖS, P., and G. PIRANIAN: Convergence fields of row-finite and row-infinite Toeplitz transformations. Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 397—401 (1950). — KUTTNER, B.: Note on strong summability. J. London Math. Soc. **21**, 118—122 (1946). — MAZUR, S., et W. ORLICZ: Sur les méthodes linéaires de sommation. C.r. Acad. Sci. Paris **196**, 32—34 (1933). — MEYER-KÖNIG, W., u. K. ZELLER: Inäquivalenzsätze bei Limitierungsverfahren. Math. Z. **59**, 200—205 (1953). — WILANSKY, A.: Convergence fields of row-finite and row-infinite reversible matrices. Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 389—391 (1952). — ZELLER, K.: Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. **53**, 463—487 (1951_1). — Abschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math. Z. **55**, 55—70 (1951_2).

Dep. Math., University of Pennsylvania, Philadelphia, USA.

(Eingegangen am 28. Juli 1953.)

GROTEMEYER, K. P.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 278—289 (1953)

Gleitverbiegungen und eindeutige Bestimmtheit isometrischer, ebenrandiger Mützen.

Von

K. P. GROTEMEYER.

Unter einer Mütze $\mathfrak{M}$ mit der geschlossenen Randkurve $R(\mathfrak{M})$ wollen wir ein Flächenstück mit folgenden Eigenschaften verstehen:

1. $\mathfrak{M}$ sei einfach zusammenhängend und dreimal stetig differenzierbar.
2. $R(\mathfrak{M})$ sei eben und zweimal stetig differenzierbar.
3. $\mathfrak{M}$ besitze positive GAUSSsche Krümmung.
4. Die Projektion von $\mathfrak{M}$ auf die Randebene sei einwertig[1]).

Die Gesamtheit der Flächen mit diesen vier Eigenschaften sei mit M bezeichnet.

Nach H. LIEBMANN [*1*] nennt man diejenigen infinitesimalen Verbiegungen[2]) einer Fläche $\mathfrak{F}$ mit dem ebenen Rand $R(\mathfrak{F})$ Gleitverbiegungen, die den Rand $R(\mathfrak{F})$ eben lassen. Wenn nämlich $R(\mathfrak{F})$ und die daraus durch infinitesimale Verbiegung hervorgehende Kurve eben sind, so läßt es sich durch eine infinitesimale Bewegung stets erreichen, daß diese Randkurven in einer Ebene liegen, so daß $R(\mathfrak{F})$ bei den Gleitverbiegungen in dieser Ebene gleitet.

Im ersten Teil beweisen wir die infinitesimale Starrheit der Flächen der Klasse M gegenüber infinitesimalen Gleitverbiegungen[3]). Der Beweis ergibt sich sehr einfach mit Hilfe einer schon früher mit Vorteil verwendeten Integralformel [*11*]. Ferner zeigt sich, daß bei den Flächen der Klasse M die Starrheitsaussage gegenüber infinitesimalen Verbiegungen wesentlich von der

[1]) $\mathfrak{M}$ gestattet dann eine Darstellung der Form $z=f(x, y)$ mit eindeutigem $f(x, y)$.

[2]) Da man eine Mütze als echten Teil einer Eifläche auffassen kann, so folgt aus der infinitesimalen Verbiegbarkeit der punktierten Eiflächen die der Mützen.

[3]) Bei analytischen Flächen und analytischen Verbiegungen hat schon H. LIEBMANN auf diesen Satz hingewiesen. Vgl. [*1*]. Herr E. REMBS teilte mir hierzu freundlicherweise brieflich mit, daß man aus der (auf Flächen der Klasse M) gültigen Differentialgleichung für ζ:

$$z_{xx}\zeta_{yy} - 2z_{xy}\zeta_{xy} + z_{yy}\zeta_{xx} = 0$$

[ζ ist die z-Komponente des Deformationsvektors $\bar{\xi}$ der infinitesimalen Verbiegung der betrachteten Fläche $z=f(x, y)$ aus der Klasse M] unter Verwendung des Satzes von der Nichtexistenz von Extrema von ζ in inneren Punkten der vorliegenden Fläche, die infinitesimale Starrheit der Fläche der Klasse M gegenüber Gleitverbiegungen (unter Differenzierbarkeitsvoraussetzungen) herleiten kann.

zweiten Variation der Randkurvenkrümmung abhängt. Ist nämlich das Integral über diese zweite Variation längs der Randkurve nicht positiv, so folgt daraus die Starrheit gegenüber den betreffenden infinitesimalen Verbiegungen.

Im zweiten Teil beweisen wir den Satz, daß zwei isometrische Flächen der Klasse M notwendig kongruent oder symmetrisch sind. Auch dieser Beweis verläuft recht einfach bei Benutzung einer vektoriellen Integralformel [*9*], [*10*], aus der sich bei früheren Untersuchungen [*11*] für Halbeiflächen (die natürlich in der Klasse M enthalten sind) ein Kongruenzsatz ergab, der in diesem Fall eine allgemeinere Aussage lieferte. (Die zur Halbeifläche isometrische Fläche braucht nicht notwendig eine Mütze zu sein; es soll nur der Rand eben sein.) Wegen weiterer Anwendungen dieser vektoriellen Integralformel sei auf [*12*] verwiesen. Die Flächen der Klasse M sind also eindeutig (d.h. bis auf Bewegungen oder Spiegelungen) durch die erste Fundamentalform bestimmt. Aus folgendem Grunde ist die Frage nach der eindeutigen Bestimmtheit der Flächen der Klasse M von besonderem Interesse. Pogorelov [*8*] bemerkt, daß Alexandrov folgendes gezeigt hat: Wenn in irgendeinem Gebiet G der Ebene eine Metrik mit positiver Gaussscher Krümmung gegeben ist, so hat jeder Punkt dieses Gebietes eine Umgebung, in der man die gegebene Metrik durch eine Fläche der Klasse M realisieren kann. Die Eindeutigkeit der Realisierung blieb aber ungeklärt[4]). Dieselbe wurde dann von Pogorelov [*8*] nachgewiesen (für glatte, durch ebene Kurven berandete Mützen). Allerdings sind diese Untersuchungen ziemlich kompliziert und recht umfangreich. Nach einem Satz von Rellich [*7*] kann man unter bestimmten Voraussetzungen folgern, daß es zu einer Mütze der Klasse M höchstens eine weitere isometrische Fläche der Klasse M geben kann, die nicht kongruent oder symmetrisch zur ersteren ist. Vgl. Anm. [10]).

Es sei noch darauf hingewiesen, daß es infinitesimale Gleitverbiegungen bei konvexen Flächen gibt, die die Eigenschaften 1 bis 3 der Mützen mit ebenem Rand haben, aber keine einwertige Projektion auf die Randebene besitzen. Liebmann [*1*] S. 39f. zeigte nämlich folgendes: Bringt man die Einheitskugel mit einer Ebene im Abstande $1/k$ ($k=2, 3, \ldots$ ganz $< \infty$) vom Mittelpunkt der Kugel zum Schnitt, so erhält man zwei Kalotten. Die größere der beiden (d.h. diejenige, die den Mittelpunkt im Inneren der kleinsten konvexen Hülle enthält), erfüllt offensichtlich die Eigenschaften 1 bis 3 der Flächenklasse M. Diese Kalotte gestattet infinitesimale Gleitverbiegungen. Die kleinere Kalotte ist natürlich bei infinitesimalen Gleitverbiegungen starr. (Für $k \to \infty$ gehen die Kalotten in die Halbkugeln über, die natürlich keine Gleitverbiegungen zulassen [*11*].) Man kann daraus, wie es auch Liebmann getan hat, weitere Folgerungen ziehen, wenn man an den bekannten Zusammenhang erinnert, der eine Beziehung zwischen der infinitesimalen Verbiegung und einem isometrischen Flächenpaar herstellt. Damit läßt sich die Existenz

[4]) Die genauen Voraussetzungen dieses Satzes, sowie die zugehörigen Literaturstellen sind in [*8*] nicht angegeben.

isometrischer ebenrandiger (sogar algebraischer) Paare von Flächenkalotten nachweisen, die nicht kongruent oder symmetrisch sind [1] S. 40 und [6] S. 276[5]).

Zum Abschluß der Arbeit sei noch auf eine einfache Verwandtschaft hingewiesen, die zwischen den verwendeten vektoriellen Integralformeln der infinitesimalen und der endlichen Flächenverbiegungen besteht. Auf die entsprechenden Zusammenhänge bei skalaren Integralformeln hat schon E. REMBS [5] hingewiesen. Wegen der benutzten Bezeichnungsweise sei auf [2], [9] und auf [11] verwiesen.

Wir denken uns die Mütze $\mathfrak{M}$ der Klasse M durch nach „innen" (d.h. ins Innere der konvexen Hülle von $\mathfrak{M}$) weisende, normierte Normalenvektoren ξ orientiert. Die mittlere Krümmung H von $\mathfrak{M}$ ist dann nicht negativ auf $\mathfrak{M}$[6]). $\mathfrak{x}(u^i)$ sei der Ortsvektor von $\mathfrak{M}$. Mit $\mathfrak{e}$ bezeichnen wir den Stellungsvektor der Randebene von $\mathfrak{M}$, der nach derjenigen Seite der Randebene weist, auf der die Mütze $\mathfrak{M}$ nicht liegt. Es gilt dann auf $\mathfrak{M}$:

$$(\mathfrak{e}\,\xi) \geq 0. \tag{1}$$

Ferner wählen wir den Umlaufssinn der Randkurve $R(\mathfrak{M})$ so, daß beim Blick von der jeweiligen Flächennormalenrichtung her [längs $R(\mathfrak{M})$] die Mütze $\mathfrak{M}$ stets zur linken Seite liegt[6a]). $\mathfrak{e}$ fällt dann mit dem Vektor der Binormalen von $R(\mathfrak{M})$ zusammen:

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{b} = \text{const}. \tag{2}$$

Bezeichnet man noch nach [2] und [9] mit $c(s)$ die geodätische Krümmung und mit $b(s) = -B_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k$ die Normalkrümmung längs $R(\mathfrak{M})$, so gilt für die zugehörige Hauptnormale $\mathfrak{n}$:

$$\mathfrak{n} = \frac{1}{k}\ddot{\mathfrak{x}} = \frac{c}{k}\eta - \frac{b}{k}\xi; \qquad \eta = [\xi\dot{\mathfrak{x}}].$$

[$k(s) = \sqrt{c^2 + b^2}$ ist die Krümmung von $R(\mathfrak{M})$. Längs $R(\mathfrak{M})$ ist $k > 0$.]

$$\mathfrak{n} = \cos\varphi\,\eta + \sin\varphi\,\xi, \tag{3}$$

[5]) An dieser Stelle sei ein Hinweis gestattet auf eine Bemerkung von EULER in der Abhandlung: „Problema invenire duas superficies quarum alteram in alteram transformare licet, ita ut in utraque singula puncta homologa easdem inter se teneant distantias." (Opera postuma, t. I, Petropoli 1862, S. 494ff. und im ersten Band S. 10—13 der „Adversaria mathematica", dem Handbuch EULERS von 1766—1775.) Er schließt diese Abhandlung mit der Bemerkung, daß eine überall geschlossene körperliche Figur keine Veränderung zulasse. Solange also die Kugelfläche oder überhaupt eine geschlossene Fläche unversehrt sei, lasse sie keine Veränderungen zu. Indessen sei es klar, daß die Figur der Halbkugel sicher veränderlich sei; was für Veränderungen sie aber erleiden könne, das zu ermitteln sei eine schwierige Aufgabe. Dieselbe Behauptung, daß eine geschlossene Fläche als Ganzes sich nicht biegen läßt, ist bekanntlich 1812 von LAGRANGE und 1838 von MINDING ausgesprochen worden. Vgl. P. STÄCKEL: Bibliotheca mathematica, 3. F. 2, 123 (1900). Herr E. REMBS [6] hat kürzlich geschlossene, infinitesimal verbiegbare Flächen angegeben, die sogar analytisch sind.

[6]) Da auf $\mathfrak{M}$ stets $K > 0$ sein sollte, so können keine Flachpunkte auftreten. Es ist daher auf $\mathfrak{M}$ sogar $H > 0$.

[6a]) Unter dieser Voraussetzung gelten die in [9], [10] und [11] angegebenen Integralsätze, von denen hier zwei verwendet werden.

mit

$$\cos\varphi = \frac{c}{k}; \qquad \sin\varphi = -\frac{b}{k}. \tag{4}$$

Aus den Gln. (3) und (2) folgt wegen $\mathfrak{b} = [\dot{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{n}]$

$$\mathfrak{b} = -\sin\varphi\,\eta + \cos\varphi\,\xi = \mathfrak{e}. \tag{5}$$

Es ist daher nach (1)

$$(\mathfrak{e}\,\xi) = \cos\varphi \geq 0 \quad \text{auf} \quad R(\mathfrak{M}). \tag{6}$$

Da $K > 0$ und auch $H > 0$ auf $\mathfrak{M}$ ist, so ist der Tensor B_{ik} der zweiten Fundamentalform auf $\mathfrak{M}$ positiv definit, somit

$$b(s) = -B_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k < 0. \tag{7}$$

Nach (4) endlich:

$$\sin\varphi > 0. \tag{7_1}$$

Aus (6) und (7_1) erkennt man, daß man φ in dem Intervall

$$0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2} \tag{8}$$

wählen darf.

Die infinitesimalen Gleitverbiegungen.

Die Gleitverbiegungen von $\mathfrak{M}$ können wir durch das Stationärsein der Torsion längs $R(\mathfrak{M})$ kennzeichnen:

$$\delta\varkappa = 0 \quad \text{vgl. [11]}. \tag{9}$$

Nach den Ableitungsgleichungen von FRENET gilt weiter

$$\dot{\mathfrak{b}} = -\varkappa\,\mathfrak{n} \tag{10}$$

und daher

$$\delta\dot{\mathfrak{b}} = -\delta\varkappa\,\mathfrak{n} - \varkappa\,\delta\mathfrak{n}. \tag{11}$$

Wegen $\varkappa = 0$ längs $R(\mathfrak{M})$, erhalten wir für die Gleitverbiegungen

$$\delta\dot{\mathfrak{b}} = 0 \quad \text{oder} \quad \delta\mathfrak{b} = \mathfrak{c} = \text{const}. \tag{12}$$

Umgekehrt folgt auch aus $\delta\mathfrak{b} = \text{const}$ wieder $\delta\varkappa = 0$, wie aus (11) ersichtlich ist. Wir werden daher fortan (12) als kennzeichnende Eigenschaft der Gleitverbiegungen benutzen.

Jetzt soll noch $\delta\mathfrak{b}$ für allgemeine infinitesimale Verbiegungen berechnet werden. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{y}$ den Drehriß der vorliegenden Fläche $\mathfrak{x}$ so gilt:

$$\delta\dot{\mathfrak{x}} = [\mathfrak{y}\,\dot{\mathfrak{x}}] \quad \text{und auch} \quad \delta\xi = [\mathfrak{y}\,\xi]. \tag{13}$$

Für $\eta = [\xi\,\dot{\mathfrak{x}}]$ findet man daraus

$$\delta\eta = [\mathfrak{y}\,\eta]. \tag{14}$$

Aus der Gl. (5) können wir jetzt $\delta\mathfrak{b}$ berechnen:

$$\delta\mathfrak{b} = (-\cos\varphi\,\eta - \sin\varphi\,\xi)\,\delta\varphi - \sin\varphi\,\delta\eta + \cos\varphi\,\delta\xi$$

oder nach (13) und (14):

$$\delta\mathfrak{b} = -\,\mathfrak{n}\,\delta\varphi + [\mathfrak{y}\,\mathfrak{b}]. \tag{15}$$

Speziell für Gleitverbiegungen gilt daher

$$[\mathfrak{y}\,\mathfrak{b}] = \mathfrak{e} + \mathfrak{n}\,\delta\varphi. \tag{16}$$

Umgekehrt folgt natürlich aus dem Bestehen von (16) auch die Gültigkeit von (12) und damit auch von (9). Das gewonnene Ergebnis läßt sich so formulieren:

Wenn eine Fläche $\mathfrak{F}$ mit dem ebenen Rand $R(\mathfrak{F})$ infinitesimale Gleitverbiegungen [$\delta\varkappa = 0$ längs $R(\mathfrak{F})$] gestatten soll, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß für den zugehörigen Drehriß $\mathfrak{y}$ längs $R(\mathfrak{F})$ gilt:

$$[\mathfrak{y}\,\mathfrak{b}] = \mathfrak{c} + \mathfrak{n}\,\delta\varphi\,^{7}).$$

Darin ist $\mathfrak{b} = \text{const}$[8]) der Einheitsvektor der Binormalen von $R(\mathfrak{F})$. Der konstante Vektor $\mathfrak{c}$ läßt sich durch eine geeignete infinitesimale Bewegung zum Nullvektor machen.

Bevor wir die Frage nach den Starrheitsaussagen gegenüber Gleitverbiegungen stellen, sollen noch zwei, für allgemeine infinitesimale Verbiegungen gültige Beziehungen abgeleitet werden, die δb in Verbindung mit δk bzw. $\delta\varphi$ setzen.

Für alle infinitesimalen Verbiegungen ist die geodätische Krümmung c stationär:

$$\delta c = 0 \quad [11,\ \text{Gl. (27)}]. \tag{17}$$

Wegen $k^2 = c^2 + b^2$ ist daher $k\cdot\delta k = b\,\delta b$ und nach (4) gilt somit

$$\sin\varphi\cdot\delta b = -\,\delta k. \tag{18}$$

Um noch δb mit $\delta\varphi$ zu verbinden, betrachten wir nach (4)

$$\delta b = -\,\delta(k\sin\varphi) = -\,\delta k\sin\varphi - k\cos\varphi\cdot\delta\varphi \tag{19$_1$}$$

und

$$\delta c = \delta(k\cos\varphi) = \delta k\cos\varphi - k\sin\varphi\cdot\delta\varphi = 0.$$

---

[7]) Daraus folgt auch, daß man durch eine geeignete infinitesimale Bewegung mit dem Drehriß $\mathfrak{a} = \text{const}$ den festen Vektor $\mathfrak{c}$ zum Nullvektor machen kann. Woraus wegen $\delta\mathfrak{b} = 0$ dann das „Stationärsein" der Randebene folgt. Bei einer infinitesimalen Bewegung ist $\delta\varphi = 0$. Wir wählen daher den Vektor $\mathfrak{a} = \text{const}$ so, daß $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = -\mathfrak{c}$ wird. Betrachtet man statt den Gleitverbiegungen mit dem Drehriß $\mathfrak{y}$ diejenigen, die einen Drehriß der Form $\mathfrak{y}+\mathfrak{a}$ haben, dann ist in verständlicher Schreibweise:

$$\delta\mathfrak{b} = \delta_{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} + \delta_{\mathfrak{y}}\mathfrak{b} = [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] + \mathfrak{c} = 0.$$

[8]) $R(\mathfrak{F})$ soll keine Gerade sein.

Daher ist

$$\delta k \cos\varphi = k \sin\varphi \cdot \delta\varphi. \tag{19_2}$$

Nach der Multiplikation von (19_1) mit $\cos\varphi$ folgt aus (19_2) die gesuchte Relation zwischen δb und $\delta\varphi$:

$$\cos\varphi \cdot \delta b = -\, k\, \delta\varphi. \tag{20}$$

Die Starrheit ebenrandiger Mützen gegenüber Gleitverbiegungen.

Satz 1. *Eine Fläche der Klasse M ist starr gegenüber allen infinitesimalen Gleitverbiegungen.*

Beweis. Wir wenden auf die vorliegende Mütze der Klasse M den vektoriellen Integralsatz

$$\iint \|\alpha_i^k\| \, \xi \, do = \tfrac{1}{2} \oint [\mathfrak{y}\, \dot{\mathfrak{y}}]\, ds \tag{21}$$

an. (Wegen der Bezeichnung vgl. man hierzu [*11*] S. 53—55.) Da auf $\mathfrak{M}$ die Gausssche Krümmung positiv ist, so gilt auf $\mathfrak{M}$:

$$\|\alpha_i^k\| \leqq 0, \tag{22}$$

und aus dem Verschwinden dieser Determinante folgt $\alpha_i^k = 0$. Da

$$\mathfrak{y}_i = \alpha_i^k \mathfrak{x}_k$$

ist ($\mathfrak{y}$ ist der Drehriß), so ergibt sich daraus die Starrheitsaussage $\mathfrak{y} = \text{const}$.

Multiplizieren wir nun (21) mit dem Stellungsvektor $\mathfrak{e}$ der Randebene der Mütze, so gilt dann

$$\iint \|\alpha_i^k\| \, (\mathfrak{e}\, \xi)\, do = \tfrac{1}{2} \oint (\mathfrak{e}\, \mathfrak{y}\, \dot{\mathfrak{y}})\, ds. \tag{21'}$$

Nach (16) ist, wenn wir nunmehr nur noch Gleitverbiegungen betrachten:

$$[\mathfrak{e}\, \mathfrak{y}] = -\, \mathfrak{c} - \mathfrak{n}\, \delta\varphi.$$

Da nach [*11*] Gl. (24) für $\dot{\mathfrak{y}}$ gilt:

$$\dot{\mathfrak{y}} = \delta a\, \dot{\mathfrak{x}} + \delta b\, \eta, \tag{23}$$

so ist bei Beachtung von (3):

$$(\mathfrak{e}\, \mathfrak{y}\, \dot{\mathfrak{y}}) = -\, (\mathfrak{c}\, \dot{\mathfrak{y}}) - \delta b \cos\varphi \cdot \delta\varphi$$

oder unter Benutzung von (20):

$$(\mathfrak{e}\, \mathfrak{y}\, \dot{\mathfrak{y}}) = -\, (\mathfrak{c}\, \dot{\mathfrak{y}}) + k\, (\delta\varphi)^2. \tag{24}$$

Wegen $\oint \dot{\mathfrak{y}}\, ds = 0$ nimmt daher (21') die Form an:

$$\iint \|\alpha_i^k\| \, (\mathfrak{e}\, \xi)\, do = \tfrac{1}{2} \oint k\, (\delta\varphi)^2\, ds. \tag{25}$$

Nach (1) und (22) ist aber die linke Seite von (25) nicht positiv, während das Randintegral rechts nicht negativ ist. Beide Seiten von (25) müssen daher

verschwinden. Aus dem Verschwinden des Oberflächenintegrals folgt aber wieder wegen (1) und (22) $||\alpha_i^k|| = 0$, d.h. die Starrheitsaussage der Flächen der Klasse M gegenüber Gleitverbiegungen.

Der vektorielle Integralsatz bei infinitesimalen Verbiegungen von Flächen der Klasse M.

Wir betrachten jetzt beliebige infinitesimale Verbiegungen von Flächen der Klasse M. Formen wir zunächst den Integralsatz (21) etwas um. Wegen $\dot{\mathfrak{y}} = \delta a\, \dot{\mathfrak{x}} + \delta b\, \eta$ gilt:

$$[\mathfrak{y}\, \dot{\mathfrak{y}}] = \delta a\, [\mathfrak{y}\, \dot{\mathfrak{x}}] + \delta b\, [\mathfrak{y}\, \eta]$$

und nach (13) und (14) wird daher

$$[\mathfrak{y}\, \dot{\mathfrak{y}}] = \delta a\, \delta \dot{\mathfrak{x}} + \delta b\, \delta \eta$$

oder auch

$$[\mathfrak{y}\, \dot{\mathfrak{y}}] = \delta \{\delta a\, \dot{\mathfrak{x}} + \delta b\, \eta\} - \{\delta^2 a\, \dot{\mathfrak{x}} + \delta^2 b\, \eta\}\ ^{9})$$

$$[\mathfrak{y}\, \dot{\mathfrak{y}}] = \delta\, \dot{\mathfrak{y}} - \{\delta^2 a\, \dot{\mathfrak{x}} + \delta^2 b\, \eta\}.$$

Weiter ist

$$\oint \delta\, \dot{\mathfrak{y}}\, ds = \oint (\delta \mathfrak{y})^{\cdot}\, ds = 0.$$

Wir können daher die Formel (21) in der Form

$$\iint ||\alpha_i^k||\, \xi\, do = -\tfrac{1}{2} \cdot \oint \{\delta^2 a\, \dot{\mathfrak{x}} + \delta^2 b\, \eta\}\, ds \tag{26}$$

schreiben. Nach der Multiplikation mit dem Vektor $\mathfrak{e}$ folgt wegen $(\mathfrak{e}\, \dot{\mathfrak{x}}) = 0$ und $(\mathfrak{e}\, \eta) = -\sin\varphi$ [vgl. (5)]:

$$\iint ||\alpha_i^k||\, \xi\, do = \tfrac{1}{2} \oint \delta^2 b \sin\varphi\, ds.$$

Nun ist aber

$$\delta(\delta b \sin\varphi) = \delta^2 b \sin\varphi + \delta b \cos\varphi\, \delta\varphi.$$

Nach (18) und (20) wird daraus:

$$-\delta^2 k = \delta^2 b \sin\varphi - k(\delta\varphi)^2.$$

Es gilt daher für jede Fläche der Klasse M die Formel:

$$\iint ||\alpha_i^k||\, (\mathfrak{e}\, \xi)\, do = \tfrac{1}{2} \oint k(\delta\varphi)^2\, ds - \tfrac{1}{2} \oint \delta^2 k\, ds. \tag{27}$$

Diese Relation zeigt, in welcher Weise die zweite Variation der Randkurvenkrümmung $\delta^2 k$ die Starrheitsaussage beeinflußt. Aus (27) kann man ohne Mühe den Satz ablesen:

Satz 2. *Jede Fläche der Klasse M ist starr gegenüber allen infinitesimalen Verbiegungen, für die das Integral über die Randkurve*

$$\oint \delta^2 k\, ds \leq 0$$

ist.

---

[9]) Unter δ^2 verstehen wir die „zweite Variation" beim infinitesimalen Verbiegungsprozeß. Für Satz 1 wird die Existenz der zweiten Variation nicht vorausgesetzt.

Die eindeutige Bestimmtheit ebenrandiger konvexer Mützen durch die erste Fundamentalform[10].

Satz 3. *Zwei isometrische Flächen der Klasse M sind notwendig kongruent oder symmetrisch.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$ die Ortsvektoren der beiden ebenrandigen isometrischen Mützen der Klasse M. Beide Flächen seien auf dasselbe, die Isometrie vermittelnde Parametersystem bezogen. Die Größen der Fläche $\mathfrak{x}^*$, die von den entsprechenden Größen der Fläche $\mathfrak{x}$ verschieden sind, sollen durch einen Stern gekennzeichnet werden. Wir wenden nun den Integralsatz aus [*10*], Gl. (2):

$$\iint \frac{\|A_{ik}\|}{g}\,\xi\,do = \oint \{(a-a^*)\,\dot{\mathfrak{x}} + (b-b^*)\,\eta\}\,ds \tag{28}$$

auf die vorliegenden Flächen an. Multiplizieren wir wieder diesen Integralsatz mit dem Stellungsvektor $\mathfrak{e}$ der Randebene von $\mathfrak{x}$, so folgt wegen $(\mathfrak{e}\,\eta) = -\sin\varphi$; $(\mathfrak{e}\,\dot{\mathfrak{x}}) = 0$:

$$\iint \frac{\|A_{ik}\|}{g}\,(\xi\,\mathfrak{e})\,do = -\oint (b-b^*)\sin\varphi\,ds. \tag{29}$$

Darin ist $A_{ik} = B_{ik} - B^*_{ik}$ die Differenz der zweiten Fundamentalformen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$. Für die Determinante $\|A_{ik}\|$ gilt

$$\|A_{ik}\| \leq 0. \tag{30}$$

Aus $\|A_{ik}\| = 0$ folgt $A_{ik} = 0$ d.h. die Kongruenz oder Symmetrie der beiden Flächen.

Da hier beide Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$ völlig gleichberechtigt sind, so gilt auch der Integralsatz, der aus (29) entsteht, wenn man dort die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$ miteinander vertauscht:

$$\iint \frac{\|A_{ik}\|}{g}\,(\mathfrak{e}^*\,\xi^*)\,do = -\oint (b^*-b)\sin\varphi^*\,ds. \tag{29*}$$

[Für $(\mathfrak{e}^*\xi^*)$ ur ρ^* gelten natürlich, da $\mathfrak{x}^*$ zur Klasse M gehört, die (1) und (8) entsprechenden Ungleichungen.]

Addieren wir jetzt die beiden Integralsätze (29) und (29*) so erhalten wir den in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$ symmetrischen Integralsatz:

$$\iint \frac{\|A_{ik}\|}{g}\,\{(\mathfrak{e}\,\xi) + (\mathfrak{e}^*\,\xi^*)\}\,do = -\oint (b-b^*)\,(\sin\varphi - \sin\varphi^*)\,ds. \tag{31}$$

[10] Nach einem Satz von Herrn F. Rellich [7] kann es höchstens zwei Mützen der Klasse M geben (bis auf orthogonale Transformationen), die isometrisch sind, und wobei die Größen der ersten Fundamentalform $g_{ik}(u^l)$ in $u^{1^2}+u^{2^2}<1$ definiert und dort zweimal stetig differenzierbar sind. $u^{1^2}+u^{2^2}=1$ ist das Bild der Randkurve der Mütze in der Parameterebene. Die in [7] angegebene Bedingung $\partial(x,y)/\partial(u^1,u^2) \neq 0$ in $u^{1^2}+u^{2^2}<1$ ist äquivalent mit der Existenz eines festen Vektors $\mathfrak{a}$, so daß $(\mathfrak{a}\,\xi)\neq 0$ ist in allen inneren Flächenpunkten. Auf Flächen der Klasse M ist diese Bedingung aber erfüllt, wenn wir für $\mathfrak{a}$ den Vektor $\mathfrak{e}$ wählen; denn nur in den Randpunkten der Fläche kann $(\mathfrak{e}\,\xi)=0$ sein.

Schreiben wir noch zur Abkürzung

$$(32)\qquad L \equiv (b - b^*)(\sin\varphi - \sin\varphi^*) = 2(b - b^*)\cos\frac{\varphi+\varphi^*}{2}\cdot\sin\frac{\varphi-\varphi^*}{2},$$

so nimmt jetzt der Integralsatz (31) die Form an:

$$(33)\qquad \iint \frac{\|A_{ik}\|}{g}\{(e\,\xi) + (e^*\,\xi^*)\}\,do = -\oint L\,ds.$$

Um für den Integranden L des Randintegrals eine andere Darstellung zu finden, benutzen wir, daß längs den Randkurven beider Flächen die geodätischen Krümmungen übereinstimmen. Nach (4) ist dann

$$(34)\qquad c(s) = k\cos\varphi = k^*\cos\varphi^*.$$

Wird nun (34) mit $\sin\varphi\sin\varphi^*$ multipliziert, dann folgt nach (4_2):

$$b\cos\varphi\sin\varphi^* = b^*\cos\varphi^*\sin\varphi.$$

Subtrahiert man davon $b\cos\varphi^*\sin\varphi$, so erhält man

$$(35)\qquad b\sin(\varphi - \varphi^*) = (b - b^*)\cos\varphi^*\sin\varphi.$$

Durch Vertauschen der mit einem Stern versehenen Größen mit denen ohne Stern erhält man entsprechend:

$$(35^*)\qquad b^*\sin(\varphi - \varphi^*) = (b - b^*)\cos\varphi\sin\varphi^*.$$

Addiert man nun (35) und (35*), so ist

$$(36)\qquad (b + b^*)\sin(\varphi - \varphi^*) = (b - b^*)\sin(\varphi + \varphi^*)$$

und nach (32):

$$(37)\qquad \frac{1}{2}L = (b + b^*)\frac{\cos\frac{\varphi-\varphi^*}{2}\cdot\sin^2\frac{\varphi-\varphi^*}{2}}{\sin\frac{\varphi+\varphi^*}{2}}.$$

Nach (8), d.h. wegen

$$0 < \varphi,\ \varphi^* \leq \frac{\pi}{2}$$

gilt aber

$$0 < \frac{\varphi+\varphi^*}{2} \leq \frac{\pi}{2};\qquad -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\varphi-\varphi^*}{2} \leq \frac{\pi}{4}$$

daher ist

$$\sin\frac{\varphi+\varphi^*}{2} > 0 \quad\text{und}\quad \cos\frac{\varphi-\varphi^*}{2} > 0.$$

Wegen (7) ist weiter

$$b + b^* < 0.$$

Daher gilt also

$$(38)\qquad L \leq 0.$$

Nach (33) muß daher

$$\iint \frac{\|A_{ik}\|}{g} \{(\mathfrak{e}\,\xi) + (\mathfrak{e}^*\,\xi^*)\}\,do \geq 0$$

sein. Wegen $\|A_{ik}\| \leq 0$ und $(\mathfrak{e}\,\xi) \geq 0$; $(\mathfrak{e}^*\,\xi^*) \geq 0$ folgt daraus aber das Verschwinden des Integrals und wiederum erkennt man dann das Verschwinden von A_{ik}. Es sind daher die beiden isometrischen Flächen der Klasse M kongruent oder symmetrisch. Damit ist der genannte Satz bewiesen.

Ohne Mühe läßt sich der Satz 3 jetzt erweitern unter Benutzung des Hilfssatzes:

Es sei $\mathfrak{M}$ eine Mütze der Klasse M. $\overline{\mathfrak{M}}$ sei eine zu $\mathfrak{M}$ isometrische Fläche, die dreimal stetig differenzierbar ist, und die von einer geschlossenen, ebenen, zweimal stetig differenzierbaren Kurve $R(\overline{\mathfrak{M}})$ berandet wird. Dann gehört $\overline{\mathfrak{M}}$ ebenfalls zur Klasse M.

Bezeichnen wir mit $\bar{\mathfrak{e}}$ die feste Binormale von $R(\overline{\mathfrak{M}})$. Es genügt dann zu zeigen, daß auf $\overline{\mathfrak{M}}$ gilt: $(\bar{\mathfrak{e}}\,\bar{\xi}) \geq 0$; denn dann sind die Forderungen 1., 2., 3. für die Flächen der Klasse M erfüllt. Nehmen wir etwa an, $(\bar{\mathfrak{e}}\,\bar{\xi})$ wechsle auf $\overline{\mathfrak{M}}$ das Vorzeichen. Da auf $\overline{\mathfrak{M}}$ $K > 0$ und ${}^{(\overline{\mathfrak{M}})}\iint K\,do \leq 2\pi$ ist, so muß dann $(\bar{\mathfrak{e}}\,\bar{\xi}) = \cos\bar{\varphi}$ auch auf dem Rande $R(\overline{\mathfrak{M}})$ das Vorzeichen wechseln. (Das läßt sich etwa aus dem sphärischen Normalenbild erkennen.) Wegen der isometrischen Abbildung gilt nun nach (4) längs der Randkurve

$$c = \bar{k}\cos\bar{\varphi} = k\cos\varphi \geq 0.$$

Nun ist $\bar{k} \geq 0$ und daher auch $\cos\bar{\varphi} \geq 0$. Die Annahme, $(\bar{\mathfrak{e}}\,\bar{\xi})$ wechsle auf $\overline{\mathfrak{M}}$ das Vorzeichen, führt somit auf einen Widerspruch. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Eine Fläche der Klasse M gestattet daher keine „endlichen Gleitverbiegungen".

Die Verwandtschaft zwischen dem vektoriellen Integralsatz der infinitesimalen und der endlichen Flächenverbiegung.

Setzen wir zunächst den Wert des Integranden des Randintegrals nach (23) in den Integralsatz (21') ein, so folgt:

$$2\iint \|\alpha_i^k\|\,(\mathfrak{e}\,\xi)\,do = -\oint \delta b\cos\varphi\,\delta\varphi\,ds$$

oder

$$2\iint \|\alpha_i^k\|\,(\mathfrak{e}\,\xi)\,do = -\oint \delta b\,\delta(\sin\varphi)\,ds. \tag{21''}$$

Schreiben wir auch noch den Integralsatz (31) dazu:

$$\iint \frac{\|A_{ik}\|}{g} \{(\mathfrak{e}\,\xi) + (\mathfrak{e}^*\,\xi^*)\}\,do = -\oint (b - b^*)\,(\sin\varphi - \sin\varphi^*)\,ds. \tag{31}$$

Hieraus erkennt man (im Fall der Flächen der Klasse M), die große Verwandtschaft beider Integralformeln. Wo in (21'') die „Variationen" stehen,

treten in (31) „endliche" Differenzen der entsprechenden Größen auf. Die gleiche Analogie läßt sich auch aus den Werten der Integranden der Randintegrale nach (25) und (37) ablesen.

Wir wollen jetzt die allgemein gültigen Zusammenhänge zwischen den beiden vektoriellen Integralformeln betrachten. In [*11*, Gl. (20)] ist gezeigt worden, daß für die zweite Fundamentalform der Fläche $\mathfrak{x}^*$, die aus $\mathfrak{x}$ durch eine infinitesimale Verbiegung hervorgeht, folgende Darstellung gilt:

$$B^*_{ik} = B_{ik} + t\,\varepsilon_{lk}\,\alpha_{i.}^{\;l} + t^2(\ldots).\text{[11]} \tag{39}$$

Also ist

$$A_{ik} = -t\,\varepsilon_{lk}\,\alpha_i^{\;l} - t^2(\ldots), \tag{40}$$

ferner

$$\underline{A}^{ik} = \varepsilon^{i\alpha}\,\varepsilon^{k\beta}\,A_{\alpha\beta} = -t\,\varepsilon^{is}\,\alpha_{s.}^{\;k} - t^2(\ldots). \tag{40'}$$

Weiter erhält man daher

$$2\,\frac{\|A_{ik}\|}{g} = \underline{A}^{ik}A_{ik} = t^2\,\varepsilon_{lk}\,\varepsilon^{is}\,\alpha_i^{\;l}\,\alpha_s^{\;k} + t^3(\ldots). \tag{41}$$

Nun ist $2\|\alpha_i^{\;k}\| = \varepsilon_{lk}\varepsilon^{is}\alpha_i^{\;l}\alpha_s^{\;k}$ und daher

$$\frac{\|A_{ik}\|}{g} = t^2\|\alpha_{i.}^{\;k}\| + t^3(\ldots). \tag{42}$$

Schreiben wir jetzt noch die Entwicklungen von a^* und b^* auf:

$$\left\{\begin{aligned} a^* &= a + t\,\delta a + \frac{t^2}{2}\,\delta^2 a + \cdots, \\ b^* &= b + t\,\delta b + \frac{t^2}{2}\,\delta^2 b + \cdots. \end{aligned}\right. \tag{43}$$

Setzt man diese Darstellungen in den vektoriellen Integralsatz

$$\iint \frac{\|A_{ik}\|}{g}\,\xi\,do = \oint \{(a - a^*)\,\dot{\mathfrak{x}} + (b - b^*)\,\eta\}\,ds\ \text{[12]} \tag{28}$$

ein, und vergleicht man die Glieder in t^2, so folgt

$$\iint \|\alpha_i^{\;k}\|\,\xi\,do = -\tfrac{1}{2}\oint \{\delta^2 a\,\dot{\mathfrak{x}} + \delta^2 b\,\eta\}\,ds.$$

Dieses ist aber gerade die Form (26) des vektoriellen Integralsatzes der infinitesimalen Verbiegung.

Auf die Zusammenhänge zwischen den Integralformeln mit skalaren Integranden der infinitesimalen und endlichen Verbiegung hat zwar HERGLOTZ [Abh. aus dem Math. Sem. d. Univ. Hamb. 15, (1947) S. 102ff.] hingewiesen, aber erst Herr E. REMBS [*5*] hat diese Verwandtschaft genauer untersucht.

---

[11]) Der Tensor $\varepsilon_{lk}\,\alpha_{i.}^{\;l}$ ist wegen $\alpha_l^{\;l} = 0$ symmetrisch. ε_{ik} ist der „Diskriminantentensor". Vgl. [*9*] S. 254, Gl. (3), (4), (5).

[12]) Das im Randintegral auftretende Glied, welches in t linear ist: $\oint (\delta a\,\dot{\mathfrak{x}} + \delta b\,\eta)\,ds$ verschwindet, was wegen $\dot{\mathfrak{y}} = \delta a\,\dot{\mathfrak{x}} + \delta b\,\eta$ nichts Neues aussagt.

Literatur.

[1] LIEBMANN, H.: Bedingte Flächenverbiegungen, insbesondere Gleitverbiegungen Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss., Math.-physik. Kl. **1920**, 21—48. — [2] BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, 4. Aufl., Bd. I. Berlin 1945. — [3] REMBS, E.: Die infinitesimalen Verbiegungen der Kugel. J. reine angew. Math. **173**, 160—163 (1935). — [4] REMBS, E.: Über Gleitverbiegungen. Math. Ann. **111**, 587—595 (1935). — [5] REMBS, E.: Integralformeln der Verbiegungstheorie. Math. Nachr. **7**, 61—64 (1952). — [6] REMBS, E.: Zur Verbiegung der Flächen im Großen. Math. Z. **56**, 271—279 (1952). — [7] RELLICH, F.: Zur ersten Randwertaufgabe bei Monge-Ampereschen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus; differentialgeometrische Anwendungen. Math. Ann. **107**, 505—513 (1933). — [8] POGORELOV, A. V.: Eindeutige Bestimmtheit konvexer Flächen. [Russisch.] Trudy mat. Stekl. Inst., Moskau **29** (1949). — [9] GROTEMEYER, K. P.: Zur eindeutigen Bestimmung von Flächen durch die erste Fundamentalform. Math. Z. **55**, 253—268 (1952). — [10] GROTEMEYER, K. P.: Über die Verbiegung konvexer Flächen mit Rand. Math. Z. **58**, 41—45 (1953). — [11] GROTEMEYER, K. P.: Zur infinitesimalen und endlichen Verbiegung von Halbeiflächen. Arch. d. Math. **4**, 52—60 (1953). — [12] GROTEMEYER, K. P.: Über die Verbiegung konvexer Flächen mit einer Randkurve, die Eigenschattengrenze ist. Math. Z. **58**, 272—280 (1953).

Freiburg i. Br., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 24. Juli 1953.)

PINL, M.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 290—295 (1953)

B-Kugelbilder reeller Minimalflächen in R_4.

Von
M. PINL.

In der Arbeit „Sulla geometria differenziale delle superficie S_2 nello spazio euclideo S_4"[1]) gewinnt W. BLASCHKE für die zweidimensionalen Flächen S_2 des euklidischen vierdimensionalen Raumes S_4 $(=R_4)$ Paare sphärischer Abbildungen, die wir im folgenden B-Kugelbilder nennen wollen. Bekanntlich ist die GAUSSsche sphärische Abbildung der Minimalflächen des R_3 konform. Wir wollen zeigen, daß dies auch für die Kugelbilder der Minimalflächen des R_4 zutrifft, wenn man B-Kugelbilder zugrunde legt.

§ 1. B-Kugelbilder allgemeiner Flächen.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{r}(u_1, u_2)$ den Ortsvektor einer allgemeinen reellen Fläche im vierdimensionalen euklidischen Raum und mit $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ die Vektoren eines normierten orthogonalisierten Vierbeins im Endpunkt von $\mathfrak{r}$. Dann gilt (nach E. CARTAN):

$$d\mathfrak{a}_i = \sum_{k=0}^{3} \mathfrak{a}_k \tau_{ik}, \quad \tau_{ik} + \tau_{ki} = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3. \tag{1}$$

Wir nehmen überdies an, daß die Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ die Fläche im Punkt $\mathfrak{r}$ berühren. Sind dann a_{ik} die (reellen) Komponenten der vier Vektoren $\mathfrak{a}_i$ in einem kartesischen Koordinatensystem und e_0, e_1, e_2, e_3 Basiselemente eines vierdimensionalen Vektorraumes mit der Multiplikationstabelle

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	$+1$	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1

so entsprechen den Vektoren $\mathfrak{a}_i$ die Quaternionen:

$$\boldsymbol{a}_i = a_{i0} + a_{i1} e_1 + a_{i2} e_2 + a_{i3} e_3, \quad a_{i0} e_0 = a_{i0}, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

und ihre konjugierten

$$\bar{\boldsymbol{a}}_i = a_{i0} - a_{i1} e_1 - a_{i2} e_2 - a_{i3} e_3, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Die „Skalarteile" der Quaternionenprodukte $\boldsymbol{a}_\alpha \bar{\boldsymbol{a}}_0$ und $\bar{\boldsymbol{a}}_0 \boldsymbol{a}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ verschwinden, da die zugeordneten Vektoren orthogonal sind. Man erhält die

[1]) Vgl. BLASCHKE, W.: Sulla geometria differenziale delle superficie S_2 nello spazio euclideo S_4: Ann. di Mat., Ser. IV **28**, 205—209 (1949).

„vektoriellen" Quaternionenprodukte

$$\boldsymbol{a}_\alpha \bar{\boldsymbol{a}}_0 = \boldsymbol{r}_\alpha, \quad \bar{\boldsymbol{a}}_0 \boldsymbol{a}_\alpha = \boldsymbol{r}'_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Unter diesen sind $\boldsymbol{r}_3$ und $\boldsymbol{r}'_3$ ausgezeichnet, nämlich invariant gegenüber

$$\mathfrak{a}_1^* = \mathfrak{a}_1 \cos\varphi - \mathfrak{a}_2 \sin\varphi, \quad \mathfrak{a}_2^* = \mathfrak{a}_1 \sin\varphi + \mathfrak{a}_2 \cos\varphi.$$

Allgemein gilt[2])

$$\boldsymbol{r}_\alpha + \bar{\boldsymbol{r}}_\alpha = \boldsymbol{r}'_\alpha + \bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha = 0, \quad \boldsymbol{r}_\alpha \bar{\boldsymbol{r}}_\alpha = \boldsymbol{r}'_\alpha \bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha = 1, \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Deuten wir jetzt die „vektoriellen" Quaternionen $\boldsymbol{r}_3$ und $\boldsymbol{r}'_3$ als Einheitsvektoren $\mathfrak{r}_3$ und $\mathfrak{r}'_3$ eines dreidimensionalen euklidischen Raumes, so bestimmen $\mathfrak{r}_3$ und $\mathfrak{r}'_3$ das Paar der „B-Kugelbilder" in R_3 der Fläche $\mathfrak{r}$ in R_4. Für spätere Zwecke notieren wir noch die Relationen

$$d\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_1(\tau_{31} + \tau_{02}) - \boldsymbol{r}_2(\tau_{23} + \tau_{01}), \quad d\boldsymbol{r}'_3 = \boldsymbol{r}'_1(\tau_{31} - \tau_{02}) - \boldsymbol{r}'_2(\tau_{23} - \tau_{01}), \tag{4}$$

$$d\bar{\boldsymbol{r}}_3 = \bar{\boldsymbol{r}}_1(\tau_{31} + \tau_{02}) - \bar{\boldsymbol{r}}_2(\tau_{23} + \tau_{01}), \quad d\bar{\boldsymbol{r}}'_3 = \bar{\boldsymbol{r}}'_1(\tau_{31} - \tau_{02}) - \bar{\boldsymbol{r}}'_2(\tau_{23} - \tau_{01}), \tag{5}$$

die sich (als Spezialfall $\alpha = 3$) aus (2) und (1) durch Differentiation ergeben[3]).

§ 2. B-Kugelbilder reeller Minimalflächen.

$\mathfrak{y}(u)$ sei eine isotrope Kurve im komplex erweiterten R_4, $\Re\,\mathfrak{y}(u) = \mathfrak{r}(u_1, u_2)$ der Realteil der analytischen Vektorfunktion $\mathfrak{y}(u)$, $u = u_1 + i\,u_2$. Wir setzen

$$\mathfrak{y}(u) = \mathfrak{r}(u_1, u_2) + i\,\mathfrak{s}(u_1, u_2), \qquad i = \sqrt{-1}$$

und erhalten nach CAUCHY-RIEMANN (Indizes bedeuten partielle Ableitungen):

$$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{s}_2, \quad \mathfrak{r}_2 = -\mathfrak{s}_1, \qquad \Delta\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{11} + \mathfrak{r}_{22} = 0, \quad \Delta\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_{11} + \mathfrak{s}_{22} = 0.$$

Da $\mathfrak{y}$ isotrop, folgt:

$$\dot{\mathfrak{y}}^2 = (\mathfrak{r}_1 + i\,\mathfrak{s}_1)^2 = (\mathfrak{r}_1 - i\,\mathfrak{r}_2)^2 = (i\,\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2)^2 \equiv 0\,\{u_1, u_2\},$$

$$\left(\dot{\mathfrak{y}} = \frac{d\mathfrak{y}}{du}, \quad \ddot{\mathfrak{y}} = \frac{d^2\mathfrak{y}}{du^2}, \ldots\right)$$

und daher

$$\mathfrak{r}_1^2 = \mathfrak{r}_2^2, \quad \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = 0, \quad \Delta\mathfrak{r} = 0 \quad \text{bzw.} \quad g_{11} = g_{22} = \lambda(u_1, u_2) \neq 0, \quad g_{12} = 0. \tag{6}$$

u_1 und u_2 sind also isotherme Flächenparameter auf der (reellen) Minimalfläche $\mathfrak{r}$:

$$\langle d\mathfrak{r}, d\mathfrak{r}\rangle = \lambda(u_1, u_2)\,(du_1^2 + du_2^2). \tag{7}$$

Wir vergleichen jetzt die binäre metrische Fundamentalform (7) der Minimalfläche $\mathfrak{r}$ mit den binären metrischen Fundamentalformen $\langle d\mathfrak{r}_3, d\mathfrak{r}_3\rangle$ und $\langle d\mathfrak{r}'_3, d\mathfrak{r}'_3\rangle$ ihrer B-Kugelbilder $\mathfrak{r}_3$ und $\mathfrak{r}'_3$. Zunächst gilt:

$$d\boldsymbol{r}_3\, d\bar{\boldsymbol{r}}_3 = \langle d\mathfrak{r}_3, d\mathfrak{r}_3\rangle, \qquad d\boldsymbol{r}'_3\, d\bar{\boldsymbol{r}}'_3 = \langle d\mathfrak{r}'_3, d\mathfrak{r}'_3\rangle,$$

[2]) Vgl. [1]), S. 207.

[3]) Vgl. [1]), S. 208; $\alpha=3$, $\beta=1$, $\gamma=2$; $(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)(\alpha-\gamma)=(-2)\cdot 1\cdot 1=-2<0$.

ferner:

$$\mathfrak{r}_2\bar{\mathfrak{r}}_1 = \mathfrak{s}, \quad \mathfrak{r}_1\bar{\mathfrak{r}}_2 = \bar{\mathfrak{s}}, \quad \mathfrak{s} + \bar{\mathfrak{s}} = \mathfrak{r}_2\bar{\mathfrak{r}}_1 + \mathfrak{r}_1\bar{\mathfrak{r}}_2 = 0.$$

Damit ergibt sich mit Rücksicht auf (3), (4) und (5):

$$\langle d\mathfrak{r}_3, d\mathfrak{r}_3\rangle = (\tau_{31} + \tau_{02})^2 + (\tau_{23} + \tau_{01})^2,$$
$$\langle d\mathfrak{r}_3', d\mathfrak{r}_3'\rangle = (\tau_{31} - \tau_{02})^2 + (\tau_{23} - \tau_{01})^2.$$

Es kommt also jetzt auf die Kenntnis der PFAFFschen Formen $\tau_{01}, \tau_{02}, \tau_{31}, \tau_{23}$ bzw. der Vektoren $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ an. Wir setzen

$$\mathfrak{a}_1 = \frac{\mathfrak{r}_1}{\sqrt{\mathfrak{r}_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\mathfrak{r}_1, \quad \mathfrak{a}_2 = \frac{\mathfrak{r}_2}{\sqrt{\mathfrak{r}_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\mathfrak{r}_2, \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = 0, \quad \mathfrak{a}_1^2 = \mathfrak{a}_2^2 = 1.$$

Sind $g^{\alpha\beta}$ die kontravarianten Komponenten der Metrik (6) und $\Gamma_{\varrho,\alpha\beta}\Gamma^{\varrho}_{\alpha\beta}$ ihre CHRISTOFFEL-Symbole, so gilt:

$$\mathfrak{r}_\gamma \mathfrak{h}_{\alpha\beta} = \mathfrak{r}_\gamma(\mathfrak{r}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\varrho}_{\alpha\beta}\mathfrak{r}_\varrho) = \Gamma_{\gamma,\alpha\beta} - \Gamma^{\varrho}_{\alpha\beta}g_{\varrho\gamma} = \Gamma_{\gamma,\alpha\beta} - \Gamma_{\gamma,\alpha\beta} = 0,$$
$$\alpha,\beta,\gamma,\varrho = 1,2.$$

Die Vektoren $\mathfrak{h}_{11}, \mathfrak{h}_{12}, \mathfrak{h}_{22}$ liegen also in der Normalebene der Fläche $\mathfrak{r}$. Da $\mathfrak{r}$ Minimalfläche ist, verschwindet der mittlere Krümmungsvektor

$$\mathfrak{h} = g^{\alpha\beta}\mathfrak{h}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\lambda}(\mathfrak{h}_{11} + \mathfrak{h}_{22}) = 0.$$

$\mathfrak{h}_{11}$ und $\mathfrak{h}_{12}$ oder $\mathfrak{h}_{22}$ und $\mathfrak{h}_{12}$ können daher als linear unabhängige Normalvektoren der Fläche $\mathfrak{r}$ eingeführt und als Einheitsvektoren $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_3$ normiert werden. Ihre Orthogonalität ist gesichert, wenn der komplexe Parameter u der isotropen Kurve $\mathfrak{y}(u)$ als STUDY-VESSIOTscher Parameter normiert wird. Denn dann gilt:

$$\dot{\mathfrak{y}}^2 = 0, \ \ddot{\mathfrak{y}}^2 = (\mathfrak{r}_{11} - i\,\mathfrak{r}_{21})^2 = (\mathfrak{r}_{12} - i\,\mathfrak{r}_{22})^2 = \mathfrak{r}_{11}^2 - \mathfrak{r}_{12}^2 - 2i\,\mathfrak{r}_{11}\mathfrak{r}_{12}$$
$$= \mathfrak{r}_{12}^2 - \mathfrak{r}_{22}^2 - 2i\,\mathfrak{r}_{12}\mathfrak{r}_{22} = -1$$

und daher, da -1 reell, zunächst:

$$\mathfrak{r}_{11}\mathfrak{r}_{12} = \mathfrak{r}_{22}\mathfrak{r}_{12} = 0. \tag{8}$$

Zur Berechnung der Vektoren $\mathfrak{h}_{11} = -\mathfrak{h}_{22}$ und $\mathfrak{h}_{12}$ notieren wir die Werte der CHRISTOFFEL-Symbole in isothermen Parametern:

$$\Gamma_{1,11} = \frac{\lambda_1}{2}, \quad \Gamma_{1,12} = \frac{\lambda_2}{2}, \quad \Gamma_{1,22} = -\frac{\lambda_1}{2},$$
$$\Gamma_{2,11} = -\frac{\lambda_2}{2}, \quad \Gamma_{2,12} = \frac{\lambda_1}{2}, \quad \Gamma_{2,22} = \frac{\lambda_2}{2},$$
$$\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda_1}{2\lambda}, \quad \Gamma^1_{12} = \frac{\lambda_2}{2\lambda}, \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{\lambda_1}{2\lambda},$$
$$\Gamma^2_{11} = -\frac{\lambda_2}{2\lambda}, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{\lambda_1}{2\lambda}, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{\lambda_2}{2\lambda}.$$

Damit ergibt sich:

$$\mathfrak{h}_{11} = -\mathfrak{h}_{22} = \mathfrak{r}_{11} - \frac{\lambda_1}{2\lambda}\mathfrak{r}_1 + \frac{\lambda_2}{2\lambda}\mathfrak{r}_2, \qquad \mathfrak{h}_{12} = \mathfrak{r}_{12} - \frac{\lambda_2}{2\lambda}\mathfrak{r}_1 - \frac{\lambda_1}{2\lambda}\mathfrak{r}_2,$$

$$\mathfrak{h}_{11}\mathfrak{h}_{12} = -\mathfrak{h}_{22}\mathfrak{h}_{12} = \mathfrak{r}_{11}\mathfrak{r}_{12} - \frac{\lambda_1}{2\lambda}(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_{12} + \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_{11}) + \frac{\lambda_2}{2\lambda}(\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_{12} - \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_{11}).$$

Der erste Term der rechten Seite der letzten Gleichung verschwindet gemäß (8), der zweite verschwindet, da $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = 0$ und der dritte verschwindet, da $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = 0$ und $\mathfrak{r}_{11} = -\mathfrak{r}_{22}$. Damit ist gezeigt: *Die Vektoren* $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ *des begleitenden normierten und orthogonalisierten Vierbeins der Minimalfläche können aus deren Ortsvektor* $\mathfrak{r}$ *explizit berechnet werden*:

(9)
$$\boxed{\begin{gathered}\mathfrak{a}_0 = \frac{\mathfrak{h}_{12}}{\sqrt{\nu}}, \quad \mathfrak{a}_1 = \frac{\mathfrak{r}_1}{\sqrt{\lambda}}, \quad \mathfrak{a}_2 = \frac{\mathfrak{r}_2}{\sqrt{\lambda}}, \quad \mathfrak{a}_3 = \frac{\mathfrak{h}_{11}}{\sqrt{\mu}} = \frac{-\mathfrak{h}_{22}}{\sqrt{\mu}}, \\ \lambda = \mathfrak{r}_1^2 = \mathfrak{r}_2^2, \quad \mu = \mathfrak{h}_{11}^2 = \mathfrak{h}_{22}^2, \quad \nu = \mathfrak{h}_{12}^2, \quad (\ddot{\imath}^2 = -1)\end{gathered}}.$$

Wir kehren jetzt zur Berechnung der PFAFFschen Formen $\tau_{ik} = -\mathfrak{a}_i d\mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}_k d\mathfrak{a}_i$ zurück:

$$\tau_{31} = -\mathfrak{a}_3 d\mathfrak{a}_1 = -\mathfrak{a}_3 d\left(\frac{\mathfrak{r}_1}{\sqrt{\lambda}}\right) = -\mathfrak{a}_3 \frac{\sqrt{\lambda}(\mathfrak{r}_{11}du_1 + \mathfrak{r}_{12}du_2) - \mathfrak{r}_1 d\sqrt{\lambda}}{\lambda}$$
$$= \frac{\mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{11}du_1 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{12}du_2}{-\sqrt{\lambda}},$$

$$\tau_{02} = -\mathfrak{a}_0 d\mathfrak{a}_2 = -\mathfrak{a}_0 d\left(\frac{\mathfrak{r}_2}{\sqrt{\lambda}}\right) = -\mathfrak{a}_0 \frac{\sqrt{\lambda}(\mathfrak{r}_{12}du_1 + \mathfrak{r}_{22}du_2) - \mathfrak{r}_2 d\sqrt{\lambda}}{\lambda}$$
$$= \frac{\mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{12}du_1 + \mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{22}du_2}{-\sqrt{\lambda}},$$

$$\tau_{23} = \mathfrak{a}_3 d\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_3 d\left(\frac{\mathfrak{r}_2}{\sqrt{\lambda}}\right) = \mathfrak{a}_3 \frac{\sqrt{\lambda}(\mathfrak{r}_{12}du_1 + \mathfrak{r}_{22}du_2) - \mathfrak{r}_2 d\sqrt{\lambda}}{\lambda}$$
$$= \frac{\mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{12}du_1 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{22}du_2}{+\sqrt{\lambda}},$$

$$\tau_{01} = -\mathfrak{a}_0 d\mathfrak{a}_1 = -\mathfrak{a}_0 d\left(\frac{\mathfrak{r}_1}{\sqrt{\lambda}}\right) = -\mathfrak{a}_0 \frac{\sqrt{\lambda}(\mathfrak{r}_{11}du_1 + \mathfrak{r}_{12}du_2) - \mathfrak{r}_1 d\sqrt{\lambda}}{\lambda}$$
$$= \frac{\mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{11}du_1 + \mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{12}du_2}{-\sqrt{\lambda}},$$

$$\tau_{31} + \tau_{02} = \frac{(\mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{11} + \mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{12})du_1 + (\mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{12} + \mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{22})du_2}{-\sqrt{\lambda}},$$

$$\tau_{31} - \tau_{02} = \frac{(\mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{12} - \mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{11})du_1 + (\mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{22} - \mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{12})du_2}{\sqrt{\lambda}},$$

$$\left(\langle d\mathfrak{r}_3, d\mathfrak{r}_3\rangle = (\tau_{31} + \tau_{02})^2 + (\tau_{23} + \tau_{01})^2\right),$$

$$\tau_{23} + \tau_{01} = \frac{(\mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{12} - \mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{11})du_1 + (\mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{22} - \mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{12})du_2}{\sqrt{\lambda}},$$

$$\tau_{23} - \tau_{01} = \frac{(\mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{11} + \mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{12})du_1 + (\mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{12} + \mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{22})du_2}{\sqrt{\lambda}},$$

$$\left(\langle d\mathfrak{r}_3', d\mathfrak{r}_3'\rangle = (\tau_{31} - \tau_{02})^2 + (\tau_{23} - \tau_{01})^2\right),$$

$$(\tau_{31}+\tau_{02})^2 = \frac{(a_3\mathfrak{r}_{11}+a_0\mathfrak{r}_{12})^2\,du_1^2+2(a_3\mathfrak{r}_{11}+a_0\mathfrak{r}_{12})(a_3\mathfrak{r}_{12}+a_0\mathfrak{r}_{22})\,du_1\,du_2+(a_3\mathfrak{r}_{12}+a_0\mathfrak{r}_{22})^2\,du_2^2}{\lambda},$$

$$(\tau_{23}+\tau_{01})^2 = \frac{(a_3\mathfrak{r}_{12}-a_0\mathfrak{r}_{11})^2\,du_1^2+2(a_3\mathfrak{r}_{12}-a_0\mathfrak{r}_{11})(a_3\mathfrak{r}_{22}-a_0\mathfrak{r}_{12})\,du_1\,du_2+(a_3\mathfrak{r}_{22}-a_0\mathfrak{r}_{12})^2\,du_2^2}{\lambda},$$

$$(\tau_{31}-\tau_{02})^2 = \frac{(a_0\mathfrak{r}_{12}-a_3\mathfrak{r}_{11})^2\,du_1^2+2(a_0\mathfrak{r}_{12}-a_3\mathfrak{r}_{11})(a_0\mathfrak{r}_{22}-a_3\mathfrak{r}_{12})\,du_1\,du_2+(a_0\mathfrak{r}_{22}-a_3\mathfrak{r}_{12})\,du_2^2}{\lambda},$$

$$(\tau_{23}-\tau_{01})^2 = \frac{(a_0\mathfrak{r}_{11}+a_3\mathfrak{r}_{12})^2\,du_1^2+2(a_0\mathfrak{r}_{11}+a_3\mathfrak{r}_{12})(a_0\mathfrak{r}_{12}+a_3\mathfrak{r}_{22})\,du_1\,du_2+(a_0\mathfrak{r}_{12}+a_3\mathfrak{r}_{22})^2\,du_2^2}{\lambda}.$$

Aus den letzten vier Gleichungen folgt mit Rücksicht auf $\mathfrak{r}_{11}=-\mathfrak{r}_{22}$:

$$\langle d\mathfrak{r}_3,\, d\mathfrak{r}_3\rangle = \frac{\chi}{\lambda}(du_1^2+du_2^2);\quad \chi(u_1,u_2)=(a_0\mathfrak{r}_{11})^2+(a_0\mathfrak{r}_{12})^2+(a_3\mathfrak{r}_{11})^2+$$
$$+(a_3\mathfrak{r}_{12})^2+2(a_0\mathfrak{r}_{12})(a_3\mathfrak{r}_{11})-2(a_0\mathfrak{r}_{11})(a_3\mathfrak{r}_{12}),$$

$$\langle d\mathfrak{r}_3',\, d\mathfrak{r}_3'\rangle = \frac{\psi}{\lambda}(du_1^2+du_2^2);\quad \psi(u_1,u_2)=(a_0\mathfrak{r}_{11})^2+(a_0\mathfrak{r}_{12})^2+(a_3\mathfrak{r}_{11})^2+$$
$$+(a_3\mathfrak{r}_{12})^2+2(a_0\mathfrak{r}_{11})(a_3\mathfrak{r}_{12})-2(a_0\mathfrak{r}_{12})(a_3\mathfrak{r}_{11}).$$

Oder:

$$\boxed{\begin{aligned}\langle d\mathfrak{r}_3, d\mathfrak{r}_3\rangle &= \sigma(u_1,u_2)\langle d\mathfrak{r}, d\mathfrak{r}\rangle,\quad \sigma=\frac{\chi}{\lambda^2},\\ \langle d\mathfrak{r}_3', d\mathfrak{r}_3'\rangle &= \sigma'(u_1,u_2)\langle d\mathfrak{r}, d\mathfrak{r}\rangle,\quad \sigma'=\frac{\psi}{\lambda^2}\end{aligned}}.$$

Damit ist gezeigt: *Die B-Kugelbilder der reellen (nicht ebenen) Minimalflächen des R_4 sind konform.*

Die GAUSSsche Krümmung K aller solcher Minimalflächen verschwindet nicht. Läßt man auch (komplexe) Minimalflächen mit verschwindender GAUSSscher Krümmung zu[4]), so sind Ausartungen der B-Kugelbilder zu erwarten. Dies zeigt auch schon die (reelle) KILLINGsche Fläche

$$(10)\qquad \mathfrak{x}(u_1,u_2)=\{\sin u_1\sin u_2,\cos u_1\cos u_2,\sin u_1\cos u_2,\cos u_1\sin u_2\},$$

die keine Minimalfläche darstellt. Man erhält für (10):

$$g_{11}=g_{22}=1,\quad g_{12}=0,\quad K=0,\quad \Gamma_{\varrho,\beta\gamma}=\Gamma^{\varrho}_{\beta\gamma}=0,\quad \varrho,\beta,\gamma=1,2;$$
$$a_0=\{\sin u_1\sin u_2,\cos u_1\cos u_2,\sin u_1\cos u_2,\cos u_1\sin u_2\},$$
$$a_1=\{\cos u_1\sin u_2,-\sin u_1\cos u_2,\cos u_1\cos u_2,-\sin u_1\sin u_2\},$$

[4]) Vgl. PINL, M.: Über die komplexen Minimalflächen mit der GAUSSschen Krümmung Null. Arch. d. Math. **2**, 4, 283—288 (1949/50).

$$\mathfrak{a}_2 = \{\sin u_1 \cos u_2,\ -\cos u_1 \sin u_2,\ -\sin u_1 \sin u_2,\ \cos u_1 \cos u_2\},$$

$$\mathfrak{a}_3 = \{\cos u_1 \cos u_2,\ \sin u_1 \sin u_2,\ -\cos u_1 \sin u_2,\ -\sin u_1 \cos u_2\},$$

$$\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_k = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}, \qquad i, k = 0, 1, 2, 3.$$

Für die Komponenten der Ortsvektoren $\mathfrak{r}_3$ und $\mathfrak{r}_3'$ der *B*-Kugelbilder ergibt sich:

$$\mathfrak{r}_3 = \{-\cos 2u_2, 0, -\sin 2u_2\}, \qquad \mathfrak{r}_3' = \{-\cos 2u_1, \sin 2u_1, 0\}.$$

Das *B*-Kugelbild $\mathfrak{r}_3$ ist von u_1, das *B*-Kugelbild $\mathfrak{r}_3'$ von u_2 unabhängig und die entsprechenden Differentialformen sind beide ausgeartet:

$$\langle d\mathfrak{r}_3, d\mathfrak{r}_3 \rangle = 4du_2^2, \quad \langle d\mathfrak{r}_3', d\mathfrak{r}_3' \rangle = 4du_1^2.$$

Die Fläche ist keine Minimalfläche, da ihr mittlerer Krümmungsvektor $\mathfrak{h}$ nicht verschwindet:

$$\mathfrak{h} = g^{\alpha\beta} \mathfrak{h}_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \mathfrak{r}_{\alpha\beta} = \mathfrak{r}_{11} + \mathfrak{r}_{22} = 2\mathfrak{r}_{11} \neq 0.$$

2 Fuller Road, Ramna-Dacca, East Bengal Pakistan.

(Eingegangen am 23. Juni 1953.)

KRULL, W.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 295—298 (1953)

Über Polynomzerlegung mit endlich vielen Schritten. II.

Von
WOLFGANG KRULL.

Am Schlusse der kürzlich in dieser Zeitschrift erschienenen, gleichbetitelten Note[1]) wurde nach unendlichen Folgen $K_1, K_2, \ldots$ von endlichen algebraischen Zahlkörpern gefragt, die über dem rationalen Zahlkörper K_0 die folgende Eigenschaft (Z) besitzen: Zu jedem rationalzahligen, rational irreduzibeln Polynom $p(x) = x^n + r_1 x^{n-1} + \cdots + r_n$ gibt es eine „endlich" (d.h. mit endlich vielen rationalen Operationen) berechenbare Schranke $\nu^*(p(x))$, derart, daß $p(x)$ über *allen* K_i irreduzibel bleibt, falls es nur über keinem der Körper K_i $(i = 1, 2, \ldots, \nu^*(p(x))$ reduzibel wird. — Es soll nun, über das in der früheren Note behandelte Beispiel der imaginär quadratischen Zahlkörper hinaus, kurz gezeigt werden, daß auf mannigfaltige Weise Körperfolgen mit der Eigenschaft (Z) gebildet werden können. Dabei stützen wir uns auf die folgenden bekannten Sätze:

1. Ist $N = K_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ der zu

$$p(x) = x^n + r_1 x^{n-1} + \cdots + r_n = (x - \alpha_1) \cdot \cdots \cdot (x - \alpha_n)$$

gehörige Normalkörper, so bleibt das rational irreduzible Polynom $p(x)$ sicher auch über K_i irreduzibel, falls $K_i \cap N = K_0$. — 2. Die Diskriminante D von N (über K_0) kann allein aus dem Koeffizienten von $p(x)$ endlich berechnet werden. — 3. Ist $K \leq N$, so ist die Diskriminante von K ein Teiler der Diskriminante D von N. — 4. Ist $K \neq K_0$, so ist die Diskriminante von K niemals gleich ± 1. — 5. Für jedes ganze positive n gibt eine endlich berechenbare Schranke $\mu^*(n)$ für die Anzahl derjenigen endlichen algebraischen Zahlkörper, bei denen der Absolutbetrag der Diskriminante den Wert n nicht übersteigt[2]). Allein auf Grund der Sätze 1—4 ergibt sich fast unmittelbar:

A. Sind die Diskriminanten D_i der Körper K_i $(i = 1, 2, \ldots)$ paarweise teilerfremd, und ist für $i_2 > i_1$ der kleinste in D_2 aufgehende Primfaktor p_2 stets größer als der kleinste in D_1 aufgehende Primfaktor p_1, so hat die Folge $K_1, K_2, \ldots$ die Eigenschaft (Z).

B. Ist jeder der Körper K_i primitiv, gibt es also für kein i zwischen K_0 und K_i einen echten Zwischenkörper, und läßt sich zu jedem n endlich ein

[1]) 57—60: Math. Z. **59**, 57—60 (1953).

[2]) Die Existenz von $\mu^*(n)$ folgt aus der Tatsache, daß man einerseits eine monoton mit N ins Unendliche wachsende untere Schranke für den Absolutwert der Diskriminante eines endlichen algebraischen Zahlkörpers des Grades N besitzt, und daß man andererseits für jedes feste Paar N, n eine Schranke für die Anzahl aller der Zahlkörper N-ten Grades berechnen kann, deren Diskriminante gleich ± 1 ist. — Vgl. z. B. HASSE: Zahlentheorie, Akademie-Verlag Berlin 1949, S. 454/455.

$i_0(n)$ berechnen, derart, daß der Absolutbetrag der Diskriminante D_i von K_i für $i > i_0(n)$ stets größer wird als n, so besitzt die Folge $K_1, K_2, \ldots$ die Eigenschaft (Z).

Ist nämlich zunächst jeder der Körper K_i primitiv, so muß nach 1. und 3. die Diskriminante D_i von K_i ein Teiler der Diskriminante D des zu $p(x) = (x-\alpha_1)\cdot\cdots\cdot(x-\alpha_n)$ gehörigen Normalkörpers $N = K_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sein. Man kann also wegen 2. einfach $\nu^*(p(x)) = i_0(|D|)$ setzen, falls $i_0(n)$ die Funktion ist, deren endliche Berechenbarkeit in B. für jedes n gefordert wurde. Die Behauptung von B. ergibt sich also allein auf Grund der Sätze 1., 2., 3. — Bei A. beachte man: Soll $p(x)$ über K_i reduzibel werden, so muß wegen 1., 3., 4. jedenfalls D durch mindestens einen Primfaktor von D_i teilbar sein. Sind ferner $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots$ die nach wachsender Größe geordneten Primzahlen, so wird unter den Voraussetzungen von A. für $i > \nu^*(p(x))$ sicher D_i zu D prim, falls man $\nu^*(p(x))$ gleich der größten ganzen Zahl i_0 setzt, bei der eben noch $p_{i_0} \leq |D|$. — Aus A. ergibt sich im speziellen sofort:

Sind $p_1, p_2, \ldots$ die nach wachsender Größe geordneten Primzahlen, $f_1, f_2, \ldots$ irgendwelche ganzen positiven Zahlen und bedeutet K_i den Körper der p^{f_i}-ten Einheitswurzeln, so besitzt die Folge $K_1\ K_2, \ldots$ die Eigenschaft (Z).

Aus B. dagegen erhält man unter anderem die Sätze:

Es seien $a_1, a_2, \ldots$ untereinander verschiedene ganze Zahlen, die der Bedingung $|a_{i+1}| \geq |a_i|$ genügen, und von denen keine durch die p-te Potenz einer Primzahl teilbar ist. Dann hat die Folge der Körper $K_i = K_0(\sqrt[p]{a_i})$ die Eigenschaft (Z)[3]. (Anwendungsmöglichkeit insbesondere auf die Folge *aller* nach wachsendem Absolutbetrag der Diskriminante geordneten quadratischen Zahlkörper.) — Jede Folge $K_1, K_2, \ldots$ von untereinander verschiedenen primitiven algebraischen Zahlkörpern, bei denen die zugehörigen Diskriminantenbeträge $|D_i|$ eine nicht abnehmende Folge bilden, besitzt die Eigenschaft (Z). Erstmalig Anwendung des Satzes 5. Es kann $i_0(n) = \mu^*(n)$ gesetzt werden.

Man beachte: Das zuletzt formulierte Ergebnis bzw. B. läßt sich *nicht* etwa verallgemeinern zu dem Satz: *Jede* Folge $K_1, K_2, \ldots$ von paarweise verschiedenen primitiven Körpern hat die Eigenschaft (Z). Denn es folgt zwar aus 1. und 3. sofort, daß bei jeder derartigen Folge jedes über K_0 irreduzible Polynom $p(x)$ über fast allen K_i irreduzibel bleiben muß. Aber für uns war die Existenz der endlich berechenbaren Schranke $\nu^*(p(x))$ der wesentliche Punkt, und die Tatsache allein, daß alle K_i primitiv sein sollen, bietet natürlich keine genügende Grundlage für die Berechnung von $\nu^*(p(x))$.

Schließlich ist zu betonen, daß der in der früheren Note betrachteten Folge der imaginär quadratischen Zahlkörper immer noch eine gewisse Vorzugsstellung vor den übrigen Körperfolgen eingeräumt werden muß, bei denen die Gültigkeit von (Z) aus einem der Kriterien A., B. folgt. Denn die endliche Berechnung der Diskriminante D des zu $p(x)$ gehörigen Normalkörpers N ist zwar grundsätzlich möglich, aber in der Regel so umständlich, daß von

[3]) Die Existenz von $i_0(n)$ folgt hier bereits aus der Tatsache, daß die Diskriminante D_i von K_i durch $p_{i1}\cdot\cdots\cdot p_{im_i}$ teilbar ist, falls $p_{i1}, \ldots, p_{im_i}$ die verschiedenen in a_i aufgehenden Primzahlen bedeuten, und daß $(p_{i1}\cdot\cdots\cdot p_{im_i})^p > |a_i|$.

einer *praktischen* Durchführbarkeit nicht die Rede sein kann. Man wird sich daher in erster Linie für solche Körperfolgen $K_1, K_2, \ldots$ mit der Eigenschaft (Z) interessieren, bei denen zu jedem einzelnen Polynom $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, zum mindesten im Falle ganzzahliger Koeffizienten a_i, die Schranke $\nu^*(p(x))$ unmittelbar aus den a_i berechnet werden kann. Daß es solche Fälle gibt, zeigt eben das Beispiel der imaginär quadratischen Zahlkörper, bei dem man zur Bestimmung von $\nu^*(p(x))$ nur eine Schranke für die $|a_i|$ $(i = 1, \ldots, n)$ braucht. Aber es fragt sich noch immer, ob es weitere wesentlich verschiedene Körperfolgen $K_1, K_2, \ldots$ mit der Eigenschaft (Z) gibt, bei denen die Schranke $\nu^*(p(x))$ in einer ähnlichen, direkten Weise ermittelt werden kann, etwa dadurch, daß man neben der Größe der Absolutbeträge noch passende Kongruenzeigenschaften der a_i heranzieht. Oder nehmen etwa die imaginär quadratischen Zahlkörper eine absolute Sonderstellung ein, die darauf beruht, daß nur bei ihnen die Menge aller ganzen Zahlen ein diskretes Gitter in der komplexen Zahlenebene bildet?

Bonn, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 26. September 1953.)

Baer, R.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 299—338 (1953)

Das Hyperzentrum einer Gruppe. III.

Von
Reinhold Baer.

Der Begriff des hyperzentralen Normalteilers einer endlichen Gruppe läßt sich durch eine Fülle äquivalenter Eigenschaften charakterisieren, die jedoch beim Übergang zum Unendlichen verschiedene Klassen von Normalteilern definieren. Unter den sich so ergebenden Möglichkeiten sind zwei Extreme ausgezeichnet: Der umfassendste Begriff, den wir als Hyperzentralität bezeichnet haben, und der wohl schärfste [engste] Begriff, den wir Oberhyperzentralität genannt haben; s. Baer [2], [3], im folgenden als H I bzw. H II zitiert. Wir wollen hier die Untersuchung dieser Begriffe fortsetzen. Es wird bequem sein, zunächst die Definitionen und für uns wichtigsten Eigenschaften zu rekapitulieren.

Definition 1. *Der Normalteiler N der Gruppe G ist oberhyperzentral in G, wenn $(N/M) \cap Z(G/M) \neq 1$ für jeden $M < N$ erfüllenden Normalteiler M von G gilt.*

Hier wie stets bedeute $Z(H)$ das *Zentrum* der Gruppe H.

Diese oberhyperzentralen Normalteiler haben die folgende wichtige Abgeschlossenheitseigenschaft.

Satz A. *Sind M und N Normalteiler der Gruppe G und ist $M < N$, so ist N dann und nur dann ein oberhyperzentraler Normalteiler von G, wenn M ein oberhyperzentraler Normalteiler von G und N/M ein oberhyperzentraler Normalteiler von G/M ist* [H I, § 2, Proposition 2, (viii)].

Gruppen, die oberhyperzentrale [hyperzentrale] Normalteiler ihrer selbst sind, heißen *obernilpotent* [*nilpotent*]. Die große Schärfe unserer Definition 1 geht nun aus dem folgenden für uns fundamentalen Satz hervor.

Satz B. *Die Maximalbedingung wird von den Untergruppen endlich erzeugbarer, obernilpotenter Gruppen erfüllt* [H I, § 8, Theorem].

Gegenstand der vorliegenden Untersuchung sind die endlich erzeugbaren, oberhyperzentralen Normalteiler; und der Satz B mag als Anlaß dafür angesehen werden. In § 1, Hauptsatz 1 stellen wir dem Satz B die folgende bemerkenswerte Eigenschaft zur Seite: Zu jeder endlich erzeugbaren, obernilpotenten Gruppe G existiert eine positive ganze Zahl n derart, daß 1 der Durchschnitt aller der charakteristischen Untergruppen X von G ist, deren Index $[G:X]$ eine Primzahlpotenz p^x mit $x \leq n$ ist. Daß diese Eigenschaft für Obernilpotenz auch hinreichend ist, ist übrigens leicht einzusehen.

Das eigentliche Thema unserer Untersuchung ist aber der Unterschied zwischen oberhyperzentral und hyperzentral.

Definition 2. *Der Normalteiler N der Gruppe G ist hyperzentral in G, wenn für jede Untergruppe U von G und für jeden Normalteiler V von U mit endlichem Index $[U:V]$ gilt:*

$(U \cap N)V/V$ ist ein [im üblichen Sinne] hyperzentraler Normalteiler der endlichen Gruppe U/V.

Um das Problem des Zusammenhangs zwischen Hyperzentralität und Oberhyperzentralität in dem uns allein interessierenden Spezialfall der endlich erzeugbaren Normalteiler klar herauszuarbeiten, müssen wir zunächst diesen Zusammenhang im allgemeinen Falle schildern; und dazu werden die folgenden Begriffsbildungen benötigt.

Definition 3. *Der Normalteiler N der Gruppe G ist fast voll reduzibel, wenn $N \neq 1$ und 1 der Durchschnitt aller in N enthaltenen Normalteiler X von G mit folgenden Eigenschaften ist:*

N/X ist ein endlicher, minimaler Normalteiler von G/X.

Definition 4. *Der Normalteiler N der Gruppe G ist lokal fast voll reduzibel, wenn es zu jedem $M < N$ erfüllenden Normalteiler M von G einen in N/M enthaltenen, fast voll reduziblen Normalteiler von G/M gibt.*

Satz C. *Der Normalteiler N von G ist dann und nur dann oberhyperzentral in G, wenn N ein hyperzentraler und lokal fast voll reduzibler Normalteiler von G ist* [H II, Satz 4].

Wir werden unser Problem nun von zwei, natürlich eng zusammenhängenden Gesichtspunkten aus angreifen. Einerseits wollen wir nämlich die oberhyperzentralen unter den endlich erzeugbaren, hyperzentralen Normalteilern charakterisieren; und wegen Satz C kommt es dabei wesentlich auf eine Abschwächung der Bedingung der lokalen Fast-Voll-Reduzibilität an, die wir durch geeignete Kettenbedingungen ersetzen werden; s. besonders § 4, Hauptsatz 2. Andererseits gehen wir direkt auf eine Charakterisierung der endlich erzeugbaren, oberhyperzentralen Normalteiler aus; und dabei handelt es sich um gleichzeitige Abschwächung der drei Bedingungen: endliche Erzeugbarkeit, Hyperzentralität und lokale Fast-Voll-Reduzibilität. Wir werden hier die endliche Erzeugbarkeit durch eine Maximalbedingung ersetzen; die Hyperzentralität werden wir wesentlich abschwächen, indem wir nur noch an die endlichen Faktorgruppen des untersuchten Normalteilers Forderungen stellen werden [§ 5, Definition 3]; aber naturgemäß werden wir dann bei der Abschwächung der lokalen Fast-Voll-Reduzibilität nicht so weit gehen können wie bei der Betrachtung der endlich erzeugbaren, hyperzentralen Normalteiler; s. § 5, Hauptsatz 3 und die Zusätze dazu. — Da bei allen unseren Kriterien die Hyperzentralität endlicher Normalteiler eine fundamentale Rolle spielt, werden wir diese Frage in § 6 und § 7 besonders untersuchen.

Gelegentlich werden wir auch folgendes Resultat benötigen.

Satz D. *Endlich viel Elemente endlicher Ordnung in einer obernilpotenten Gruppe erzeugen eine endliche Untergruppe* [H I, § 6, Theorem 1, (v)].

Bezeichnungen.

G^i ist die von allen i-ten Potenzen von Elementen in G erzeugte Untergruppe von G.
$[A, B]$ ist die von allen Kommutatoren $a^{-1} b^{-1} a\, b$ mit a in A und b in B erzeugte Untergruppe.
${}^0G = G$, ${}^{i+1}G = [G, {}^iG]$.
$G^{(0)} = G$, $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$.
$Z_0(G) = 1$, $Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = Z[G/Z_1(G)]$.
$\{T\}$ ist die von der Teilmenge T erzeugte Untergruppe.
$A \cap B$ ist der Durchschnitt der Mengen A und B.
$\bigcap_\sigma A_\sigma$ ist der Durchschnitt der Mengen A_σ.

Eine Gruppe heiße torsionsfrei, wenn 1 ihr einziges Element endlicher Ordnung ist; und sie werde als Torsionsgruppe bezeichnet, wenn alle ihre Elemente endliche Ordnung haben. Bildet die Gesamtheit der Elemente endlicher Ordnung einer Gruppe eine Untergruppe, so werden wir diese als die Torsionsuntergruppe dieser Gruppe bezeichnen.

Das Gruppenelement g ist ein *n-Element*, wenn $g^{n^i} = 1$ für hinreichend großes i gilt; und eine Gruppe ist eine *n-Gruppe*, wenn alle ihre Elemente n-Elemente sind.

Ist T eine Teilmenge der Gruppe G, so besteht ihr Zentralisator aus allen $z\, t = t\, z$ für jedes t in T erfüllenden Elementen z aus G, während der Normalisator von T aus allen $g\, T = T\, g$ erfüllenden Elemente g aus G besteht.

1. Die Normalteiler von endlichem Index.

Das Ziel der Betrachtungen dieses Abschnitts ist der Beweis des folgenden

Hauptsatz 1. *Wenn G eine endlich erzeugbare, obernilpotente Gruppe ist, dann gibt es eine positive ganze Zahl n mit folgender Eigenschaft:*

1 ist der Durchschnitt aller charakteristischen Untergruppen X von G derart, daß der Index $[G:X]$ eine Primzahlpotenz p^a mit $a \leq n$ ist.

Dem Beweis dieses Hauptsatzes schicken wir die Beweise zweier Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. *Ist G eine endliche Gruppe von Primzahlpotenzordnung p^m, ist σ ein Automorphismus von G, dessen Ordnung eine Potenz p^a derselben Primzahl p ist, so ist $a < m$.*

Beweis. Es existiert eine Normalteilerkette N_i von G mit den folgenden Eigenschaften:

$$1 = N_0 < \cdots < N_{i-1} < N_i < \cdots < N_k = G;$$

$$N_i = N_i^\sigma,\ x \equiv x^\sigma \text{ modulo } N_{i-1} \text{ für } x \text{ in } N_i;$$

$$[N_i, G] \leq N_{i-1},\ N_i^p \leq N_{i-1}.$$

[Die Konstruktion einer solchen Kette kann man etwa folgendermaßen vornehmen: Man konstruiere zunächst eine Gruppe W, die aus G durch Ajunktion eines den Bedingungen

$$w^{p^a} = 1,\ w^{-1} x\, w = x^\sigma \text{ für } x \text{ in } G$$

genügenden Elements w entsteht. Dann erfüllt die Normalteilerkette $G \cap Z_j(W)$ bereits alle Bedingungen mit eventueller Ausnahme der letzten, da ja W die Ordnung p^{m+a} hat; und man kann dann die gesuchte Kette durch Einschalten von Gliedern der Form $[G \cap Z_{j-1}(W)]\,[G \cap Z_j(W)]^{p^i}$ erhalten.]

Wir wollen nun durch vollständige Induktion zeigen, daß

(i) $$x^{\sigma^{p^{i-1}}} \equiv x \text{ modulo } N_{k-i} \text{ für } x \text{ in } G$$

gilt. Diese Behauptung ist sicher für $i=1$ richtig, da ja $G=N_k$ ist; und wir können also die Gültigkeit von (i) für irgendein i mit $0<i<k$ annehmen. Setzen wir dann $\tau=\sigma^{p^{i-1}}$, so gilt

$$x^\tau \equiv x \text{ modulo } N_{k-i} \text{ für jedes } x \text{ in } G.$$

Es ist also $x^{\tau-1}$ ein Element in N_{k-i} und folglich

$$x^{\tau-1} \equiv (x^{\tau-1})^\sigma \equiv \cdots \equiv (x^{\tau-1})^{\sigma^{p^{i-1}}} \equiv (x^{\tau-1})^\tau \text{ modulo } N_{k-i-1},$$

$$(x^{\tau-1})^p \equiv 1 \text{ modulo } N_{k-i-1}.$$

Aus $x^\tau = x^{\tau-1}x$ und diesen Kongruenzen folgt weiter, daß

$$x^{\tau^h} \equiv (x^{\tau-1})^h x \text{ modulo } N_{k-i-1}$$

$$x^{\tau^p} \equiv (x^{\tau-1})^p x \equiv x \text{ modulo } N_{k-i-1}$$

gelten; und damit haben wir $(i+1)$ aus (i) hergeleitet, da ja $\tau^p=\sigma^{p^i}$ ist. Damit ist der induktive Beweis von (i) vollständig geführt. Aus (k) und $N_0=1$ folgt schließlich $\sigma^{p^{k-1}}=1$. Also ist $a \leq k-1<m$, q.e.d.

Hilfssatz 2. *Es sei N ein oberhyperzentraler Normalteiler der Gruppe G, dessen [endliche] Ordnung eine Primzahlpotenz p^a ist. Weiter sei G/N eine endlich erzeugbare, abelsche Gruppe, p^b die Anzahl der p-Elemente in G/N und r der [endliche] Rang von G/N modulo seiner Torsionsuntergruppe. Dann existiert eine abelsche charakteristische Untergruppe M von G mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *M enthält keine von 1 verschiedenen p-Elemente.*

(b) *$[G:M]$ ist ein Teiler von $p^{(3r+1)(a+b)}$.*

Beweis. Die Gesamtheit der Elemente endlicher Ordnung in der endlich erzeugbaren abelschen Gruppe G/N ist eine endliche Gruppe. Da N endlich ist, so ist auch die Gesamtheit der Elemente endlicher Ordnung in G eine endliche Gruppe E. Es ist klar, daß E eine charakteristische Untergruppe von G ist daß $N \leq E$ und E/N die Torsionsuntergruppe von G/N ist. Da N ein oberhyperzentraler Normalteiler von G und G/N abelsch ist, so ist G obernilpotent [Satz A]. Daraus folgt insbesondere die Nilpotenz von E. Mithin ist E das direkte Produkt einer p-Gruppe P und einer Gruppe Q von zu p teilerfremder Ordnung. P und Q sind ebenfalls charakteristische Untergruppen von G, $N \leq P$ und p^{a+b} die Ordnung von P.

Da P eine charakteristische Untergruppe der obernilpotenten Gruppe G ist, so ist P ein oberhyperzentraler Normalteiler von G [Satz A]. Da P eine endliche p-Gruppe ist, so induziert jedes Element aus G in N einen Automorphismus, dessen Ordnung eine Potenz von p ist [H I, § 3, Lemma 2]; und es folgt aus Hilfssatz 1, daß diese Ordnung ein Teiler von p^{a+b} ist. Mithin ist

$$G^{p^{a+b}} \text{ im Zentralisator } C \text{ von } P \text{ in } G \text{ enthalten.}$$

Da G/E eine freie abelsche Gruppe vom endlichen Range r ist, und da

$$G/EG^{p^{a+b}} \simeq [G/E]/[EG^{p^{a+b}}/E] = [G/E]/[G/E]^{p^{a+b}}$$

ist, so ist

$$[G : EG^{p^{a+b}}] = p^{r(a+b)}.$$

Da $Q \leq G^{p^{a+b}}$ ist, so ist $EG^{p^{a+b}} = PG^{p^{a+b}}$; und da p^{a+b} die Ordnung von P ist, so ist

$$[G : G^{p^{a+b}}] \text{ ein Teiler von } p^{(r+1)(a+b)}.$$

Aus $G^{p^{a+b}} \leq C$ folgt schließlich, daß auch

$$[G : C] \text{ ein Teiler von } p^{(r+1)(a+b)}$$

ist.

Da P eine charakteristische Untergruppe von G ist, so sind auch der Zentralisator C von P in G und das Zentrum $Z(P) = P \cap C$ von P charakteristische Untergruppen von G. Da E das direkte Produkt von P und Q ist, so ist $Q \leq C$. Wir setzen $C^* = C/Q$ und $V = [QZ(P)]/Q$. Man überzeugt sich ohne Mühe, daß C^*/V eine freie abelsche Gruppe vom Range r ist, und daß die Ordnung von V ein Teiler von p^{a+b} ist. Aus $Z(P) \leq Z(C)$ folgt $V \leq Z(C^*)$; und aus der Kommutativität von C^*/V folgern wir weiter

$$[C^*, C^*] \leq V \leq Z(C^*).$$

Sind nun x und y irgendwelche Elemente in C^*, so liegt ihr Kommutator $c = x^{-1}y^{-1}xy$ in V und also im Zentrum von C^*. Daraus folgern wir

$$c^{p^{a+b}} = 1, \quad yc = cy,$$

$$y^{-1}xy = xc, \quad y^{-i}xy^i = xc^i, \quad y^{-p^{a+}}xy^{p^{a+b}} = xc^{p^{a+b}} = x,$$

so daß $y^{p^{a+b}}$ im Zentrum von C^* liegt. Mithin wird

$$C^{*p^{a+b}} \leq Z(C^*).$$

Da $V \leq Z(C^*)$ und C^*/V eine freie abelsche Gruppe vom Range r ist, so ergibt sich wieder, daß

$$[C^* : Z(C^*)] \text{ ein Teiler von } p^{r(a+b)}$$

ist.

Da $Z(C^*)$ eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe ist, deren Torsionsuntergruppe gerade V ist, und da die Ordnung von V ein Teiler von p^{a+b} ist, so ist

$$M^* = Z(C^*)^{p^{a+b}}$$

eine freie abelsche Gruppe vom Range r; und es ergibt sich wieder, daß

$$[Z(C^*) : M^*] \text{ ein Teiler von } p^{r(a+b)}$$

und also

$$[C^* : M^*] \text{ ein Teiler von } p^{2r(a+b)}$$

ist.

Es gibt eine eindeutig bestimmte Untergruppe M von G, die Q enthält und $M^* = M/Q$ erfüllt. Aus der Konstruktion von M^* ergibt sich, daß M eine charakteristische Untergruppe von G ist; denn P, Q, C sind ja charakteristische Untergruppen von G. Da M^* eine torsionsfreie abelsche Gruppe ist, und da die Ordnung von Q zu p teilerfremd ist, so enthält M keine von 1 verschiedenen p-Elemente. Es ist insbesondere also $N \cap M = 1$, so daß M der Untergruppe MN/N der abelschen Gruppe G/N isomorph ist. Folglich ist M abelsch. Da schließlich $[G:C]$ ein Teiler von $p^{(r+1)(a+b)}$ und $[C:M] = [C^*:M^*]$ ein Teiler von $p^{2r(a+b)}$ ist, so ist $[G:M]$ ein Teiler von $p^{(3r+1)(a+b)}$ q.e.d.

Beweis von Hauptsatz 1. Da G eine endlich erzeugbare, obernilpotente Gruppe ist, so wird die Maximalbedingung von den Untergruppen von G erfüllt [Satz B]. Also existiert auch eine [kleinste] positive ganze Zahl k derart, daß

$$G = Z_k(G)$$

ist [H I, § 2, Proposition 2, (viii)].

Wir werden durch vollständige Induktion für jedes $0 \leq i \leq k$ erfüllende i folgendes beweisen:

(i) *Es gibt eine positive ganze Zahl $m(i)$ und eine Menge $\Theta(i)$ von in $Z_i = Z_i(G)$ enthaltenen, charakteristischen Untergruppen von G mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *Der Durchschnitt der Untergruppen in $\Theta(i)$ ist* 1.

(b) *Zu jeder Untergruppe X in $\Theta(i)$ gibt es eine Primzahl p derart, daß $[Z_i:X]$ ein Teiler von $p^{m(i)}$ ist.*

Wir schicken dem Beweis einige Bemerkungen voraus. Da die Maximalbedingung von den Untergruppen von G erfüllt wird, so ist Z_i/Z_{i-1} für $0 < i$ eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe. Die Elemente endlicher Ordnung in Z_i/Z_{i-1} bilden eine endliche charakteristische Untergruppe E_i. Dann ist $[Z_i/Z_{i-1}]/E_i$ eine freie abelsche Gruppe von endlichem Range $r(i)$. Weiter wollen wir unter $s(i)$ die größte Zahl derart verstehen, daß die $s(i)$-te Potenz einer Primzahl in der Ordnung von $E(i)$ aufgeht. Dann ist also stets die Ordnung der p-Komponente von $E(i)$ ein Teiler von $p^{s(i)}$.

Da $Z_0 = 1$ ist, so ist (0) sicherlich wahr. Wir können also annehmen, daß $(i-1)$ für irgendein i mit $0 < i \leq k$ bereits bewiesen ist, und wenden uns der Herleitung von (i) aus $(i-1)$ zu. Zunächst setzen wir

$$m(i) = [3r(i) + 1]\,[m(i-1) + s(i)].$$

Da $m(i-1)$ positiv und weder $r(i)$ noch $s(i)$ negativ ist, so ist auch $m(i)$ positiv.

Wir betrachten nun eine charakteristische Untergruppe X in $\Theta(i-1)$ und setzen

$$H = Z_i/X \quad \text{und} \quad N = Z_{i-1}/X.$$

Es existiert eine Primzahl p derart, daß die Ordnung von N ein Teiler p^a von $p^{m(i-1)}$ ist. Aus der Gültigkeit der Maximalbedingung für die Untergruppen von G folgt weiter, daß H/N eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe

ist; und aus der Obernilpotenz von G folgern wir die Obernilpotenz von H und die Oberhyperzentralität des Normalteilers N von H [Satz A]. Die Torsionsuntergruppe von H/N ist isomorph zu $E(i)$, so daß die Ordnung p^b der p-Komponente dieser Torsionsuntergruppe ein Teiler von $p^{s(i)}$ ist. Aus der Isomorphie von H/N und Z_i/Z_{i-1} folgern wir weiter, daß H/N modulo seiner Torsionsuntergruppe eine freie abelsche Gruppe vom Range $r(i)$ ist. Wir können also aus Hilfssatz 2 die Existenz einer abelschen, charakteristischen Untergruppe M von H mit den folgenden Eigenschaften folgern:

(a) M enthält keine von 1 verschiedenen p-Elemente.

(b) $[H:M]$ ist ein Teiler von $p^{[3r(i)+1][a+b]}$.

Aus (b) und der Definition von $m(i)$ folgt dann, daß

(b′) $[H:M]$ ein Teiler von $p^{m(i)}$ ist.

Ist q eine von p verschiedene Primzahl, so ist $M^{q^{s(i)+1}}$ eine charakteristische Untergruppe von M und also von H. Aus der Isomorphie der q-Komponente von $E(i)$ mit der q-Komponente der Torsionsuntergruppe von H/N folgt die Abwesenheit von von 1 verschiedenen q-Elementen in $M^{q^{s(i)+1}}$. Ein Element endlicher Ordnung aus M gehört also dann und nur dann zu $M^{q^{s(i)+1}}$, wenn seine Ordnung zu $p\,q$ teilerfremd ist. Es folgt, daß

$$[M : M^{q^{s(i)+1}}] \text{ ein Teiler von } q^{s(i)+r(i)[s(i)+1]}$$

und also auch ein Teiler von $q^{m(i)}$ ist. Anwendung von (b′) ergibt, daß

(b″) $$[H : M^{q^{s(i)+1}}] \text{ ein Teiler von } (p\,q)^{m(i)}$$

ist. Da H eine obernilpotente Gruppe ist, so ist $H/M^{q^{s(i)+1}}$ eine endliche nilpotente Gruppe, deren Ordnung nur durch die Primzahlen p und q teilbar ist. Wegen (b′) existiert dann eine und nur eine Untergruppe $M(q)$ von H mit den folgenden beiden Eigenschaften:

(c) $$M \cap M(q) = M^{q^{s(i)+1}}.$$

(d) $$[H : M(q)] \text{ ist ein Teiler von } q^{m(i)}.$$

Da M und $M^{q^{s(i)+1}}$ charakteristische Untergruppen von H sind, so ist auch $M(q)$ eine charakteristische Untergruppe von H. — Da M eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe ist, da $M^{q^{s(i)+1}} \leq M^q$ ist, und da $M^{q^{s(i)+1}}$ nur Elemente endlicher Ordnung enthält, deren Ordnung zu $p\,q$ teilerfremd ist, so ist

$$\bigcap_{q \neq p} M^{q^{s(i)+1}} = 1;$$

und hieraus folgt wegen (c), daß

(e) $$M \cap \bigcap_{q \neq p} M(q) = 1$$

ist.

Es gibt eindeutig bestimmte, X enthaltende Untergruppen $X(p)$ bzw. $X(q)$ von G derart, daß

$$M = X(p)/X \quad \text{und} \quad M(q) = X(q)/X \quad \text{für} \quad p \neq q$$

ist. Da X eine charakteristische Untergruppe von G ist, die in der charakteristischen Untergruppe Z_{i-1} von G enthalten ist, da die $M(q)$ wie auch M charakteristische Untergruppen von $H=Z_i/X$ sind und Z_i eine charakteristische Untergruppe von G ist, so sind die $X(q)$ charakteristische Untergruppen von G, die in Z_i enthalten sind, und deren Durchschnitt wegen (e) genau X ist. Aus (d) folgt noch:

(d') $[Z_i : X(q)]$ ist ein Teiler von $q^{m(i)}$.

Wir wählen jetzt als $\Theta(i)$ das System aller $X(q)$ mit X in $\Theta(i-1)$ und für alle Primzahlen q. Da jedes X der Durchschnitt aller $X(q)$, und da 1 der Durchschnitt aller X in $\Theta(i-1)$ ist, so ist der Durchschnitt aller Y in $\Theta(i)$ gleich 1. Wegen (d') genügt also das System $\Theta(i)$ den beiden Forderungen aus (i); und damit haben wir gezeigt, daß (i) aus $(i-1)$ folgt.

Damit ist der induktive Beweis von (i) vollendet; und es gilt insbesondere (k). Da aber $G=Z_k$ ist, so folgt, daß 1 der Durchschnitt gewisser charakteristischer Untergruppen X von G mit der Eigenschaft

$$[G:X] \text{ ist eine Primzahlpotenz } p^x \text{ mit } x \leq m(k)=n$$

ist; und damit ist der Beweis von Hauptsatz 1 voll erbracht.

Bemerkung 1. Die Voraussetzung der endlichen Erzeugbarkeit ist für die Gültigkeit unseres Satzes unentbehrlich, da es ja viele Beispiele unendlicher abelscher Gruppen ohne echte Untergruppen von endlichem Index gibt.

Zusatz 1. *Die Gruppe G ist obernilpotent, wenn es eine positive ganze Zahl n und eine Menge Θ von Normalteilern von G mit den folgenden beiden Eigenschaften gibt:*

(a) *Der Durchschnitt der Untergruppen in Θ ist* 1.

(b) *Zu jedem Normalteiler X in Θ gibt es eine Primzahl p derart, daß $[G:X]$ ein Teiler von p^n ist.*

Beweis. Ist nämlich X ein Normalteiler in Θ, so ist G/X eine endliche p-Gruppe, deren Kompositionsreihe nicht länger als n sein kann. Also ist sicherlich ${}^nG \leq X$ für jedes X in Θ; und daraus folgt ${}^nG=1$ wegen (a). Dann ist aber auch $G=Z_n(G)$, woraus ohne weiteres die Obernilpotenz von G folgt; s. etwa H I, § 2, Proposition 2, (viii).

Bemerkung 2. Zusatz 1 enthält unter anderem eine Umkehrung von Hauptsatz 1.

Zusatz 2. *Die folgenden beiden Eigenschaften der endlich erzeugbaren Gruppe G sind miteinander äquivalent:*

(I) $\bigcap_{i=0}^{\infty} {}^iG = 1$.

(II) *Der Durchschnitt aller Normalteiler X mit endlicher nilpotenter Faktorgruppe G/X ist* 1.

Beweis. Ist zunächst X ein Normalteiler mit endlicher nilpotenter Faktorgruppe G/X, so existiert bekanntlich eine positive ganze Zahl i derart,

daß ${}^{i}(G/X) = 1$ ist; und dies ist äquivalent zu ${}^{i}G \leq X$. Aus dieser Bemerkung ergibt sich sofort [unter Zuhilfenahme von Hauptsatz 1], daß (I) aus (II) folgt. — Ist i positiv, so ist $G/{}^{i}G$ eine endlich erzeugbare obernilpotente Gruppe; s. etwa H I, § 2, Proposition 2, (viii); und nun folgt aus Hauptsatz 1, daß 1 der Durchschnitt aller Normalteiler von $G/{}^{i}G$ mit endlicher nilpotenter Faktorgruppe ist. Folglich ist ${}^{i}G$ der Durchschnitt aller ${}^{i}G$ enthaltenden Normalteiler von G, deren Faktorgruppe endlich und nilpotent ist. Mithin folgt (II) aus (I), q.e.d.

Bemerkung 3. Aus einem bekannten MAGNUSschen Satze folgt, daß alle freien Gruppen die Eigenschaft (I) des Zusatz 2 haben. Nichtabelsche freie Gruppen sind aber nicht obernilpotent, da ihr Zentrum ja gleich 1 ist. Hieraus folgt, daß (II) nicht zum Beweis der Obernilpotenz ausreicht. Ob dagegen (II) ausreicht, um die Obernilpotenz nilpotenter Gruppen mit Maximalbedingung zu beweisen, scheint noch eine offene Frage zu sein. — Das Beispiel der freien Gruppen zeigt auch, daß die Eigenschaften (I), (II) nicht invariant unter Faktorgruppenbildung sind.

Zusatz 3. *Jede endlich erzeugbare, obernilpotente Gruppe besitzt eine torsionsfreie charakteristische Untergruppe von endlichem Index.*

Beweis. Ist G eine endlich erzeugbare, obernilpotente Gruppe, so ist jede Untergruppe von G endlich erzeugbar [Satz B]. Es folgt also aus Satz D, daß die Gesamtheit E der Elemente endlicher Ordnung in G eine endliche Untergruppe von G ist. Zu jedem Element $e \neq 1$ in E existiert nach Hauptsatz 1 wenigstens eine charakteristische Untergruppe $C(e)$ von G, die e nicht enthält und deren Index $[G:C(e)]$ endlich ist. Der Durchschnitt D dieser charakteristischen Untergruppen $C(e)$ ist ebenfalls eine charakteristische Untergruppe von G, deren Index $[G:D]$ wegen der Endlichkeit von E ebenfalls endlich ist. Weiter ist $E \cap D = 1$, so daß D torsionsfrei ist.

2. Erweiterungen abelscher Gruppen durch endlich erzeugbare obernilpotente Gruppen.

Der folgende Begriff wird sich für die Erörterungen dieses Paragraphen als nützlich erweisen.

Definition 1. *Die Gruppe A ist eine Minimaxgruppe, wenn sie abelsch ist und eine endlich erzeugbare Untergruppe U derart enthält, daß die Minimalbedingung von den Untergruppen von A/U erfüllt wird.*

Bemerken wir, daß die Maximalbedingung von den Untergruppen endlich erzeugbarer abelscher Gruppen erfüllt wird, und daß Minimal- und Maximalbedingungen sich auf Untergruppen und Faktorgruppen vererben, so sehen wir, daß

Unter- und Faktorgruppen von Minimaxgruppen ebenfalls Minimaxgruppen sind.

Lemma 1. *Die abelsche Gruppe A ist dann und nur dann eine Minimaxgruppe, wenn es*

(a) *nur endlich viele Elemente quadratfreier Ordnung in A gibt und es*

(b) *eine endlich erzeugbare Untergruppe U von A und eine positive ganze Zahl n derart gibt, daß A/U eine n-Gruppe ist.*

Beweis. Die Gesamtheit der Elemente endlicher Ordnung in der abelschen Gruppe A ist bekanntlich eine Untergruppe E von A; und die Elemente quadratfreier Ordnung bilden eine Untergruppe Q von E, in der jede Untergruppe direkter Faktor ist.

Ist A eine Minimaxgruppe, so ist auch Q eine Minimaxgruppe. Da endlich viele Elemente in Q eine endliche Untergruppe von Q erzeugen, so folgt die Endlichkeit von Q sofort aus dem bekannten Satz, daß in einer Gruppe, deren sämtliche Untergruppen direkte Faktoren sind, dann und nur dann die Minimalbedingung gilt, wenn sie endlich ist. Da A eine Minimaxgruppe ist, so existiert eine endlich erzeugbare Untergruppe U von A derart, daß in A/U die Minimalbedingung gilt. Dann haben alle Elemente in A/U endliche Ordnung und es gibt nur endlich viele Elemente quadratfreier Ordnung; und daraus folgt, daß A/U eine n-Gruppe für geeignetes positives n ist. Damit ist die Notwendigkeit von (a) und (b) erwiesen.

Wir nehmen umgekehrt die Gültigkeit von (a) und (b) an. Dann folgt aus (a) und bekannten Sätzen die Gültigkeit der Minimalbedingung für die Untergruppen von E. Aus (b) folgern wir die Existenz einer endlich erzeugbaren Untergruppe U und einer ganzen Zahl n derart, daß A/U eine n-Gruppe ist. Wir setzen $A^* = A/E$ und $U^* = UE/E$; und bemerken, daß die Minimalbedingung jedenfalls von den Untergruppen von $UE/U \simeq E/(U \cap E)$ erfüllt wird. Weiter ist

$$A^*/U^* \simeq A/UE \simeq (A/U)/(UE/U)$$

als Faktorgruppe einer n-Gruppe selbst eine n-Gruppe; und $U^* \simeq U/(U \cap E)$ ist eine endlich erzeugbare Untergruppe der torsionsfreien Gruppe $A^* = A/E$.

Wir wollen zeigen, daß die Minimalbedingung von den Untergruppen von A^*/U^* erfüllt wird. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die Gruppe Q^* der Elemente quadratfreier Ordnung in A^*/U^* endlich ist. Da aber A^*/U^* und also auch Q^* eine n^3-Gruppe ist, so ist dies dann und nur dann der Fall, wenn es nur endlich viele Elemente von vorgegebener Primzahlordnung p in A^*/U^* gibt. Wäre dies nicht wahr, so gäbe es eine unendliche und unabhängige Menge B von Elementen einer gewissen Primzahlordnung p in A^*/U^* — die Unabhängigkeit von B besagt, daß kein Element in B sich durch die andern Elemente in B ausdrücken läßt. Jedes Element in B ist eine Restklasse von A^* modulo U^*; und in jeder dieser Restklassen wählen wir irgendwie einen Repräsentanten aus. Die so ausgewählte Repräsentantenmenge heiße R. Da U^* endlich erzeugbar und also eine freie abelsche Gruppe endlichen Ranges ist, und da die Menge R^p der p-ten Potenzen von Elementen aus R in U^* enthalten ist, so gibt es eine nichttriviale Relation zwischen

den Elementen in R:

$$1 = \prod_{i=1}^{m} r(i)^{e(i)},$$

wo die $r(i)$ endlich viel verschiedene Elemente aus R und die Exponenten $e(i)$ sämtlich von Null verschieden sind. Wegen der Torsionsfreiheit von A^* können wir o.B.d.A. annehmen, daß die Exponenten $e(i)$ teilerfremd sind. Aus obiger Relation folgt aber auch

$$1 = \prod_{i=1}^{m} (U^* r(i))^{e(i)}.$$

Da nun die Elemente $U^* r(i)$ endlich viel verschiedene Elemente in der unabhängigen Teilmenge B von A^*/U^* sind, so muß jedes $e(i)$ durch p teilbar sein im Widerspruch zu der angenommenen Teilerfremdheit der $e(i)$. Aus diesem Widerspruch folgt nun, wie schon vorher gesagt, die Gültigkeit der Minimalbedingung in A^*/U^*.

Nun ist $A^*/U^* \simeq (A/U)/(UE/U)$ und in A^*/U^* wie auch in UE/U gilt die Minimalbedingung. Also gilt sie auch in A/U; und damit haben wir gezeigt, daß A eine Minimaxgruppe ist, q.e.d.

In Verschärfung von H I, § 1, Lemma 4 beweisen wir weiter das

Lemma 2. *Ist der Normalteiler N der Gruppe G eine Minimaxgruppe, so ist N ein lokal fast voll reduzibler Normalteiler von G.*

Beweis. Es sei M ein Normalteiler von G und $M < N$. Dann ist $N^* = N/M$ ein von 1 verschiedener Normalteiler von $G^* = G/M$; und als Faktorgruppe einer Minimaxgruppe ist N^* ebenfalls eine Minimaxgruppe.

Fall 1. N^* enthält Elemente endlicher Ordnung $\neq 1$.

Dann bilden die Elemente quadratfreier Ordnung in N^* eine von 1 verschiedene Untergruppe Q^* von N^*. Diese ist endlich, da N^* eine Minimaxgruppe ist [Lemma 1]; und als charakteristische Untergruppe von N^* ist Q^* ein Normalteiler von G^*. Naturgemäß enthält Q^* einen endlichen minimalen Normalteiler von G^*, so daß also N^* auch einen von 1 verschiedenen, fast voll reduziblen Normalteiler von G^* enthält.

Fall 2. N^* ist torsionsfrei.

Da N^* eine Minimaxgruppe ist, so ist N^* modulo einer endlich erzeugbaren Untergruppe eine Torsionsgruppe; und folglich hat N^* wie auch jede Untergruppe von N^* einen wohlbestimmten endlichen Rang [= Minimalzahl linear unabhängiger Elemente]. Also gibt es unter den in N^* enthaltenen, von 1 verschiedenen Normalteilern von G^* einen minimalen Ranges, etwa W. Dann ist W eine torsionsfreie Minimaxgruppe; und wir folgern aus Lemma 1 die Existenz einer positiven ganzen Zahl n und einer endlich erzeugbaren Untergruppe V von W [die kein Normalteiler von G^* zu sein braucht] derart, daß W/V eine n-Gruppe ist. V ist eine freie abelsche Gruppe endlichen Ranges r; und r ist auch der Rang von W. Ist p eine der unendlich vielen, n nicht

teilenden Primzahlen, so enthält W/V kein Element der Ordnung p; und ein Element w gehört also dann und nur dann zu V, wenn w^p zu V gehört [W ist ja torsionsfrei]. Da V eine freie abelsche Gruppe ist, so ist $V^p < V$. Da aber nicht in V^p gelegene Elemente aus V auch nicht zu W^p gehören, so ist

$$W^p < W \text{ für jede } n \text{ nicht teilende Primzahl } p.$$

Da W/W^p eine Minimaxgruppe ist, deren sämtliche Elemente die Ordnung p haben, so ist W/W^p endlich [Lemma 1]. Da W^p als charakteristische Untergruppe des Normalteilers W selbst Normalteiler von G^* ist, so existiert ein maximaler zwischen W^p und W gelegener Normalteiler $W(p)$ von G^*. Es ist dann $W/W(p)$ ein minimaler endlicher Normalteiler von $G^*/W(p)$ und die Ordnung von $W/W(p)$ ist durch p teilbar. Sei D der Durchschnitt aller dieser Normalteiler $W(p)$. Es ist klar, daß auch D ein Normalteiler von G^* ist. Wäre W/D eine Torsionsgruppe, so gäbe es Elemente der Ordnung p in W/D für jede n nicht teilende Primzahl p, da ja $D \leq W(p) < W$ und $W/W(p)$ eine p-Gruppe ist. Aber W/D ist eine Minimaxgruppe; und es folgt aus Lemma 1, daß W/D nur endlich viele Elemente quadratfreier Ordnung enthält. Dies ist ein Widerspruch, aus dem folgt, daß W/D keine Torsionsgruppe ist. Dann ist aber der Rang des Normalteilers D kleiner als der minimale Rang von W. Folglich ist $D = 1$; und damit haben wir gezeigt, daß W ein fast voll reduzibler Normalteiler von G^* ist.

Das Hauptresultat dieses Paragraphen ist der folgende

Satz 1. *Erweiterungen abelscher Gruppen durch endlich erzeugbare ober nilpotente Gruppen sind dann und nur dann obernilpotent, wenn sie nilpotent sind.*

Dem Beweise dieses Satzes sei der Beweis einiger Hilfssätze vorausgeschickt.

Hilfssatz 1. *Wenn N ein abelscher Normalteiler der nilpotenten Gruppe G und G/N zyklisch ist, dann sind Elemente von Primzahlordnung aus N in endlichen Normalteilern von G enthalten.*

Beweis. Es sei Ng ein erzeugendes Element der zyklischen Gruppe G/N. Da N abelsch ist, so wird jeder Automorphismus von N, der in N durch ein Element aus G induziert wird, bereits durch eine Potenz von g induziert.

Sei b ein Element aus N, dessen Ordnung eine Primzahl p ist. Der kleinste b enthaltende Normalteiler von G ist die von den Elementen $g^{-i}b\,g^i$ erzeugte Untergruppe B von N. Wir wollen zeigen, daß B endlich ist. Wäre dies nicht der Fall, so wären die Elemente $g^{-i}b\,g^i$ alle verschieden und bildeten eine [unendliche] Basis von B, da ja jedes der Elemente $g^{-i}b\,g^i$ die Ordnung p hat und $B^p = 1$ ist. Wir setzen $U = \{B, g\} = \{b, g\}$ und bemerken, daß U als Untergruppe einer nilpotenten Gruppe ebenfalls nilpotent ist, daß B ein abelscher Normalteiler von U und U/B zyklisch ist. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1. $p \neq 2$.

Es sei V der von den Elementen $g^{-i}(b\,g^{-1}b\,g)g^i$ erzeugte Normalteiler von G und U. Es ist klar, daß V in B enthalten ist; und man überzeugt

sich leicht, daß b nicht in V liegen kann, da die Elemente $g^{-i}bg^i$ unabhängig sind. Andererseits ist

$$g^{-1}bg \equiv b^{-1} \text{ modulo } V,$$

so daß g einen Automorphismus der Ordnung 2 in der zyklischen Gruppe $B/V = \{V, b\}/V$ der ungeraden Ordnung p induziert. Folglich ist $U/\{V, g^2\}$ eine nicht zyklische Gruppe der Ordnung $2p$, also eine nicht nilpotente, endliche Gruppe, was der Nilpotenz von G und U widerspricht.

Fall 2. $p = 2$.

Es sei V der von den Elementen $g^{-i}(bg^{-1}bg^{-1}bg^2)g^i$ erzeugte Normalteiler von G und U; und da die Elemente $g^{-i}bg^i$ der Ordnung 2 eine Basis von B bilden, so sind Vb und $Vg^{-1}bg$ zwei verschiedene Elemente [der Ordnung 2] in B/V. Da

$$g^{-2}bg^2 \equiv bg^{-1}bg \text{ modulo } V$$

ist, so ist B/V eine Gruppe der Ordnung 4 [die Vierergruppe]; und da weiter

$$g^{-3}bg^3 \equiv g^{-1}bgg^{-2}bg^2 \equiv b \text{ modulo } V$$

ist, so induziert g in B/V einen Automorphismus der Ordnung 3. Folglich ist $U/\{V, g^3\}$ eine nicht nilpotente Gruppe der Ordnung 12; und dies widerspricht der Nilpotenz von G und U.

Damit ist die Endlichkeit von B in beiden Fällen bewiesen, q.e.d.

Bemerkung 1. Durch wiederholte Anwendung von Hilfssatz 1 könnte man leicht beweisen, daß endlich viele Elemente endlicher Ordnung in N in einem endlichen Normalteiler von G enthalten sind.

Hilfssatz 2. *Wenn N ein torsionsfreier abelscher Normalteiler der nilpotenten Gruppe G und G/N zyklisch ist, dann ist jedes Element aus N in einem Normalteiler von G enthalten, der eine Minimaxgruppe ist.*

Beweis. Es sei Ng ein erzeugendes Element der zyklischen Gruppe G/N. Da N abelsch ist, so wird jeder Automorphismus von N, der in N durch ein Element aus G induziert wird, bereits durch eine Potenz von g induziert.

Ist $b \neq 1$ ein Element aus N, so ist der kleinste b enthaltende Normalteiler von N die von den Elementen $g^{-i}bg^i$ erzeugte Untergruppe B von N. Wir wollen zeigen, daß diese torsionsfreie abelsche Gruppe B eine Minimaxgruppe ist.

Wären die Elemente $g^{-i}bg^i$ unabhängig, so bildeten sie eine Basis der dann freien abelschen Gruppe B. Ist p irgendeine Primzahl, so ist B^p als charakteristische Untergruppe des Normalteilers B von G selbst ein Normalteiler von G. Da die Elemente $g^{-i}bg^i$ unabhängig sind, so sind auch die Elemente $B^pg^{-i}bg^i$ unabhängig, so daß insbesondere B/B^p unendlich ist. Weiter ist $N/B^p = N^*$ ein abelscher Normalteiler der nilpotenten Gruppe $G/B^p = G^*$ und $G^*/N^* \simeq G/N$ ist zyklisch. Weiter ist B^pb ein Element der Ordnung p in N^* und $B^* = B/B^p$ ist der kleinste B^pb enthaltende Normalteiler von G^*. Es folgt aus Hilfssatz 1, daß B^* endlich ist; und dies ist ein Widerspruch. Aus

der damit erwiesenen Abhängigkeit der Elemente $g^{-i}bg^i$ folgern wir nun die Existenz einer Relation

$$(+) \qquad 1 = \prod_{i=h}^{k} (g^{-i}bg^i)^{e(i)} \text{ mit } h < k \text{ und } e(h)\,e(k) \neq 0.$$

Wir setzen U gleich der von den Elementen $g^{-i}bg^i$ mit $h \leq i < k$ erzeugten Untergruppe von B. Durch Transformation mit g^j folgt aus $(+)$ die Relation

$$1 = \prod_{i=h}^{k} (g^{-(i+j)}bg^{i+j})^{e(i)};$$

und mit ihrer Hilfe überzeugt man sich leicht, daß B/U eine $e(h)\,e(k)$-Gruppe ist. Da U endlich erzeugt ist, und da B eine torsionsfreie abelsche Gruppe ist, so folgt aus Lemma 2 sofort, daß B eine Minimaxgruppe ist, q.e.d.

Hilfssatz 3. *Erweiterungen abelscher Gruppen durch zyklische Gruppen sind dann und nur dann obernilpotent, wenn sie nilpotent sind.*

Bemerkung 2. Dieser Satz stellt insofern eine Verschärfung von BAER [1; p. 400, Lemma 1.9] dar, als die hier gemachte Voraussetzung der Nilpotenz schwächer als die dort gemachte Annahme (G) ist. Trotz mancher Ähnlichkeit ist der hier gegebene Beweis elementarer als unsere ursprüngliche Beweisanordnung.

Beweis. Die Notwendigkeit unserer Bedingung ist in Satz C enthalten. Wir nehmen also gleich an, daß N ein abelscher Normalteiler der nilpotenten Gruppe G mit zyklischer Faktorgruppe G/N ist. Dann ist natürlich N auch ein hyperzentraler Normalteiler von G; und wir wollen zeigen, daß N ein lokal fast voll reduzibler Normalteiler von G ist. Sei also M ein Normalteiler von G und $M < N$. Dann ist $N^* = N/M$ ein von 1 verschiedener abelscher Normalteiler der nilpotenten Gruppe $G^* = G/N$ mit zyklischer Faktorgruppe $G^*/N^* \simeq G/N$. Ist N^* nicht torsionsfrei, so enthält N^* ein Element von Primzahlordnung und also wegen Hilfssatz 1 einen von 1 verschiedenen, endlichen Normalteiler von G^*, der dann auch eine Minimaxgruppe ist; ist aber N^* torsionsfrei, so folgern wir aus Hilfssatz 2 die Existenz eines von 1 verschiedenen, in N^* enthaltenen Normalteilers von G^*, der eine Minimaxgruppe ist. Anwendung von Lemma 2 ergibt dann die Existenz eines von 1 verschiedenen, in N^* enthaltenen, [lokal] fast voll reduziblen Normalteilers von G^*; und damit haben wir gezeigt, daß N selbst ein lokal fast voll reduzibler Normalteiler von G ist. Es folgt aus Satz C, daß N ein oberhyperzentraler Normalteiler von G ist. Da G/N zyklisch ist, so ergibt sich nun die Obernilpotenz von G aus Satz A, q.e.d.

Definition 2. *Die Gruppe G ist überauflösbar, wenn*

(a) *die Maximalbedingung von den Normalteilern von G erfüllt wird und*

(b) *jede von 1 verschiedene Faktorgruppe von G einen von 1 verschiedenen zyklischen Normalteiler enthält.*

Man überzeugt sich leicht, daß die Maximalbedingung von den Untergruppen überauflösbarer Gruppen erfüllt wird, daß Unter- und Faktorgruppen

überauflösbarer Gruppen überauflösbar sind; und es folgt aus Satz B, daß endlich erzeugbare obernilpotente Gruppen auch überauflösbar sind.

Lemma 3. *Abelsche Normalteiler mit überauflösbarer Faktorgruppe sind dann und nur dann oberhyperzentral, wenn sie hyperzentral sind.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ist in Satz C enthalten. Es sei darum N ein abelscher, hyperzentraler Normalteiler von G mit überauflösbarer Faktorgruppe G/N. Es gibt N enthaltende Normalteiler X von G derart, daß N ein oberhyperzentraler Normalteiler von X ist, z.B. $X=N$. Da aber die Maximalbedingung von den N enthaltenden Normalteilern von G erfüllt wird, so gibt es einen maximalen N enthaltenden Normalteiler W von G derart, daß N ein oberhyperzentraler Normalteiler von W ist. Wir wollen zeigen, daß $W=G$ ist. Wäre dies nicht wahr, so folgte aus $N \leq W < G$ und der Überauflösbarkeit von G/N die Existenz eines W enthaltenden Normalteilers V von G derart, daß V/W eine von 1 verschiedene zyklische Gruppe ist. Aus der Maximalität von W folgt dann, daß N kein oberhyperzentraler Normalteiler von V ist. Folglich existiert ein $M<N$ erfüllender Normalteiler M von V derart, daß

$$(N/M) \cap Z(V/M) = 1$$

ist. Es sei Wv ein erzeugendes Element der zyklischen Gruppe V/W. Da N ein oberhyperzentraler Normalteiler der Gruppe W ist, und da M ein Normalteiler von V und W ist, so ist

$$1 \neq (N/M) \cap Z(W/M) = A/M.$$

Es ist also $A^* = A/M$ ein abelscher Normalteiler der Gruppe $U^* = \{A, v\}/M$ mit zyklischer Faktorgruppe $U^*/A^* \simeq \{A, v\}/A$, da ja das Zentrum von W/M als charakteristische Untergruppe des Normalteilers W/M von V/M auch ein Normalteiler von V/M ist, und da also A^* ein Normalteiler von V/M ist. Da aber N ein hyperzentraler Normalteiler von G ist, so ist A^* ein hyperzentraler Normalteiler von U^*; und da U^*/A^* zyklisch ist, so ist U^* nilpotent; s. etwa H II, Satz 1. Es folgt aus Hilfssatz 3, daß U^* obernilpotent ist, daß also A^* ein oberhyperzentraler Normalteiler von U^* ist, und daß also

$$1 \neq A^* \cap Z(U^*)$$

gilt. Aus $V = \{W, v\}$ folgt nun aber, daß

$$1 = (N/M) \cap Z(V/M) = (N/M) \cap Z(W/M) \cap Z(U^*) = A^* \cap Z(U^*) \neq 1$$

ist, ein Widerspruch aus dem wir $W=G$ und die Überhyperzentralität des Normalteilers N von G folgern, q.e.d.

Bemerkung 3. Die in der Definition 2 auftretende Bedingung (a) ist für die Gültigkeit von Lemma 3 unentbehrlich. Denn es existieren Erweiterungen abelscher Gruppen durch abelsche Gruppen, die beide unendliche p-Gruppen sind, die also auch nilpotent sind, trotzdem ihr Zentrum 1 ist; s. etwa BAER

[1; p. 412, Example 3.4]. Dagegen kann man die Voraussetzung der Überauflösbarkeit von G/N in anderer Hinsicht etwas abschwächen.

Beweis von Satz 1. Die Notwendigkeit der Bedingung ist wieder in Satz C enthalten. Sei also N ein abelscher Normalteiler der nilpotenten Gruppe G mit endlich erzeugbarer obernilpotenter Faktorgruppe G/N. Es folgt aus Satz B, daß G/N überauflösbar ist. Da N ein abelscher, hyperzentraler Normalteiler von G ist, so folgt aus Lemma 3, daß N ein oberhyperzentraler Normalteiler von G ist; und da G/N obernilpotent ist, so folgt aus Satz A, daß G obernilpotent ist, q.e.d.

Satz 2. *Die endlich erzeugbare Gruppe G ist dann und nur dann obernilpotent, wenn G nilpotent ist und $G^{(n)}=1$ für hinreichend großes n gilt.*

Beweis. Ist G obernilpotent, so ist G nilpotent [Satz C]. Aus der endlichen Erzeugbarkeit von G folgt die Gültigkeit der Maximalbedingung [Satz B]. Also ist $G=Z_n(G)$ für hinreichend großes n [H I, § 2, Proposition 2, (viii)] und daraus folgt $G^{(n)}=1$.

Ist umgekehrt G eine endlich erzeugbare, nilpotente Gruppe, so folgert man aus Satz 1 durch vollständige Induktion nach n die Obernilpotenz aller Faktorgruppen $G/G^{(n)}$, woraus insbesondere unsere Behauptung folgt.

Bemerkung 4. Wie in Bemerkung 3 sieht man die Unentbehrlichkeit der Voraussetzung der endlichen Erzeugbarkeit von G ein.

3. Verallgemeinerte FRATTINI-Gruppen.

Es liegt nahe, den Begriff der FRATTINI-Untergruppe dadurch zu verallgemeinern, daß man Durchschnitte gewisser ausgezeichneter Klassen maximaler Untergruppen bildet. Die im folgenden gewählte Verallgemeinerung ist unseren besonderen Zwecken angepaßt.

Definition 1. *Ist U ein Untergruppe und N ein Normalteiler der Gruppe G, so ist $\Phi(N, U)$ der Durchschnitt aller der maximalen Untergruppen V von U, deren Index $[U:V]$ endlich ist, und die $U \cap N$ nicht enthalten.*

Es ist klar, daß $\Phi(N, U)$ von all den Automorphismen von U auf sich abgebildet wird, die $N \cap U$ auf sich abbilden, d.h. $\Phi(N, U)$ ist eine N-charakteristische Untergruppe von U. Da $N \cap U$ ein Normalteiler von U ist, so ist $\Phi(N, U)$ stets ein Normalteiler von U.

Dann und nur dann ist $\Phi(N, U)=U$, wenn jede maximale Untergruppe von U, deren Index in U endlich ist, auch $N \cap U$ enthält.

Ist insbesondere $N=U=G$, so setzen wir $\Phi(G, G)=\Phi'(G)$. Diese charakteristische Untergruppe von G stimmt mit der klassischen FRATTINI-Untergruppe von G sicher dann überein, wenn G endlich ist.

Satz 1. *Ist U eine Untergruppe und N ein Normalteiler der Gruppe G, sind V und W Normalteiler von U derart, daß $W<V \leq \Phi(N, U) \cap N$ und V/W endlich ist, dann ist V/W nilpotent.*

Beweis. Es sei P/W eine p-Sylowgruppe der endlichen Gruppe V/W und Q/W der Normalisator von P/W in U/W. Da irgendzwei p-Sylowgruppen der

endlichen Gruppe V/W in V/W konjugiert sind, und da V/W ein Normalteiler von U/W ist, so ergibt sich, wie üblich, daß $U = V\,Q$ ist. Da aber $V \leq \Phi(N,U) \cap N \leq U$ ist, so gilt sogar $U = Q[\Phi(N,U) \cap N]$. Da die Untergruppe P/W der endlichen Gruppe V/W nur endlich viele konjugierte in V/W besitzt, und da V/W ein Normalteiler von U/W ist, so ist der Index $[U:Q]$ endlich. Wäre nun $Q < U$, so gäbe es wegen der Endlichkeit von $[U:Q]$ eine maximale, Q enthaltende Untergruppe J von U, deren Index $[U:J]$ natürlich auch endlich wäre. Enthielte J die Untergruppe $U \cap N$, so wäre

$$U = Q[\Phi(N,U) \cap N] \leq Q[U \cap N] \leq Q\,J = J < U,$$

eine Unmöglichkeit. Also ist $U \cap N$ nicht in J enthalten; und nun folgt aus der Definition von $\Phi(N,U)$, daß $\Phi(N,U) \leq J$ und also

$$U = Q[\Phi(N,U) \cap N] \leq Q\Phi(N,U) \leq Q\,J = J < U$$

ist; und dies ist ebenfalls unmöglich. Also ist $Q = U$ und P/W ein Normalteiler von U/W. Folglich sind alle Sylowgruppen der endlichen Gruppe V/W Normalteiler von U/W und also von V/W, womit die Nilpotenz von V/W erwiesen ist.

Bemerkung 1. Die Voraussetzung, daß V und W Normalteiler von U sind, ist unentbehrlich. Ist nämlich $U = N = G$ eine Gruppe ohne echte Untergruppen von endlichem Index, so ist $\Phi^e(G) = G$. Eine solche Gruppe kann aber sehr wohl endliche Faktorgruppen von Untergruppen besitzen, die nicht nilpotent sind.

Satz 2. *Die folgenden Eigenschaften des Normalteilers N der Gruppe G sind äquivalent:*

(I) *N ist ein hyperzentraler Normalteiler von G.*

(II) *Ist U eine Untergruppe von G, so ist $[U,U] \leq \Phi(N,U)$.*

(III) *Wenn der Normalteiler V der Untergruppe U nicht in $\Phi(N,U)$ enthalten ist, dann gibt es eine maximale Untergruppe von U, die weder V noch $N \cap U$ enthält, und die Normalteiler von U ist.*

Beweis. Es sei zunächst N ein hyperzentraler Normalteiler von G. Ist dann V eine maximale Untergruppe der Untergruppe U von G, $[U:V]$ endlich und $N \cap U \not\leq V$, so folgern wir zunächst aus der Endlichkeit von $[U:V]$ und einem Satze von Poincaré die Existenz eines in V enthaltenen Normalteilers W von U, dessen Index $[U:W]$ endlich ist. Aus der Hyperzentralität von N folgt nun, daß $(U \cap N)W/W$ ein im üblichen Sinne hyperzentraler Normalteiler der endlichen Gruppe U/W ist. Weiter ist V/W eine maximale Untergruppe von U/W, die $(U \cap N)W/W$ nicht enthält; und nun folgern wir aus den wohlbekannten Eigenschaften der hyperzentralen Normalteiler endlicher Gruppen, daß V/W ein Normalteiler von U/W ist; s. etwa H I, § 5, Theorem 3, (iv). Dann ist aber auch V ein Normalteiler von U; und wir haben die Gültigkeit folgender Bedingung gezeigt:

(II′) *Ist V eine maximale Untergruppe der Untergruppe U von G, ist $[U:V]$ endlich und $N \cap U \not\leq V$, so ist V ein Normalteiler von U.*

Maximale Untergruppen, die Normalteiler sind, bestimmen aber untergruppenfreie Faktorgruppen, die zyklisch von Primzahlordnung sind. Maximale Untergruppen, die Normalteiler sind, enthalten also die Kommutatorgruppe. Mithin folgt (II) aus (II'). — Da aber Untergruppen, die die Kommutatorgruppen enthalten, Normalteiler sind, so folgt (II') aus (II); und wir haben die Äquivalenz von (II) und (II') dargetan.

Wir nehmen weiter die Gültigkeit der äquivalenten Bedingungen (II) und (II') an und betrachten einen Normalteiler V der Untergruppe U von G, der nicht in $\Phi(N,U)$ enthalten ist. Dann gibt es notwendig eine maximale Untergruppe W von U, deren Index $[U:W]$ endlich ist und die weder $N\cap U$ noch V enthält. Es folgt aus (II'), daß W ein Normalteiler von U ist; und damit haben wir gezeigt, daß (III) aus den äquivalenten Bedingungen (II) und (II') folgt.

Als nächstes setzen wir die Gültigkeit von (III) voraus. Weiter sei V ein Normalteiler der Untergruppe U von G und U/V endlich. Wir wollen zeigen, daß $(U\cap N)V/V$ ein im üblichen Sinne hyperzentraler Normalteiler von U/V ist. Wir setzen $H=U/V$ und $K=(U\cap N)V/V$. Aus der bereits dargetanen Äquivalenz von (II) und (II') und aus dem bereits erwähnten Kriterium [H I, § 5, Theorem 3, (iv)] für Hyperzentralität von Normalteilern endlicher Gruppen folgern wir, daß

(+) K dann und nur dann ein hyperzentraler Normalteiler der endlichen Gruppe H ist, wenn $[J,J]\leq\Phi(K,J)$ für jede Untergruppe J von H gilt.

Ist nun J irgendeine Untergruppe von H, so gibt es eine eindeutig bestimmte, V enthaltende Untergruppe L von U derart, daß $J=L/V$ ist. Es ist klar, daß $[J,J]=V[L,L]/V$ ist. Die maximalen Untergruppen von J, die $J\cap K$ nicht enthalten und deren Index in J endlich ist, sind dann genau die Untergruppen der Form S/V, wo S eine maximale Untergruppe von L ist, die V enthält, deren Index in L endlich ist, und die $L\cap(U\cap N)V$ nicht enthält. Aus dem DEDEKINDschen Modulsatz und $V\leq L$ folgt aber, daß

$$L\cap(U\cap N)V=V(L\cap U\cap N)=V(L\cap N)$$

ist. Also enthält S dann und nur dann nicht $L\cap(U\cap N)V$, wenn S nicht $L\cap N$ enthält; und damit haben wir gezeigt, daß

$$V\Phi(N,L)/V\leq\Phi(K,J)$$

gilt.

Wäre $[L,L]$ nicht in $\Phi(N,L)$ enthalten, so würde aus (III) die Existenz einer maximalen Untergruppe T von L folgen, die weder $[L,L]$ noch $N\cap L$ enthält, und die doch Normalteiler von L wäre. Maximale Untergruppen, die Normalteiler sind, enthalten aber, wie schon bemerkt, die Kommutatorgruppe. Aus diesem Widerspruch folgt, daß

$$[L,L]\leq\Phi(N,L)$$

ist. Folglich wird

$$[J,J]=V[L,L]/V\leq V\Phi(N,L)/V\leq\Phi(K,J).$$

Damit haben wir aber die Gültigkeit des obigen Kriteriums (+) verifiziert. Folglich ist K ein hyperzentraler Normalteiler der endlichen Gruppe H; und damit haben wir die Hyperzentralität des Normalteilers N von G erwiesen, q.e.d.

4. FRATTINI-Ketten.

Wir erinnern zunächst an den Begriff der *aufsteigenden Normalketten der Gruppe G*. Darunter verstehen wir eine wohlgeordnete Menge von Untergruppen $U_\sigma[0 \leq \sigma \leq \gamma]$ der Gruppe G mit folgenden Eigenschaften:

$$1 = U_0 \leq \cdots \leq U_\sigma \leq U_{\sigma+1} \leq \cdots \leq U_\gamma = G;$$

$$U_\sigma \text{ ist ein Normalteiler von } U_{\sigma+1};$$

ist σ eine Limeszahl, so ist U_σ die Vereinigungsmenge aller U_ν mit $\nu < \sigma$.

Ist insbesondere stets $U_\sigma < U_{\sigma+1}$, so wollen wir von einer *eigentlichen* aufsteigenden Normalkette der Gruppe G sprechen; und in den meisten Fällen wird es möglich sein, sich auf die Betrachtung eigentlicher Ketten zu beschränken.

Die Faktorgruppen $U_{\sigma+1}/U_\sigma$ heißen die *Faktoren* der Kette U_σ.

Definition 1. *Eine aufsteigende* FRATTINI-*Kette der Gruppe G ist eine aufsteigende Normalkette U_σ von G mit der Eigenschaft:*

$$\Phi^e(U_{\sigma+1}) \leq U_\sigma \text{ für jedes } \sigma.$$

Die Frage, ob jede Gruppe eine aufsteigende FRATTINI-Kette besitzt, müssen wir unentschieden lassen. Wir werden aber wenigstens eine Reihe von Gruppenklassen angeben, die aufsteigende FRATTINI-Ketten besitzen.

1. Ist $\Phi^e(G) = 1$, so heiße G *Φ^e-einfach*. Beispiele Φ^e-einfacher Gruppen sind die freien Gruppen und die abelschen Gruppen A, die $A^p = 1$ für eine gewisse Primzahl p erfüllen.

2. Jede aufsteigende Normalkette mit Φ^e-einfachen Faktoren ist auch eine FRATTINI-Kette. Daß die Umkehrung hiervon falsch ist, kann man sich an einfachen Beispielen klar machen.

3. Aus der unter 1. gemachten Bemerkung folgert man mühelos, daß jede abelsche Gruppe eine aufsteigende FRATTINI-Kette besitzt. Bezeichnet man als *schwach auflösbar* eine jede Gruppe, die eine aufsteigende Normalkette mit abelschen Faktoren besitzt, so folgt weiter, daß *jede schwach auflösbare Gruppe eine aufsteigende* FRATTINI-*Kette besitzt*.

Hauptsatz 2. *Die folgenden Eigenschaften des endlich erzeugbaren Normalteilers N der Gruppe G sind miteinander äquivalent:*

(I) *N ist ein oberhyperzentraler Normalteiler von G.*

(II) *N besitzt eine aufsteigende* FRATTINI-*Kette; sind U und V Untergruppen von G, die den Bedingungen*

$$U = V[U, U] = V(U \cap N)$$

genügen, so ist $U = V$.

(III) *N besitzt eine aufsteigende* FRATTINI-*Kette; die Untergruppe U von N ist [dann und nur dann] endlich erzeugbar, wenn $U/[U,U]$ endlich erzeugbar ist; N ist ein hyperzentraler Normalteiler von G.*

Beweis. Es sei zunächst N ein oberhyperzentraler Normalteiler von G. Dann ist N auch eine obernilpotente Gruppe. Solche Gruppen sind offenbar schwach auflösbar und besitzen also aufsteigende FRATTINI-Ketten; s. 3. oben. Die Maximalbedingung wird von den Untergruppen endlich erzeugbarer obernilpotenter Gruppen erfüllt [Satz B] und es gilt also die Maximalbedingung in N. Wir betrachten schließlich Untergruppen U und V von G, die den Bedingungen

$$U = V[U,U] = V(U \cap N)$$

genügen; und nehmen $U \neq V$, also $V < U$ an. Es gibt Untergruppen S von $U \cap N$ derart, daß $\{V, S\} < U$ ist, z. B. $S = 1$. Da die Maximalbedingung von den Untergruppen von N erfüllt wird, gibt es eine maximale Untergruppe T von $U \cap N$ derart, daß $W = \{V, T\} < U$ ist. Aus $V \leq W$ folgern wir $U = W[U,U] = W(U \cap N)$ und aus $W < U$ folgt weiter, daß $U \cap N$ nicht in W enthalten ist. Ist R eine $W < R \leq U$ erfüllende Untergruppe von G, so gibt es ein nicht in W enthaltenes Element r in R. Aus $U = W(U \cap N)$ folgern wir die Existenz von Elementen w und t in W bzw. $U \cap N$ derart, daß $r = w\,t$ ist. Da r nicht in W liegt, liegt auch t nicht in W und also auch nicht in T. Da w in $W < R$ liegt, so liegt auch t in R. Dann ist aber $T < \{T, t\} \leq U \cap N$; und aus der Maximalität von T folgt weiter $\{V, T, t\} = U$. Also wird $U = \{W, t\} \leq R \leq U$; und wir haben gezeigt, daß W eine maximale Untergruppe von U ist. Da $U \cap N$ nicht in der maximalen Untergruppe W von U enthalten ist, so folgt aus H I, § 5, Theorem 3, (iv), daß W ein Normalteiler von U ist. Da U/W eine untergruppenfreie Gruppe ist, so ist U/W zyklisch von Primzahlordnung und also $[U,U] \leq W$. Dann erhalten wir aber den gesuchten Widerspruch

$$U = W[U,U] = W < U,$$

aus dem wir $U = V$ folgern. Damit haben wir gezeigt, daß (II) aus (I) folgt.

Als nächstes nehmen wir die Gültigkeit von (II) an. Ist U eine Untergruppe von N derart, daß $U/[U,U]$ endlich erzeugbar ist, so gibt es eine endlich erzeugbare Untergruppe V von U derart, daß $U = V[U,U]$ ist. Da aber $V(U \cap N) = VU = U$ ist, so folgt aus (II), daß $U = V$ eine endlich erzeugbare Gruppe ist. Betrachten wir weiter eine Untergruppe S von G und eine maximale Untergruppe T von S, die $S \cap N$ nicht enthält und deren Index $[S:T]$ endlich ist. Dann ist sicher $S = T(S \cap N)$. Da aber $T < S$ ist, so folgt aus (II), daß $[S, S]$ in T enthalten ist, da ja sonst $S = T[S, S]$ und also $T = S$ wäre. Daraus folgt $[S, S] \leq \Phi(N, S)$ für jede Untergruppe S von G; und aus § 3, Satz 2 ergibt sich weiter, daß N ein hyperzentraler Normalteiler von G ist. Also folgt (III) aus (II).

Wir nehmen schließlich die Gültigkeit von (III) an. Da N eine endlich erzeugbare, nilpotente Gruppe ist, so folgt aus § 2, Satz 2, daß

$N/N^{(n)}$ für jedes positive n eine obernilpotente Gruppe ist.

Weiter besitzt N eine eigentliche, aufsteigende FRATTINI-Kette U_σ mit $0 \leq \sigma \leq \gamma$. Da N eine hilpotente Gruppe ist, so gilt $[U, U] \leq \Phi^e(U)$ für jede Untergruppe U von N [§ 3, Satz 2]. Da die U_σ eine FRATTINI-Kette von N bilden, so gilt also

$$[U_{\sigma+1}, U_{\sigma+1}] \leq \Phi^e(U_{\sigma+1}) \leq U_\sigma < U_{\sigma+1} \text{ für jedes } \sigma < \gamma.$$

Es gibt eine natürliche Zahl n und eine vorgängerlose Ordinalzahl τ derart, daß $\gamma = \tau + n$ ist. Aus der eben erwiesenen Kommutativität von $U_{\sigma+1}/U_\sigma$ folgt sofort $N^{(n)} \leq U_\tau$.

Aus $N^{(n)} \leq U_\tau$ folgt $N^{(n+1)} \leq [U_\tau, U_\tau]$. Wir haben vorher gezeigt, daß $N/N^{(n+1)}$ eine obernilpotente Gruppe ist. Da N endlich erzeugbar ist, so folgt aus Satz B, daß die Maximalbedingung von den Untergruppen von $N/N^{(n+1)}$ erfüllt wird. Also ist insbesondere $U_\tau/N^{(n+1)}$ endlich erzeugbar; und hieraus folgt wegen $N^{(n+1)} \leq [U_\tau, U_\tau]$ auch die endliche Erzeugbarkeit von $U_\tau/[U_\tau, U_\tau]$. Da U_τ eine Untergruppe von N ist, ergibt sich aus (III) sogar die endliche Erzeugbarkeit von U_τ. Dann kann aber U_τ unmöglich sich als Vereinigungsmenge einer aufsteigenden Folge echter Untergruppen darstellen lassen. Nun bilden die U_σ eine eigentliche Normalkette und τ ist eine Ordinalzahl ohne Vorgänger. Da τ keine Limeszahl sein kann, so folgt $\tau = 0$, $U_\tau = 1$ und also auch $N^{(n)} = 1$. Damit ist aber gezeigt, daß

$N = N/N^{(n)}$ eine obernilpotente Gruppe ist.

Wir erinnern wieder daran, daß die Maximalbedingung von den Untergruppen der endlich erzeugbaren, obernilpotenten Gruppe N erfüllt wird [Satz B]. Sei nun M ein Normalteiler von G und $M < N$. Dann ist $1 \neq Z(N/M)$ eine charakteristische Untergruppe von N/M und also ein Normalteiler von G/M. Weiter ist $Z(N/M)$ eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe; und es folgt aus § 2, Lemma 2 [oder aus H I, § 1, Lemma 4], daß $Z(N/M)$ ein von 1 verschiedener, in N/M enthaltener, lokal fast voll reduzibler Normalteiler von G/M ist. Dann ist aber N selbst ein lokal fast voll reduzibler Normalteiler von G. Da aber N [nach III] ein hyperzentraler Normalteiler von G ist, so folgt aus Satz C, daß N ein oberhyperzentraler Normalteiler von G ist, q.e.d.

Definition 2. $\Phi_0^e(G) = G$, $\Phi_{i+1}^e(G) = \Phi^e[\Phi_i^e(G)]$.

Es ist klar, daß diese Untergruppen $\Phi_i^e(G)$ eine absteigende Folge charakteristischer Untergruppen bilden.

Folgerung 1. *Der endlich erzeugbare Normalteiler N von G ist dann und nur dann ein oberhyperzentraler Normalteiler von G, wenn N ein hyperzentraler Normalteiler von G und $\Phi_k^e(N) = 1$ für hinreichend großes k gilt.*

Beweis. Ist A eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe, so ist A^p für jede Primzahl p Durchschnitt von Untergruppen von A, deren Index genau p ist, und die also maximale Untergruppen von endlichem Index sind. Also wird $\Phi^e(A) = \bigcap_p A^p$; und aus der endlichen Erzeugbarkeit der abelschen Gruppe A folgt nun leicht, daß $\Phi^e(A)$ eine endliche Gruppe ist. Daraus folgt weiter:

(4) *Ist A eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe, so ist $\Phi_m^e(A)=1$ für hinreichend großes m.*

Ist N ein endlich erzeugbarer oberhyperzentraler Normalteiler von G, so ist N ein hyperzentraler Normalteiler von G; und N ist eine obernilpotente Gruppe. Aus der endlichen Erzeugbarkeit von N folgt die Gültigkeit der Maximalbedingung für die Untergruppen von N. Dann existiert aber eine ganze Zahl n derart, daß $N^{(n)}=1$ ist; s. etwa § 2, Satz 2. Aus der endlichen Erzeugbarkeit aller Untergruppen U von N und (4) folgern wir weiter:

Ist U eine Untergruppe von N, so gibt es eine ganze Zahl $m=m(U)$ derart, daß $\Phi_m^e(U/[U,U])=1$ ist und also auch

$$\Phi_m^e(U)\leq[U,U]$$

gilt.

Durch eine einfache Induktion folgert man nun aus $N^{(n)}=1$ die Existenz einer ganzen Zahl k derart, daß $\Phi_k^e(N)=1$ ist; und damit ist die Notwendigkeit unserer Bedingungen erwiesen.

Ist umgekehrt N ein hyperzentraler Normalteiler von G und $\Phi_k^e(N)=1$ für hinreichend großes endliches k, so besitzt N gewiß eine aufsteigende FRATTINI-Kette. Aus § 3, Satz 2 folgern wir mühelos, daß $N^{(k)}\leq\Phi_k^e(N)=1$ ist. Aus der Hyperzentralität folgt die Nilpotenz. Also ergibt § 2, Satz 2, daß N eine obernilpotente Gruppe ist. Da N endlich erzeugbar ist, so gilt die Maximalbedingung für Untergruppen von N. Damit haben wir aber gezeigt, daß die Bedingung (III) des Hauptsatz 2 von N erfüllt wird. Also ist N ein oberhyperzentraler Normalteiler von G, q.e.d.

Bemerkung 1. Wie in § 2, Bemerkung 3 sieht man die Unentbehrlichkeit der Voraussetzung ein, daß N endlich erzeugbar ist.

Folgerung 2. *Die folgenden Eigenschaften des endlich erzeugbaren Normalteilers N von G sind miteinander äquivalent:*

(I) *N ist ein oberhyperzentraler Normalteiler von G.*

(II) *Wenn U eine N enthaltende Untergruppe von G und U/N obernilpotent ist, dann ist auch U obernilpotent.*

(III) *Für jedes g in G ist $\{N,g\}$ obernilpotent.*

(IV) *$\Phi_k^e(N)=1$ für hinreichend großes k und $\{n,g\}$ ist für jedes n in N und jedes g in G nilpotent.*

(V) *N besitzt eine aufsteigende* FRATTINI-*Kette; die Untergruppe V von N ist [dann und nur dann] endlich erzeugbar, wenn $V/[V,V]$ endlich erzeugbar ist; $\{n,g\}$ ist für jedes n in N und jedes g in G nilpotent.*

Beweis. Ist N ein oberhyperzentraler Normalteiler von G, U eine N enthaltende Untergruppe von G und U/N obernilpotent, so ist N ein oberhyperzentraler Normalteiler von U [H I, § 2, Proposition 1] und also U obernilpotent [Satz A]. Mithin folgt (II) aus (I). Daß (III) aus (II) folgt, ergibt sich daraus, daß $\{N,g\}/N$ als zyklische Gruppe obernilpotent ist.

Wir nehmen weiter die Gültigkeit von (III) an. Ist dann n ein Element in N und g ein Element in G, so ist $\{n,g\}$ als Untergruppe der obernilpotenten

Gruppe $\{N, g\}$ selbst obernilpotent und also nilpotent [Satz C und H I, § 2, Proposition 1]. Weiter ist N obernilpotent; und folglich ist $\Phi_k^*(N) = 1$ für hinreichend großes k [Folgerung 1], N besitzt eine aufsteigende FRATTINI-Kette und jede Untergruppe der endlich erzeugbaren, obernilpotenten Gruppe N ist endlich erzeugbar [Satz B]. Damit haben wir gezeigt, daß sowohl (IV) wie auch (V) aus (III) folgt.

Wir haben anderwärts [H II, Satz 3] gezeigt, daß N dann und nur dann ein hyperzentraler Normalteiler von G ist, wenn $\{n, g\}$ für jedes n in N und jedes g in G nilpotent ist. Also folgt sowohl aus (IV) wie auch aus (V), daß N ein hyperzentraler Normalteiler von G ist. Nun ergibt sich aber aus Folgerung 1, daß (I) aus (IV) folgt, und aus Hauptsatz 2, daß (I) aus (V) folgt, q.e.d.

Bemerkung 2. Die vorausgesetzte endliche Erzeugbarkeit von N wurde nicht benutzt, um (II) aus (I) und (III) aus (II) herzuleiten; sie ist offenbar unentbehrlich für die Herleitung von (IV) und (V) aus (III). Daß sie aber auch unentbehrlich für die Herleitung von (I) aus (II) oder (III) ist, sieht man aus folgender allgemeiner

Konstruktion. Es sei Σ eine Gruppe von Automorphismen der abelschen Gruppe A mit folgenden Eigenschaften:

(a) Das einzige Fixelement der Gruppe Σ ist 1, d.h. aus $a = a^\Sigma$ folgt $a = 1$.

(b) Ist σ ein Automorphismus in Σ und U eine $U = U^\sigma < A$ erfüllende Untergruppe von A, so besitzt der von σ in A/U induzierte Automorphismus von 1 verschiedene Fixelemente.

Ein Beispiel eines solchen Paares A, Σ haben wir in BAER [1; p. 412, Example 3.4] angegeben. Dort sind A und Σ unendliche abelsche Gruppen, deren sämtliche von 1 verschiedene Elemente dieselbe Primzahlordnung p haben.

Es gibt einen Homomorphismus η einer freien Gruppe F auf die ganze Gruppe Σ; und es existiert ein Produkt $G = AF$ der Gruppen A und F mit der Eigenschaft:

$$f^{-1} a f = a^{f^\eta} \quad \text{für } a \text{ in } A \text{ und } f \text{ in } F;$$

es ist also G eine Erweiterung der abelschen Gruppe A durch die freie Gruppe F derart, daß das Element f aus F in A den Automorphismus f^η in Σ induziert.

Es folgt sofort aus (a), daß $A \cap Z(G) = 1$ ist; man könnte sogar $Z(G) = 1$ beweisen, da F gewiß nicht zyklisch und also eine nichtabelsche freie Gruppe ist. — Ist U eine A enthaltende Untergruppe von G und U/A obernilpotent, so ist U/A einer Untergruppe von $G/A \simeq F$ isomorph. Untergruppen freier Gruppen sind aber nach dem bekannten SCHREIERschen Satz selbst frei, so daß U/A eine freie, obernilpotente Gruppe ist. Da das Zentrum nichtabelscher freier Gruppen aber immer gleich 1 ist, so folgt, daß U/A eine zyklische Gruppe ist. Folglich existiert ein Element f in F derart, daß $U = \{A, f\}$ ist. Aus den in Bedingung (b) postulierten Eigenschaften des Automorphismus f^η in Σ und der Kommutativität von A folgert man ohne Mühe, daß A ein oberhyperzentraler Normalteiler von U ist. Da aber U/A zyklisch ist, so ergibt sich die

Obernilpotenz von U aus der von U/A. Damit haben wir gezeigt, daß der Normalteiler A der Gruppe B den Bedingungen (II) und (III) der Folgerung 2 genügt, ohne ein oberhyperzentraler Normalteiler von G zu sein.

5. Schwache Hyperzentralität.

Unsere Kriterien für Oberhyperzentralität haben sich bisher aus drei Bestandteilen zusammengesetzt: der Hyperzentralität, der endlichen Erzeugbarkeit und einer Kettenbedingung. Das Ziel dieses Abschnitts ist eine wesentliche Abschwächung der ersten dieser Bedingungen. Natürlich läßt sich dies nur bewerkstelligen, wenn wir die übrigen Bedingungen irgendwie verschärfen; und dies wird besonders die dritte Bedingung betreffen. Wir beginnen unsere Betrachtungen mit einer wichtigen Analyse der zweiten Bedingung.

Satz 1. *Die folgenden Eigenschaften des oberhyperzentralen Normalteilers N von G sind miteinander äquivalent:*

(I) *Die Gruppe N ist endlich erzeugbar.*

(II) *Die Maximalbedingung wird von den Untergruppen von N erfüllt.*

(III) *Die Maximalbedingung wird von den in N enthaltenen Normalteilern von G erfüllt.*

Beweis. Da endlich erzeugbare, obernilpotente Gruppen nach Satz B der Maximalbedingung genügen, folgt (II) aus (I); und (III) ist weiter nichts als eine Abschwächung von (II).

Gilt schließlich (III), so gibt es unter den endlich erzeugbaren, in N enthaltenen Normalteilern von G einen maximalen M, da ja 1 endlich erzeugbar ist. Wäre $M < N$, so folgte $1 \neq (N/M) \cap Z(G/M)$ aus der Oberhyperzentralität von N. Also enthält $(N/M) \cap Z(G/M)$ eine von 1 verschiedene, zyklische Untergruppe T/M; und T ist ein $M < T \leq N$ erfüllender, endlich erzeugbarer Normalteiler von G. Dies widerspricht aber der Maximalität von M. Folglich ist $N = M$ endlich erzeugbar, q.e.d.

Bemerkung 1. Es ist unmöglich, die Bedingung (III) weiter abzuschwächen, indem man etwa nur noch die Maximalbedingung für die charakteristischen Untergruppen von N fordert. Dies zeigt etwa das Beispiel der unendlichen $A^p = 1$ erfüllenden, abelschen Gruppen A.

Der Einführung der für unseren Hauptsatz benötigten Begriffsbildungen schicken wir noch eine auch an sich nicht uninteressante Hilfsbetrachtung voraus, die beim Beweis des Hauptsatzes benötigt werden wird.

Lemma 1. *Es seien M und N den Bedingungen $[G,N] \leq M \leq N$ genügende Normalteiler von G. Weiter seien a und b positive ganze Zahlen derart, daß $M^a = 1$ ist und N^b im Zentralisator von M liegt. Dann ist*

$$N^{ab} \leq Z(G).$$

Beweis. Ist t irgendein Element in N, so gehört $s = t^b$ dem Zentralisator von M an. Ist g irgendein Element in G, so liegt $c = g^{-1} s^{-1} g s$ in $[G,N] \leq M$.

Also gelten $c^a = 1$ und $s\,c = c\,s$. Aus $s^{-1}\,g\,s = g\,c$ folgern wir jetzt durch vollständige Induktion

$$s^{-i}\,g\,s^i = g\,c^i, \qquad g = g\,c^a = s^{-a}\,g\,s^a, \qquad t^{a\,b}\,g = g\,t^{a\,b},$$

so daß $t^{a\,b}$ in $Z(G)$ liegt und $N^{a\,b} \leq Z(G)$ ist, q.e.d.

Folgerung 1. *Wenn der endliche Normalteiler E von G in dem Normalteiler N von G enthalten ist, wenn $N/E \leq Z(G/E)$ und N/E keine Torsionsgruppe ist, dann ist $N \cap Z(G) \neq 1$.*

Beweis. Wir bezeichnen mit a die Ordnung der endlichen Gruppe E und mit b die Ordnung der [natürlich ebenfalls endlichen] Automorphismengruppe von E. Dann ist $E^a = 1$ und N^b liegt im Zentralisator von E. Nun folgt aus unseren Voraussetzungen und Lemma 1, daß

$$1 < N^{a\,b} \leq N \cap Z(G)$$

ist, q.e.d.

Das neuartige der in diesem Abschnitt auftretenden Bedingungen wird hauptsächlich darin bestehen, daß wir eine Gruppe Γ von Automorphismen der [umfassenden] Gruppe G auszeichnen werden und uns vorwiegend mit Γ-Untergruppen beschäftigen werden — die Untergruppe U von G ist eine Γ-Untergruppe, wenn $U = U^\Gamma$ ist.

Definition 1. *Ist Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G und N ein Γ-Normalteiler von G, so ist $\Delta(N, \Gamma)$ der Durchschnitt aller in N enthaltenen Γ-Normalteiler X von G mit endlicher und Γ-minimaler Faktorgruppe N/X.*

Hierbei besagt die Γ-Minimalität von N/X, daß $X < N$ ist und zwischen X und N kein von X und N verschiedener Γ-Normalteiler von G liegt.

Dann und nur dann ist $N = \Delta(N, \Gamma)$, wenn es keine Normalteiler X der oben beschriebenen Art gibt. — Es ist klar, daß $\Delta(N, \Gamma)$ stets ein in N enthaltener Γ-Normalteiler von G ist. — Ist schließlich $N \neq 1$, aber $\Delta(N, \Gamma) = 1$, so erhalten wir eine Verallgemeinerung des Begriffs der Fast-Voll-Reduzibilität [H II, Definition 3]. In Verallgemeinerung unserer Kriterien für lokale Fast-Voll-Reduzibilität beweisen wir nun folgendes

Lemma 2. *Wenn Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G und der Γ-Normalteiler $A \neq 1$ von G eine Minimaxgruppe ist, dann existiert ein $1 < B \leq A$ und $\Delta(B, \Gamma) = 1$ erfüllender Γ-Normalteiler B von G.*

Wir werden dies Kriterium nur anwenden, wenn A eine endlich erzeugbare, abelsche Gruppe ist.

Beweis. Man kann auf vielerlei Art eine Erweiterung H der Gruppe G derart konstruieren, daß die Gruppe der von Elementen aus H in G induzierten Automorphismen das Produkt von Γ und der Gruppe der inneren Automorphismen von G wird. Die Klasse der Γ-Normalteiler von G wird dann mit der Klasse der in G enthaltenen Normalteiler von H identisch. Es folgt aus § 2, Lemma 2, daß A ein lokal fast voll reduzibler Normalteiler von H ist; und hieraus folgt sofort unsere Behauptung.

Da Δ aus Γ-Normalteilern wieder Γ-Normalteiler macht, ist die folgende induktive Definition sinnvoll.

Definition 2. *Ist Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G und N ein Γ-Normalteiler von G, so ist*

$$\Delta_0(N,\Gamma)=N, \qquad \Delta_{i+1}(N,\Gamma)=\Delta[\Delta_i(N,\Gamma),\Gamma].$$

Zwecks Herleitung eines Kriteriums für das Verschwinden eines Δ_i beweisen wir zunächst das folgende

Lemma 3. *Wenn Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G ist und die Γ-Normalteiler N_i von G den Bedingungen*

$$N_n<\cdots<N_i<N_{i-1}<\cdots<N_0=N,$$

$$N_{i-1}/N_i \text{ ist ein endlicher, } \Gamma\text{-minimaler Normalteiler von } G/N_i$$

genügen, dann ist $\Delta_n(N,\Gamma)\leq N_n$.

Beweis. Wir zeigen durch vollständige Induktion, daß

$$\Delta_i(N,\Gamma)\leq N_i \quad \text{für} \quad i=0,\ldots,n$$

gilt. Dies ist sicher für $i=0$ wahr. Sei also für ein $0<i\leq n$ erfüllendes i bereits

$$\Delta_{i-1}(N,\Gamma)\leq N_{i-1}$$

gezeigt. Dann gilt

$$N_i\leq N_i\Delta_{i-1}\leq N_{i-1};$$

und es folgt aus der Γ-Minimalität von N_{i-1}/N_i, daß $N_i\Delta_{i-1}$ gleich N_i oder N_{i-1} ist. Im ersten Falle gilt $\Delta_i\leq\Delta_{i-1}\leq N_i$; und im zweiten Falle folgt aus den Isomorphiesätzen, daß $\Delta_{i-1}/[N_i\cap\Delta_{i-1}]$ ebenso wie $N_{i-1}/N_i=N_i\Delta_{i-1}/N_i$ ein endlicher, Γ-minimaler Normalteiler und also $\Delta_i\leq N_i\cap\Delta_{i-1}\leq N_i$ ist. Damit ist die Induktion vollendet und unsere Behauptung bewiesen.

Aus Lemma 3 folgt sofort, daß $\Delta_k(E,\Gamma)=1$ für hinreichend großes k gilt, wenn nur E ein endlicher Γ-Normalteiler ist. Tiefer als diese wichtige Bemerkung liegt die

Folgerung 2. *Ist Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G und N ein endlich erzeugbarer, obernilpotenter Γ-Normalteiler von G, so ist $\Delta_k(N,\Gamma)=1$ für hinreichend großes k.*

Beweis. Aus § 1, Hauptsatz 1 folgern wir zunächst die Existenz einer positiven ganzen Zahl k mit folgender Eigenschaft:

1 ist der Durchschnitt aller charakteristischen Untergruppen X von N derart, daß $[N:X]$ eine Primzahlpotenz p^x mit $x\leq k$ ist.

Nun ist aber jedes derartige X als charakteristische Untergruppe des Γ-Normalteilers N von G selbst ein Γ-Normalteiler von G; und zwischen X und N kann man höchstens k-gliedrige Ketten von Γ-Normalteilern einschließen. Also gilt [nach Lemma 3] $\Delta_k(N,\Gamma)\leq X$ für jedes derartige X. Da der Durchschnitt dieser X gleich 1 ist, ist also auch $\Delta_k(N,\Gamma)=1$, q.e.d.

Definition 3. *Ist Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G, so ist schwach Γ-hyperzentral jeder der folgenden Bedingung genügende Γ-Normalteiler N von G:*

(E) *Ist M ein in N enthaltener Γ-Normalteiler von G und N/M endlich, so ist N/M ein hyperzentraler Normalteiler von G/M.*

Ist insbesondere $N=G$, so reduziert sich (E) auf die Forderung, daß endliche Faktorgruppen nach Γ-Normalteilern nilpotent sind. — Nach Satz C folgt aus der Hyperzentralität des endlichen Normalteilers N/M sogar dessen Oberhyperzentralität. Die Frage, wann endliche Normalteiler hyperzentral sind, soll in §§ 6, 7 erörtert werden.

Die obige Definition bringt die uns interessierende Abschwächung der Hyperzentralitätsforderung. Wir können nun unser Hauptresultat, das eine weitgehende Verallgemeinerung von H I, § 8, Theorem darstellt, formulieren und beweisen.

Hauptsatz 3. *Ist Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G, so ist der Γ-Normalteiler N von G dann und nur dann ein endlich erzeugbarer, oberhyperzentraler Normalteiler von G, wenn*

(a) *N ein schwach Γ-hyperzentraler Normalteiler von G ist,*

(b) *die Maximalbedingung von den Normalteilern von N erfüllt wird,*

(c) *es zu jedem $M<N$ erfüllenden Γ-Normalteiler M von G einen Γ-Normalteiler T von G/M mit folgenden Eigenschaften gibt:*

$$1<T\leq N/M,\quad \Phi^{\varepsilon}(T)=1,$$

ist S ein Normalteiler von T mit endlichem Index $[T:S]$, so ist $\Delta_n(T,\Gamma)\leq S$ für hinreichend großes n.

Beweis. Wir nehmen zuerst an, daß N ein endlich erzeugbarer, oberhyperzentraler Normalteiler von G ist. Dann ist N auch hyperzentral und die Bedingung (a) ist ja nur eine abgeschwächte Form dieser Eigenschaft. Da N auch eine endlich erzeugbare, obernilpotente Gruppe ist, so wird die Maximalbedingung von den Untergruppen von N erfüllt [Satz B]; und hieraus folgt insbesondere (b). Ist weiter M ein $M<N$ erfüllender Γ-Normalteiler von G, so folgt $1\neq(N/M)\cap Z(G/M)=S$ aus der Oberhyperzentralität von N; und S ist eine endlich erzeugbare, abelsche Gruppe, da ja in N die Maximalbedingung gilt. Da das Zentrum eine charakteristische Untergruppe ist, so ist S ein Γ-Normalteiler von G/M. Aus $S\neq 1$ und Lemma 2 folgern wir nun die Existenz eines $1<T\leq S$ und $\Delta(T,\Gamma)=1$ erfüllenden Γ-Normalteilers T von G/M. Ist X ein in T enthaltener Γ-Normalteiler von G/M derart, daß $T/X\neq 1$, endlich und Γ-minimal ist, so ist sicher auch $\Phi^{\varepsilon}(T/X)=1$. Da aber der Durchschnitt dieser X gleich 1 ist, so ist auch $\Phi^{\varepsilon}(T)=1$; und damit ist die Notwendigkeit von (c) erwiesen.

Wir nehmen umgekehrt die Gültigkeit der Bedingungen (a), (b), (c) an. Aus (b) folgen sofort die beiden schwächeren Bedingungen:

(b.1) *Die Maximalbedingung wird von den in N enthaltenen Γ-Normalteilern von G erfüllt.*

(b.2) *Die Maximalbedingung wird von den Normalteilern einer jeden obernilpotenten Γ-Faktorgruppe von N erfüllt.*

Wir werden bei unserem Beweis nur diese beiden schwächeren Bedingungen (b.1) und (b.2) benutzen, nicht aber (b). Auch die Bedingung (b.2) werden wir nur an einer Stelle in ihrer vollen Schärfe anwenden; sonst werden wir nur die folgende schwächere Bedingung benutzen:

(b.2*) *Ist M ein in N enthaltener Γ-Normalteiler von G und N/M ein oberhyperzentraler Normalteiler von G/M, so wird die Maximalbedingung von den in N/M enthaltenen Normalteilern von G/M erfüllt.*

Wir wollen jetzt zeigen, daß aus (a), (b.1), (b.2) und (c) die Oberhyperzentralität und die endliche Erzeugbarkeit von N folgen. Wäre nämlich N kein oberhyperzentraler Normalteiler von G, so folgerten wir aus (b.1) die Existenz eines maximalen, in N enthaltenen Γ-Normalteilers M von G derart, daß N/M kein oberhyperzentraler Normalteiler von G/M ist. Wir setzen $N^* = N/M$ und $G^* = G/M$. Dann ist N^* ein Γ-Normalteiler von G^*. Wir leiten einige Eigenschaften von N^* her.

(1) N^* ist kein oberhyperzentraler Normalteiler von G^*:

Dies folgt aus der Wahl von M.

(2) N^* ist unendlich.

Dies folgt aus (1) und (a), da nach Satz C endliche hyperzentrale Normalteiler oberhyperzentral sind.

(3) Ist W ein von 1 verschiedener, in N^* enthaltener Γ-Normalteiler von G^*, so ist N^*/W ein oberhyperzentraler Normalteiler von G^*/W und die Maximalbedingung wird von den Untergruppen von N^*/W erfüllt.

Die erste Behauptung folgt aus der Maximalität von M, während wir die zweite aus (b.2*) und Satz 1 erschließen können.

(4) $N^* \cap Z(G^*) = 1$.

Da das Zentrum eine charakteristische Untergruppe ist, so ist $N^* \cap Z(G^*)$ ein in N^* enthaltener Γ-Normalteiler von G^*; und (4) folgt also aus (1), (3) und Satz A.

(5) Ist E ein in N^* enthaltener, endlicher Γ-Normalteiler von G^*, so ist $E = 1$.

Wäre nämlich $E \neq 1$, so folgte aus (3), daß N^*/E ein oberhyperzentraler Normalteiler ist, dessen Untergruppen sämtlich endlich erzeugbar sind. Dann folgt aus Satz D, daß die Gesamtheit der Elemente endlicher Ordnung in N^*/E eine endliche Gruppe P/E bildet. Da P/E eine charakteristische Untergruppe von N^*/E ist, so ist P ein Γ-Normalteiler von G^*. Es ist klar, daß P endlich ist; und es folgt aus (2), daß N^*/P eine unendliche, torsionsfreie Gruppe ist. Da mit N^*/E auch N^*/P ein oberhyperzentraler Normalteiler ist [Satz A], so ist $(N^*/P) \cap Z(G^*/P)$ eine unendliche torsionsfreie abelsche Gruppe, die natürlich auch ein Γ-Normalteiler von G^*/P ist. Direkte Anwendung von Folgerung 1 ergibt $N^* \cap Z(G^*) \neq 1$ im Widerspruch zu (4). Also ist $E = 1$ und (5) bewiesen.

(6) Ist W ein von 1 verschiedener, in N^* enthaltener Γ-Normalteiler von G^*, so ist $1 < [G^*, W] \leq \Delta(W, \Gamma) \leq W$.

Wäre $[G^*, W] = 1$, so wäre $1 < W \leq N^* \cap Z(G^*)$ im Widerspruch zu (4). Also ist $1 \neq [G^*, W]$. Weiter sei X ein in W enthaltener Γ-Normalteiler mit Γ-minimaler und endlicher Faktorgruppe W/X. Wäre $X = 1$, so wäre $W \neq 1$, aber endlich, was (5) widerspricht. Also ist $X \neq 1$; und es folgt aus (3), daß N^*/X ein oberhyperzentraler Normalteiler von G^*/X ist. Es folgt aus Satz A, daß dann auch W/X ein oberhyperzentraler Normalteiler von G^*/X ist. Folglich ist $1 \neq (W/X) \cap Z(G^*/X)$. Da das Zentrum eine charakteristische Untergruppe ist, so ist $(W/X) \cap Z(G^*/X)$ ein Γ-Normalteiler von G^*/X; und es folgt aus der Γ-Minimalität von W/X, daß $W/X = (W/X) \cap Z(G^*/X)$ ist. Also ist $W/X \leq Z(G^*/X)$; und dies ist mit $[G^*, W] \leq X$ gleichbedeutend. Da aber Δ der Durchschnitt all dieser X ist [Definition 1], so gilt auch $[G^*, W] \leq \Delta(W, \Gamma)$.

(7) Ist W ein von 1 verschiedener, in N^* enthaltener Γ-Normalteiler von G^*, so gilt $1 \neq \Delta_n(W, \Gamma)$ für jedes n.

Dies folgt ohne weiteres durch vollständige Induktion aus (6).

Bisher haben wir noch keinen Gebrauch von Bedingung (c) gemacht. Aus $N^* \neq 1$ und (c) folgern wir jetzt die Existenz eines Γ-Normalteilers T von G^* mit folgenden Eigenschaften:

(8) $1 < T \leq N^*$, $\Phi^\Gamma(T) = 1$;

ist S ein Normalteiler von T und T/S endlich, so gilt $\Delta_n(T, \Gamma) \leq S$ für hinreichend großes n.

Aus der letzten dieser Eigenschaften ergibt sich wegen (7), daß

(8′) jeder Normalteiler S von T mit endlichem Index $[T:S]$ einen von 1 verschiedenen Γ-Normalteiler von G^* enthält.

Wir müssen als nächstes die Struktur von T untersuchen.

(9) T ist eine unendliche abelsche Gruppe und $1 = \bigcap_p T^p$ [wo p alle Primzahlen durchläuft].

Die Unendlichkeit des Γ-Normalteilers $T \neq 1$ folgt aus (5). Sei nun U eine maximale Untergruppe von T mit endlichem Index $[T:U]$. Dann existieren nur endlich viele zu U in T konjugierte Untergruppen, deren Durchschnitt U' ein Normalteiler von T ist, dessen Index $[T:U']$ nach einem bekannten Satze von POINCARÉ ebenfalls endlich ist. Aus (8′) folgern wir nun die Existenz eines von 1 verschiedenen, in U' und also in U enthaltenen Γ-Normalteilers U'' von G^*. Da T/U'' wegen (3) ein oberhyperzentraler Normalteiler von G^*/U'' ist, da $1 < U'' \leq U < T \leq N^*$ ist, und da aus der Oberhyperzentralität ja [nach Satz C] die Hyperzentralität folgt, so ergibt sich aus § 3, Satz 2, daß

$$[T/U'', T/U''] \leq \Phi^\Gamma(T/U'') \leq U/U''$$

ist. Dann ist aber auch $[T, T] \leq U < T$, so daß U ein Normalteiler von T mit Primzahlindex $[T:U]$ ist.

Aus dem eben gezeigten und (8) folgt nun zunächst

$$[T, T] \leq \Phi^*(T) = 1,$$

so daß also T eine abelsche Gruppe ist. Da aber, wie schon bemerkt, alle maximalen Untergruppen von T Primzahlindex haben, so enthält jede maximale Untergruppe von T ein gewisses T^p [p Primzahl]. Also wird wegen (8)

$$\bigcap_p T^p \leq \Phi^*(T) = 1,$$

womit (9) vollständig bewiesen ist.

(10) T ist torsionsfrei.

Aus (9) folgern wir zunächst, daß die Ordnungen von Elementen endlicher Ordnung in T sämtlich quadratfrei sind. Ist p irgendeine Primzahl, so sei $T(p)$ die Gesamtheit der $x^p = 1$ erfüllenden Elemente x in T. Da T abelsch ist, so ist jedes $T(p)$ eine charakteristische Untergruppe von T und also ein Γ-Normalteiler von G^*. Aus der Quadratfreiheit der Ordnungen von Elementen endlicher Ordnung in T folgt, daß die Torsionsuntergruppe E von T das [direkte] Produkt aller $T(p)$ ist; insbesondere ist E das direkte Produkt von $T(p)$ und $T'(p)$, wo wir unter $T'(p)$ das Produkt aller $T(q)$ mit $q \neq p$ verstehen wollen.

Wäre (10) falsch, so gäbe es eine Primzahl p mit $T(p) \neq 1$. Wegen (3) ist dann $N^*/T(p)$ ein oberhyperzentraler Normalteiler von $G^*/T(p)$ und alle Untergruppen von $N^*/T(p)$ sind endlich erzeugbar. Also ist insbesondere $E/T(p)$ endlich erzeugbar. Aus der Isomorphie von $E/T(p)$ und $T'(p)$ folgt dann die endliche Erzeugbarkeit der abelschen Torsionsgruppe $T'(p)$, die dann sogar endlich ist. Da $T'(p)$ ein in T und also in N^* enthaltener Γ-Normalteiler von G^* ist, so folgt $T'(p) = 1$ aus (5). Mithin ist $E = T(p)$ und $E^p = 1$.

Wäre $E \neq T$, so würde aus $E^p = 1$ folgen, daß T^p eine unendliche torsionsfreie abelsche Gruppe ist. Als charakteristische Untergruppe von T ist T^p ein von 1 verschiedener, in N^* enthaltener Γ-Normalteiler von G^*; und es folgt aus (3), daß jede Untergruppe von N^*/T^p endlich erzeugbar ist. Also ist insbesondere $T^p T(p)/T^p$ endlich erzeugbar. Da aber $T^p \cap T(p) = 1$ ist, so ist $T(p)$ selbst endlich erzeugbar. Als abelsche Torsionsgruppe ist dann der Γ-Normalteiler $T(p) \neq 1$ von G^* endlich; und dies widerspricht (5) [und $T(p) \leq N^*$]. Also ist $E = T$ und $T^p = 1$.

Als nächstes wollen wir zeigen, daß T ein hyperzentraler Normalteiler von G^* ist. Um dies zu tun, betrachten wir eine Untergruppe U von G^* und einen Normalteiler V von U mit endlicher Faktorgruppe U/V. Wir müssen beweisen, daß $(U \cap T)V/V$ ein [im üblichen Sinne] hyperzentraler Normalteiler der endlichen Gruppe U/V ist. Da T eine $T^p = 1$ erfüllende abelsche Gruppe ist, so ist jede Untergruppe von T direkter Faktor von T. Es existiert also eine Untergruppe H von T [die weder ein Normalteiler noch eine Γ-Untergruppe von G^* zu sein braucht] derart, daß T das direkte Produkt von H und $U \cap T$ ist, d.h.

$$T = H(U \cap T), \quad 1 = H \cap U \cap T = H \cap U.$$

Setzen wir $S = H(V \cap T)$, so wird nach dem DEDEKINDschen Modulsatz

$$T/S = (U \cap T)H/(V \cap T)\,H \simeq (U \cap T)/[U \cap T \cap H\,(V \cap T)]$$
$$= (U \cap T)/(U \cap T \cap H)\,(V \cap T)$$
$$= (U \cap T)/(V \cap T) \simeq$$
$$\simeq (U \cap T)\,V/V \lesssim U/V\,.$$

Aus der Endlichkeit von U/V folgt nun die Endlichkeit von T/S. Anwendung von (8′) ergibt jetzt die Existenz eines in S enthaltenen, von 1 verschiedenen Γ-Normalteilers L von G^*. Aus (3) folgt, daß N^*/L ein oberhyperzentraler Normalteiler von G^*/L ist; und wegen Satz A und C ist dann T/L ein hyperzentraler Normalteiler von G^*/L. Aus

$$UL/VL \simeq U/(U \cap VL) \simeq [U/V]/[(U \cap VL)/V]$$

folgt die Endlichkeit von UL/VL; und aus der Hyperzentralität von T/L ergibt sich nun, daß $(T \cap UL)\,VL/VL$ ein [im üblichen Sinne] hyperzentraler Normalteiler von UL/VL ist.

Da aber wegen $U \cap H = 1$ aus dem DEDEKINDschen Modulsatz

$$U \cap VL = V(U \cap L) = V(U \cap S \cap L) = V\,[U \cap H(T \cap V) \cap L]$$
$$= V\,[(U \cap H)\,(T \cap V) \cap L] = V\,[T \cap V \cap L] = V$$

folgt, so erhalten wir den natürlichen Isomorphismus von UL/VL auf U/V, indem wir den Durchschnitt einer beliebigen Restklasse von UL/VL mit U bilden. Da weiter

$$(T \cap UL)\,VL \cap U = TVL \cap UL \cap U = TV \cap U = (T \cap U)\,V$$

ist, so geht bei diesem natürlichen Isomorphismus der hyperzentrale Normalteiler $(T \cap UL)\,VL/VL$ von UL/VL in den hyperzentralen Normalteiler $(T \cap U)\,V/V$ von U/V über. Damit ist gezeigt, daß T ein hyperzentraler Normalteiler von G^* ist.

Aus $T \neq 1$ folgt wegen (3), daß N^*/T ein oberhyperzentraler Normalteiler ist, von dessen Untergruppen die Maximalbedingung erfüllt wird. Insbesondere ist also N^*/T eine endlich erzeugbare, obernilpotente Gruppe. Wegen Satz C ist N^*/T nilpotent und N^* ist also eine Erweiterung des hyperzentralen Normalteilers T durch die nilpotente Gruppe N^*/T. Aus H II, Satz 1 folgt dann die Nilpotenz von N^*. Also ist die nilpotente Gruppe N^* Erweiterung eines abelschen Normalteilers T durch eine endlich erzeugbare, obernilpotente Gruppe N^*/T. Es folgt aus § 2, Satz 1, daß N^* selbst obernilpotent ist. Wir wenden Bedingung (b.2) an und sehen, daß die Maximalbedingung von den Untergruppen von N^* erfüllt wird [Satz B]. Also ist T eine endlich erzeugbare, abelsche Torsionsgruppe. Mithin ist $T \neq 1$ ein endlicher, in N^* enthaltener Γ-Normalteiler von G^* im Widerspruch zu (5). Damit hat uns unsere Annahme, daß (10) falsch sei, zu einem Widerspruch geführt und (10) ist bewiesen.

(11) Ist R ein von 1 verschiedener, in T enthaltener Γ-Normalteiler von G^*, so existiert ein von 1 verschiedener, in R enthaltener Γ-Normalteiler R' von G^* derart, daß R/R' eine unendliche freie abelsche Gruppe ist.

Als Untergruppe der wegen (10) torsionsfreien abelschen Gruppe T ist R selbst eine torsionsfreie abelsche Gruppe. Aus $R^{\mathfrak{p}} \leq T^{\mathfrak{p}}$ und (9) folgt weiter

$$1 = \bigcap_{\mathfrak{p}} R^{\mathfrak{p}}.$$

Da R ein von 1 verschiedener, torsionsfreier Γ-Normalteiler von G^* ist, so ist auch die charakteristische Untergruppe $R^{\mathfrak{p}}$ von R ein von 1 verschiedener Γ-Normalteiler von G^*. Es folgt aus (3), daß alle Untergruppen von $N^*/R^{\mathfrak{p}}$ endlich erzeugbar sind. Also ist $R/R^{\mathfrak{p}}$ eine endlich erzeugbare, abelsche Gruppe und als solche ist

(11.a) $R/R^{\mathfrak{p}}$ endlich.

Aus (11.a) folgt zunächst, daß der Durchschnitt endlich vieler $R^{\mathfrak{p}}$ endlichen Index in R hat. Da R unendlich und der Durchschnitt aller $R^{\mathfrak{p}}$ gleich 1 ist, so folgt:

(11.b) Es gibt unendlich viele Primzahlen $\mathfrak{p}$ derart, daß $R^{\mathfrak{p}} < R$ ist.

Aus (6) folgt, daß $1 < [G^*, R] \leq \Delta(R, \Gamma)$ ist; und aus (3) folgern wir, daß $R/[G^*, R]$ eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe ist, da ja $[G^*, R]$ gewiß ein Γ-Normalteiler ist. Ist $\mathfrak{p}$ eine der unendlich vielen Primzahlen derart, daß $R^{\mathfrak{p}} < R$ ist, so folgt aus der Endlichkeit von $R/R^{\mathfrak{p}}$ [nach (11.a)] die Existenz eines maximalen, zwischen $R^{\mathfrak{p}}$ und R gelegenen Γ-Normalteilers $R(\mathfrak{p})$ von G^*. Dann ist aber $R/R(\mathfrak{p})$ ein endlicher und Γ-minimaler Normalteiler von $G^*/R(\mathfrak{p})$, so daß $\Delta(R, \Gamma) \leq R(\mathfrak{p}) < R$ ist. Da aber $[R : R(\mathfrak{p})]$ endlich und durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist, so ergibt sich aus (11.b), daß es unendlich viele Primzahlen $\mathfrak{p}$ derart gibt, daß $R/[G^*, R]$ Untergruppen vom Index $\mathfrak{p}$ besitzt. Also ist die endlich erzeugbare, abelsche Gruppe $R/[G^*, R]$ sicher unendlich. Ist $R'/[G^*, R]$ die Torsionsuntergruppe der endlich erzeugbaren, abelschen Gruppe $R/[G^*, R]$, so ist $R'/[G^*, R]$ endlich und R/R' eine unendliche freie abelsche Gruppe endlichen Ranges. Weiter ist es nach der Konstruktion von R' klar, daß R' ein Γ-Normalteiler von G^* ist. Damit ist (11) vollständig bewiesen.

Aus (11) ergibt sich durch vollständige Induktion die folgende Tatsache:

(12) Ist k eine positive ganze Zahl, so existiert ein in T enthaltener Γ-Normalteiler T_k von G^* derart, daß T/T_k eine freie abelsche Gruppe ist, deren Rang k übersteigt.

Aus (12) folgern wir zunächst die Existenz eines direkten Faktors von T, der eine freie abelsche Gruppe von einem k übersteigenden Range ist [der aber kein Γ-Normalteiler von G^* zu sein braucht]. Daraus ergibt sich weiter, daß die Ordnung von $T/T^{\mathfrak{p}}$ größer als $\mathfrak{p}^k$ ist; und da dies für jedes k gilt, so haben wir sogar die Unendlichkeit von $T/T^{\mathfrak{p}}$ gezeigt. Dies widerspricht aber dem Hilfssatz (11.a), den wir ja auch auf $R = T$ anwenden können. Unsere Annahme, daß N kein oberhyperzentraler Normalteiler von G sei, hat uns also zu einem Widerspruch geführt. Folglich ist N ein oberhyperzentraler Normalteiler von G, dessen endliche Erzeugbarkeit sich unmittelbar aus (b.2*) und Satz 1 ergibt, q.e.d.

Die folgende interessante Eigenschaft endlich erzeugbarer Gruppen benötigen wir für die Herleitung einer Folgerung aus unserem Hauptsatz 3.

Lemma 4. *Endlich erzeugbare Gruppen besitzen nur endlich viele Normalteiler von beschränktem Index.*

Beweis. Es sei G eine endlich erzeugbare Gruppe und n eine positive ganze Zahl. Dann existiert ein endliches Erzeugendensystem E von G; und E enthalte k Elemente. Weiter seien m verschiedene Normalteiler $N(1), \ldots, N(m)$ von G derart gegeben, daß

$$[G : N(i)] \leq n \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, m$$

gilt. Dann wollen wir zeigen, daß

$$(+) \qquad m \leq (n!)^k$$

ist, woraus natürlich die Behauptung des Lemma 4 sich als Spezialfall ergibt.

Zum Beweise bezeichnen wir mit $S = S_n$ die symmetrische Gruppe vom Grade n. Da die Ordnung der Faktorgruppe $G/N(i)$ höchstens n ist, so existiert ein Isomorphismus $\sigma(i)$ von $G/N(i)$ in die Gruppe S. Unter $\gamma(i)$ wollen wir den natürlichen Homomorphismus von G auf $G/N(i)$ verstehen; und schließlich setzen wir $\nu(i) = \gamma(i)\,\sigma(i)$. Dann ist $\nu(i)$ ein Homomorphismus von G in die Gruppe S, dessen Kern genau der Normalteiler $N(i)$ ist, da ja $\sigma(i)$ ein Isomorphismus ist. Da die Normalteiler $N(i)$ paarweise verschieden sind, so sind auch die Homomorphismen $\nu(i)$ paarweise verschieden.

Jeder der Homomorphismen $\nu(i)$ induziert eine eindeutige Abbildung von E in die Gruppe S. Da E aus k und S aus $n!$ Elementen besteht, so gibt es höchstens $(n!)^k$ verschiedene eindeutige Abbildungen von E in die Gruppe S. Da aber zwei Homomorphismen von G in die Gruppe S dann und nur dann identisch sind, wenn sie auf dem Erzeugendensystem E übereinstimmen, so gibt es auch höchstens $(n!)^k$ verschiedene Homomorphismen von G in die Gruppe S. Da die m Homomorphismen $\nu(i)$ paarweise verschieden sind, so gibt es also m verschiedene Homomorphismen von G in S; und daraus folgt die zu beweisende Ungleichung $(+)$, q.e.d.

Folgerung 3. *Untergruppen von endlichem Index von endlich erzeugbaren Gruppen enthalten charakteristische Untergruppen von endlichem Index.*

Beweis. Es sei U eine Untergruppe der endlich erzeugbaren Gruppe G und $[G:U]$ endlich. Dann existieren nur endlich viele zu U konjugierte Untergruppen von G, deren Durchschnitt U' ein Normalteiler von G ist. Es folgt aus einem wohlbekannten Satz von POINCARÉ, daß $[G:U']$ endlich ist, da ja U' der Durchschnitt endlich vieler Untergruppen vom endlichen Index $[G:U]$ ist. Es folgt aus Lemma 4, daß es nur endlich viele Normalteiler von G gibt, deren Index $[G:U']$ nicht überschreitet. Der Durchschnitt U'' all dieser Normalteiler ist offenbar eine in U' und in U enthaltene charakteristische Untergruppe von G, deren Index endlich ist, da U'' ja der Durchschnitt endlich vieler Normalteiler von endlichem Index ist, q.e.d.

Lemma 4 und Folgerung 3 enthalten auch die schärfere Aussage, daß es in einer endlich erzeugbaren Gruppe nur endlich viele Untergruppen mit n nicht überschreitendem Index gibt.

Zusatz 1. *Wenn Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G ist, so sind die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend dafür, daß der Γ-Normalteiler N von G ein endlich erzeugbarer, oberhyperzentraler Normalteiler von G ist:*

(A) *N ist ein schwach Γ-hyperzentraler Normalteiler von G.*

(B) *Die Maximalbedingung wird von den in N enthaltenen Γ-Normalteilern von G erfüllt.*

(C) *Zu jedem $M < N$ erfüllenden Γ-Normalteiler M von G gibt es einen endlich erzeugbaren, $1 < T \leq N/M$ und $\Phi^{\Gamma}(T) = 1$ erfüllenden Γ-Normalteiler T von G/M.*

Beweis. Die Bedingung (A) ist mit (a) von Hauptsatz 3 identisch und also notwendig. Aus Satz 1 folgt die Gültigkeit der Maximalbedingung für die Untergruppen endlich erzeugbarer, hyperzentraler Normalteiler. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit von (B) und in Verbindung mit (c) von Hauptsatz 3 auch die von (C).

Wir nehmen umgekehrt die Gültigkeit der Bedingungen (A), (B), (C) an. Wäre N nicht endlich erzeugbar, so existierte nach (B) ein maximaler Γ-Normalteiler W von G derart, daß $W \leq N$ und N/W nicht endlich erzeugbar ist. Aus der zweiten Eigenschaft folgt dann $W < N$; und nun erschließen wir aus (C) die Existenz eines endlich erzeugbaren, $1 < V \leq N/W$ erfüllenden Γ-Normalteilers V von G/W. Es existiert ein eindeutig bestimmter Γ-Normalteiler V' von G derart, daß $W < V'$ und $V = V'/W$ ist. Aus der Maximalität von W folgt die endliche Erzeugbarkeit von N/V'. Da N/V' und V'/W also beide endlich erzeugbar sind, so ist auch N/W endlich erzeugbar im Widerspruch zu unserer Wahl von W. Damit haben wir aber die endliche Erzeugbarkeit von N dargetan.

Unsere Bedingung (A) ist mit der Bedingung (a) des Hauptsatz 3 identisch, während unsere Bedingung (B) mit der im Beweis des Hauptsatz 3 benutzten Bedingung (b.1) identisch ist. Aus der endlichen Erzeugbarkeit von N und Satz 1 folgt die Gültigkeit der Maximalbedingung in einer jeden obernilpotenten Faktorgruppe von N; und hieraus folgt auch die Bedingung (b.2). Um schließlich die Gültigkeit der Bedingung (c) des Hauptsatz 3 nachzuweisen, betrachten wir einen $M < N$ erfüllenden Γ-Normalteiler M von G. Nach (C) existiert ein endlich erzeugbarer Γ-Normalteiler T von G/M mit den folgenden Eigenschaften:

$$1 < T \leq N/M \quad \text{und} \quad \Phi^{\Gamma}(T) = 1.$$

Ist S ein Normalteiler von T mit endlichem Index $[T:S]$, so folgt aus der endlichen Erzeugbarkeit von T und Folgerung 3 die Existenz einer in S enthaltenen, charakteristischen Untergruppe R von T mit endlichem Index $[T:R]$. Natürlich ist R auch ein Γ-Normalteiler von G/M. Aus der Endlichkeit von T/R und Lemma 3 folgt die Existenz einer ganzen Zahl n derart, daß

$$\Delta_n(T, \Gamma) \leq R \leq S$$

ist; und damit haben wir gezeigt, daß T den Forderungen von (c) genügt. Also gelten die Bedingungen (a), (b), (c) des Hauptsatz 3, so daß N ein endlich erzeugbarer, oberhyperzentraler Normalteiler von G ist.

Zusatz 2. *Wenn Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G ist, so sind die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend dafür, daß der Γ-Normalteiler N von G ein endlich erzeugbarer, oberhyperzentraler Normalteiler von G ist:*

(α) *N ist ein schwach Γ-hyperzentraler Normalteiler von G.*

(β) *Jeder in N enthaltene Γ-Normalteiler von G ist endlich erzeugbar.*

(γ) *$N^{(n)}=1$ für hinreichend großes n.*

Beweis. Die Bedingung (α) ist mit den vorhergehenden Bedingungen (a) und (A) identisch und also notwendig. Weiter folgt aus Satz 1, daß alle Untergruppen eines endlich erzeugbaren, oberhyperzentralen Normalteilers endlich erzeugbar sind; und dies zeigt die Notwendigkeit von (β). Die Notwendigkeit von (γ) kann man etwa aus § 2, Satz 2 erschließen.

Wir setzen umgekehrt die Gültigkeit von (α), (β), (γ) voraus. Die Bedingung (A) des Zusatz 1 ist mit unserer Bedingung (α) identisch; und (B) folgert man ohne Mühe aus (β). Um die Gültigkeit von (C) zu erweisen, betrachten wir einen $M<N$ erfüllenden Γ-Normalteiler M von G. Aus (γ) folgt $[N/M]^{(n)}=1$. Daraus folgt sofort die Existenz eines $1<A\leq N/M$ erfüllenden, abelschen Γ-Normalteilers A von G/M, der wegen (β) endlich erzeugbar ist. Dann erschließen wir aber aus Lemma 2 die Existenz eines $1<T\leq A\leq N/M$ und $\Delta(T,\Gamma)=1$ erfüllenden Γ-Normalteilers T von G/M. Aus (β) folgt die endliche Erzeugbarkeit von T und aus der Δ-Einfachheit folgt $\Phi^{\Gamma}(T)=1$ [da ja endliche Γ-minimale Normalteiler notwendig Φ-einfach sind]. Also genügt T den Anforderungen von (C); und es folgt aus Zusatz 1, daß N ein endlich erzeugbarer, oberhyperzentraler Normalteiler von G ist.

Bemerkung 3. Dieser Zusatz 2 ist besonders dadurch von Interesse, daß die Bedingungen (β) und (γ) sicher dann erfüllt sind, wenn N eine endlich erzeugbare, obernilpotente Gruppe ist [Satz 1 und § 2, Satz 2].

Zusatz 3. *Wenn Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G ist, so sind die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend dafür, daß der Γ-Normalteiler N von G ein endlich erzeugbarer, oberhyperzentraler Normalteiler von G ist:*

(1) *N ist ein schwach Γ-hyperzentraler Normalteiler von G.*

(2) *Die Maximalbedingung wird von den in N enthaltenen Normalteilern von G erfüllt.*

(3) *Zu jedem $M<N$ erfüllenden Γ-Normalteiler M von G existiert ein $1<T\leq N/M$ und $\Delta(T,\Gamma)=1$ erfüllender Γ-Normalteiler T von G/M.*

Man kann den Beweis dieses dritten Zusatz anscheinend nicht durch Reduktion auf den Hauptsatz 3 oder die Zusätze 1 und 2 führen; doch läßt sich der Beweis des Hauptsatz 3 leicht so umformen [tatsächlich vereinfachen, da man nur die Hilfssätze (1) bis (6) benötigt], daß ein Beweis dieses Zusatz entsteht.

Nilpotenz der Φ-Gruppe. Die vorhergehenden Überlegungen gestatten es, in dieser Hinsicht zu allerlei Resultaten zu gelangen. Sei nämlich N ein in $\Phi^{\Gamma}(G)$ enthaltener Normalteiler der Gruppe G. Dann bezeichnen wir mit $\Gamma=\Gamma(G;N)$ die Gruppe aller von Elementen aus G in N induzierten

Automorphismen. Anwendung von §3, Satz 1 ergibt unter anderem folgendes Resultat:

(s) Ist M ein Γ-Normalteiler von N mit endlichem Index $[N:M]$, so ist N/M eine endliche nilpotente Gruppe.

In der Terminologie von Definition 3 besagt dies, daß N *schwach Γ-nilpotent* ist. In Hauptsatz 3 ist also die Bedingung (a) in unserer Situation von selbst erfüllt; und entsprechendes gilt von den Zusätzen. In dieser Art ergeben sich aus Hauptsatz 3 und den Zusätzen eine Reihe von Kriterien dafür, daß N eine endlich erzeugbare, obernilpotente Gruppe ist. Diese Kriterien stellen Verallgemeinerungen eines Resultats von ITÔ [1] dar; ihre explizite Aufstellung sei dem Leser überlassen.

6. Endliche hyperzentrale Normalteiler.

Wir beginnen mit der Herleitung von Endlichkeitskriterien.

Lemma 1. *Es sei Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G derart, daß endliche Faktorgruppen von G nach Γ-zulässigen Normalteilern nilpotent sind. Weiter sei G durch endlich viele Elemente endlicher Ordnung erzeugbar. Ist dann N ein Γ-zulässiger Normalteiler von G und G/N endlich, so ist $G/[N,N]$ eine endliche, nilpotente Gruppe.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß $[N,N]$ als charakteristische Untergruppe des Γ-zulässigen Normalteilers N selbst ein Γ-zulässiger Normalteiler von G ist. Da G endlich erzeugbar und G/N endlich ist, so ist N endlich erzeugbar [H I, § 1, Finiteness Principle]. Also ist $N/[N,N]$ eine endlich erzeugbare, abelsche Gruppe. Mithin wird die Maximalbedingung von den Untergruppen von $N/[N,N]$ erfüllt; und da G/N endlich ist, so gilt die Maximalbedingung sogar in $G/[N,N]$. Da G/N nach Voraussetzung eine endliche nilpotente Gruppe ist, so ist G/N auflösbar und $G/[N,N]$ wenigstens schwach auflösbar. Aus unserer Voraussetzung folgt nun, daß $G/[N,N]$ die Bedingungen (α), (β), (γ) von §5, Zusatz 2 erfüllt. Folglich ist $G/[N,N]$ eine endlich erzeugbare, obernilpotente Gruppe. Da aber G sich durch endlichviele Elemente endlicher Ordnung erzeugen läßt, so folgt aus Satz D die Endlichkeit von $G/[N,N]$, (die auch die Nilpotenz von $G/[N,N]$ nach sich zieht), q.e.d.

Satz 1. *Dann und nur dann ist G eine endliche nilpotente Gruppe, wenn*

(a) *G von endlich vielen Elementen endlicher Ordnung erzeugt wird,*

(b) *G schwach auflösbar ist und*

(c) *endliche Faktorgruppen von G nach charakteristischen Untergruppen nilpotent sind.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen (a), (b), (c) ist trivial. Wir nehmen also umgekehrt die Gültigkeit der Bedingungen (a), (b), (c) an. Wählen wir in Lemma 1 für Γ die Gruppe aller Automorphismen von G, so ergibt sich durch eine naheliegende Induktion, daß

$G/G^{(n)}$ für jedes ganze n eine endliche nilpotente Gruppe ist.

Aus der schwachen Auflösbarkeit von G folgern wir die Existenz einer aufsteigenden Normalkette U_σ mit $0 \leq \sigma \leq \gamma$ von G, deren Faktoren abelsch

sind: $[U_{\sigma+1}, U_{\sigma+1}] \leq U_\sigma < U_{\sigma+1}$. Die Ordinalzahl γ hat die Form $\gamma = \tau + n$, wo τ eine Ordinalzahl ohne Vorgänger und n eine nichtnegative ganze Zahl ist. Dann ist sicher $G^{(n)} \leq U_\tau$. Aus der schon erwiesenen Endlichkeit von $G/G^{(n)}$ und der endlichen Erzeugbarkeit von G folgern wir zunächst die endliche Erzeugbarkeit von $G^{(n)}$ [H I, § 1, Finiteness Principle]. Da aber auch $U_\tau/G^{(n)}$ als Untergruppe von $G/G^{(n)}$ endlich ist, so ist sicherlich auch U_τ endlich erzeugbar. Dann kann aber die vorgängerlose Ordinalzahl τ keine Limeszahl sein, so daß $\tau = 0$, $U_\tau = 1$, $G^{(n)} = 1$ ist; und hieraus folgt nach dem schon bewiesenen die Endlichkeit von $G = G/G^{(n)}$, q.e.d.

Lemma 2. *Es sei Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G derart, daß endliche Faktorgruppen von G nach Γ-zulässigen Normalteilern nilpotent sind. Weiter sei G durch endlich viele Elemente endlicher Ordnung erzeugbar. Schließlich sei N ein Γ-zulässiger Normalteiler von G mit endlicher Faktorgruppe G/N. Dann ist $G/\Phi^e(N)$ eine endliche, nilpotente Gruppe.*

Beweis. Als charakteristische Untergruppe eines Γ-zulässigen Normalteilers ist $\Phi^e(N)$ selbst ein Γ-zulässiger Normalteiler von G. Sei U eine maximale Untergruppe von N mit endlichem Index $[N:U]$. Dann besitzt U nur endlich viele in N konjugierte Untergruppen, deren Durchschnitt V nach einem Satz von POINCARÉ ein Normalteiler von N mit endlichem Index $[N:V]$ ist. Da N endlich erzeugbar ist [H I, § 1, Finiteness Principle] und also nach § 5, Lemma 4 die Klasse der zu N/V isomorphen Faktorgruppen von N endlich ist, so ist der Durchschnitt W aller Normalteiler X von N mit $N/X \simeq N/V$ ein Γ-zulässiger Normalteiler von G, dessen Index $[N:W]$ endlich ist. Nach Voraussetzung ist dann aber die endliche Gruppe G/W nilpotent; und daraus folgt, daß U ein Normalteiler von N und also $[N,N] \leq U$ ist. Also ist sogar $[N,N] \leq \Phi^e(N)$; und nun folgt unsere Behauptung aus Lemma 1.

Satz 2. *Dann und nur dann ist G eine endliche nilpotente Gruppe, wenn*

(a) *G von endlich vielen Elementen endlicher Ordnung erzeugt wird,*

(b) *G eine aufsteigende* FRATTINI*-Kette besitzt,*

(c) *endliche Faktorgruppen von G nach charakteristischen Untergruppen nilpotent sind.*

Der Beweis von Satz 2 erfolgt durch Rückführung auf Lemma 2 in ganz ähnlicher Weise, wie Satz 1 auf Lemma 1 zurückgeführt wurde.

Bemerkung 1. Aus WIELANDTs Satz folgt, daß Bedingung (c) aus folgender Bedingung hergeleitet werden kann: $[G,G] \leq \Phi^e(G)$. Umgekehrt folgt (c) aus dieser Ungleichung, (a) und § 5, Lemma 4.

Satz 3. *Die folgenden Eigenschaften des endlichen Normalteilers N der Gruppe G sind miteinander äquivalent:*

(I) *N ist ein oberhyperzentraler Normalteiler von G.*

(II) *N ist ein hyperzentraler Normalteiler von G.*

(III) *$\{N, g\}$ ist für jedes g in G eine nilpotente Gruppe.*

(IV) *Für jedes g in G ist $[\{N, g\}, \{N, g\}] \leq \Phi^e(\{N, g\})$.*

Beweis. Wegen der Endlichkeit von N ist die Äquivalenz von (I) und (II) in Satz C enthalten, während die von (II) und (III) sich aus H II, Satz 3

ergibt. – Daß (IV) aus (III) folgt, kann man etwa aus § 3, Satz 2 erschließen. Gilt schließlich (IV), so bemerken wir zunächst, daß das Element g in G in N einen Automorphismus endlicher Ordnung a induziert. Dann ist aber g^a sowohl mit g wie auch mit jedem Element in N vertauschbar und liegt also in $Z(\{N, g\})$. Man überzeugt sich dann sofort, daß $H = \{N, g\}/Z(\{N, g\})$ eine endliche Gruppe ist. Weiter ist wegen (IV)

$$[H, H] \leq Z(\{N, g\}) \Phi^e(\{N, g\})/Z(\{N, g\}) \leq \Phi(H);$$

und nun folgt aus dem bekannten WIELANDTschen Satz, daß H eine endliche nilpotente Gruppe ist; s. etwa ZASSENHAUS [*1*; p. 108, Satz 13]. Dann ist aber auch $\{N, g\}$ selbst obernilpotent [Satz A]; und wir haben gezeigt, daß (III) aus (IV) folgt.

7. Zerfallende Erweiterungen.

Bekanntlich nennt man die Gruppe G eine *zerfallende* Erweiterung ihres Normalteilers N, wenn ein *Komplement* von N in G existiert, d.h. eine den Bedingungen $G = NK$, $1 = N \cap K$ genügende Untergruppe K von G. Über die Oberhyperzentralität der Kerne zerfallender Erweiterungen lassen sich einige Bemerkungen machen, die interessante Anwendungen gestatten.

Der Normalteiler N der Gruppe G heiße ein *M-Normalteiler* von G, wenn er folgender Bedingung genügt:

(M) *Wenn es in der Untergruppe U von G maximale Untergruppen gibt, die $N \cap U$ nicht enthalten, dann ist eine dieser maximalen Untergruppen ein Normalteiler von U.*

Da aber maximale Untergruppen, die Normalteiler sind, eine zyklische Faktorgruppe haben und also die Kommutatorgruppe enthalten, so folgt aus (M) die schwächere Eigenschaft:

(M′) *Wenn es in der Untergruppe U von G maximale Untergruppen gibt, die $N \cap U$ nicht enthalten, dann ist $N \cap U$ auch nicht in $[U, U]$ enthalten.*

Normalteiler mit dieser Eigenschaft (M′) werden wir auch als *M′-Normalteiler* bezeichnen. Daß oberhyperzentrale Normalteiler M-Normalteiler und also M'-Normalteiler sind, folgt etwa aus H I, § 5, Theorem 3, (iv).

Lemma 1. *Wenn G eine zerfallende Erweiterung des endlich erzeugbaren, abelschen M′-Normalteilers N ist, und wenn der Normalteiler $L \neq 1$ von G in N enthalten ist, dann ist $[L, G] < L$.*

Beweis. Da G eine zerfallende Erweiterung von N ist, so existiert eine Untergruppe K von G derart, daß $G = NK$ und $1 = N \cap K$ ist. Da der Normalteiler L von G in der abelschen Gruppe N enthalten ist, so ist $[L, L] = [L, N] = 1$. Folglich wird

$$[L, G] = [L, N][L, K] = [L, K] \leq [L, K][K, K] = [L, L][L, K][K, K] = [U, U],$$

wenn wir $U = LK$ setzen. Weiter ist sicher

$$L \cap K = L \cap N \cap K = 1 < L$$

und also

$$K < LK = U.$$

Da aber L als Untergruppe der endlich erzeugbaren, abelschen Gruppe N selbst endlich erzeugbar ist und die Maximalbedingung von den Untergruppen von L erfüllt wird, so existiert eine maximale, K enthaltende Untergruppe V von U. Da $V < U$ ist, kann L nicht in V enthalten sein. Aus dem DEDEKINDschen Modulsatz folgt, daß

$$N \cap U = N \cap LK = L(N \cap K) = L$$

ist und daß also $N \cap U$ nicht in der maximalen Untergruppe V von U enthalten ist. Da aber N ein M'-Normalteiler von G ist, so ist $N \cap U = L$ auch nicht in $[U,U]$ enthalten. Aus $[L,G] \leq [U,U]$ folgt also, daß L auch nicht in $[L,G]$ enthalten ist. Da L ein Normalteiler von G und also sicherlich $[L,G] \leq L$ ist, so ergibt sich schließlich die gewünschte Ungleichung $[L,G] < L$, q.e.d.

Bemerkung 1. Die Gruppe G werde von den Elementen a und b erzeugt, die den Relationen

$$a^3 = b^4 = 1, \quad b^{-1} a b = a^{-1}$$

genügen. Die Elemente a und b^2 erzeugen dann einen zyklischen Normalteiler N der Ordnung 6. Man kann sich leicht überzeugen, daß N ein M-Normalteiler von G ist, und daß G/N eine zyklische Gruppe der Ordnung 2 ist. Andererseits ist $[G,[G,N]] = [G,N] = \{a\}$; und wir sehen die Unentbehrlichkeit der Annahme, daß G eine zerfallende Erweiterung von N ist.

Folgerung 1. *Wenn G eine zerfallende Erweiterung des endlichen, abelschen M'-Normalteilers N von G ist, dann ist N ein oberhyperzentraler Normalteiler von G.*

Beweis. Wir definieren induktiv $N(0) = N$, $N(i+1) = [G,N(i)]$. Dann folgt aus Lemma 1 und der Endlichkeit von N, daß $N(k) = 1$ für hinreichend großes k gilt; und hieraus folgt sofort die Oberhyperzentralität von N; s. etwa H I, § 2, Proposition 2, (viii).

Folgerung 2. *Wenn N ein abelscher M'-Normalteiler von G ist, und wenn N eine p-Gruppe ist, deren Untergruppen der Minimalbedingung genügen, dann ist N ein oberhyperzentraler Normalteiler von G.*

Beweis. Wir wollen zunächst die folgende Eigenschaft verifizieren:

(a) Wenn x ein Element in N und y ein Element in G ist, dann gibt es eine positive ganze Zahl $m = m(x,y)$ derart, daß $x\, y^{p^m} = y^{p^m} x$ ist.

Wäre dies nicht wahr, so gäbe es ein Element w in N und ein Element g in G derart, daß $w\, g^{p^i} \neq g^{p^i} w$ für jedes positive i gilt. Sei p^k die Ordnung von w und K die Gesamtheit der $x^{p^k} = 1$ erfüllenden Elemente in N. Da N abelsch ist, so ist K eine charakteristische Untergruppe von N und also ein Normalteiler von G; und da in N die Minimalbedingung gilt, so ist K endlich. Also induziert g in K einen Automorphismus endlicher Ordnung $a\, p^b$ mit $0 \leq b$ und zu p teilerfremdem a. Wir setzen $h = g^{p^b}$. Dann induziert h einen Automorphismus der Ordnung a in K; und aus $w\, h \neq h\, w$ folgt $a \neq 1$. Unter den Elementen in G, die in K denselben Automorphismus wie h induzieren, gibt es entweder Elemente der Ordnung 0 oder Elemente, deren Ordnung zu p teilerfremd ist. Mithin existiert ein Element v in G derart, daß $N \cap \{v\} = 1$ ist und v in K einen Automorphismus der Ordnung a induziert. Wir bilden

$V = \{N, v\}$. Es ist klar, daß V eine zerfallende Erweiterung seines M'-Normalteilers N ist. Wir definieren induktiv: $K(0) = K$, $K(i+1) = [V, K(i)]$. Dann folgt aus Lemma 1, daß entweder $K(i) = 1$ oder $K(i+1) < K(i)$ ist, da ja die $K(i)$ offenbar Normalteiler von V sind. Aus der Endlichkeit von K folgt nun die Existenz einer ganzen Zahl j derart, daß $K(j) = 1$ ist; und nun folgern wir aus H I, § 2, Proposition 2, (viii), daß K ein oberhyperzentraler Normalteiler von V ist. Dann folgt aber aus H I, § 3, Lemma 2 die Existenz einer ganzen Zahl s derart, daß $x\, v^{p^s} = v^{p^s}\, x$ für jedes x in der endlichen Gruppe K gilt; und dies widerspricht der Tatsache, daß v in K einen Automorphismus mit zu p teilerfremder Ordnung $a \neq 1$ induziert. Unsere Annahme, daß (a) falsch ist, hat uns also zu einem Widerspruch geführt, womit (a) bewiesen ist.

Da N eine abelsche Gruppe ist, von deren Untergruppen die Minimalbedingung erfüllt wird, so ist N ein lokal fast voll reduzibler Normalteiler von G [wie man entweder direkt einsieht oder aus § 2, Lemma 2 folgert]. Dann folgt aber aus H I, § 5, Theorem 2, daß N ein oberhyperzentraler Normalteiler von G ist, q.e.d.

Folgerung 3. *Wenn der minimale Normalteiler N von G endlich erzeugbar ist und die Eigenschaft* (M′) *hat, dann ist $N \leq Z(G)$.*

Beweis. Da $N \neq 1$ endlich erzeugbar ist, so besitzt N eine maximale Untergruppe V. Wenden wir jetzt (M′) mit $U = N$ an, so ist ja $U \cap N = N$ sicher nicht in V enthalten; und also ist N auch nicht in $[N, N]$ enthalten. Also ist $[N, N] < N$. Da aber N eine Gruppe ohne echte charakteristische Untergruppen ist, so folgt $[N, N] = 1$. Mithin ist N eine von 1 verschiedene, endlich erzeugbare, abelsche Gruppe; und es existiert folglich eine Primzahl p derart, daß $N^p < N$ ist. Aus der Abwesenheit echter charakteristischer Untergruppen von N folgt $N^p = 1$, so daß N als endlich erzeugbare abelsche Gruppe sogar eine endliche p-Gruppe ist. Anwendung von Folgerung 2 ergibt die Oberhyperzentralität von N, so daß insbesondere $N \cap Z(G) \neq 1$ ist. Da aber $N \cap Z(G)$ ein Normalteiler von G und N ein minimaler Normalteiler von G ist, so folgt $N = N \cap Z(G)$ oder $N \leq Z(G)$, q.e.d.

Satz 1. *Der Normalteiler N von G ist dann und nur dann oberhyperzentral, wenn*

(a) *N ein lokal fast voll reduzibler Normalteiler von G ist und*

(b) *H/K ein M'-Normalteiler von G/K ist, falls H und K Normalteiler von G sind, die der Ungleichung $K < H \leq N$ genügen.*

Dies leitet man ohne große Mühe aus Folgerung 3 und H I, § 5, Theorem 3 her.

Literatur.

BAER, REINHOLD: [1] Nilpotent groups and their generalizations. Trans. Amer. Math. Soc. **47**, 393—434 (1940). — [2] The hypercenter of a group. Acta math., Stockh. **89**, 165—208 (1953); zitiert als H I. — [3] Das Hyperzentrum einer Gruppe. II. Arch. Math. **4**, 86—96 (1953); zitiert als H II. — ITÔ, NOBORU: [1] Note on S-groups. Proc. Imp. Jap. Soc. Sci. **1953**. — ZASSENHAUS, H.: [1] Lehrbuch der Gruppentheorie. Leipzig u. Berlin 1937.

University of Illinois, Urbana, Illinois (USA.).

(Eingegangen am 31. August 1953.)

STULOFF, N.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 339—355 (1954)

Ein Beitrag zur Theorie spezieller Dirichletscher Reihen.

Von
N. STULOFF.

Die klassische Frage nach einer erschöpfenden Charakteristik einer durch eine konvergente Reihe der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu s}, \qquad s = \sigma + it,$$

dargestellten Funktion, wobei

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \to \infty \tag{1}$$

eine *fest vorgegebene* Zahlenfolge ist, führte unter anderem zu der *Verallgemeinerung*, daß über die Exponentenmenge $\{\lambda_\nu\}$ nur deren Abzählbarkeit vorausgesetzt wird. Ferner wird diese Menge nicht mehr von vorneherein vorgegeben, sondern sie ist einer gegebenen *entwickelbaren* Funktion *zugeordnet* in dem Sinne, daß die Exponenten mittels eines bestimmten Kalküls aus der Funktion zu bestimmen sind[1]). Dieses und der Verzicht auf die Konvergenz einer solchen Reihe und die Hinzunahme der durch Exponentialpolynome gleichmäßig approximierbaren Funktionen zur betrachteten Funktionenklasse[1]) ergaben eine übersichtliche Eigenschaft: *Die Fastperiodizität* (H. BOHR). Man ist aber andererseits an das obige Problem auch dadurch herangetreten, daß man die Eigenschaften solcher Funktionen auf der reellen Achse studierte, wobei auch die soeben besprochenen Verallgemeinerungen Anwendung fanden[2]). Die vorliegende Mitteilung liefert nun zu diesem Fragenkreis einen Beitrag, der sich mit Reihen der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x}, \qquad a_\nu \geq 0, \quad x \geq 0, \quad \lambda_\nu > 0,$$

befaßt, die für $x \geq 0$ konvergieren, und wo an die Exponentenmenge $\{\lambda_\nu\}$ außer deren Abzählbarkeit noch weitere Forderungen gestellt werden [z. B. ist (1) eine solche]. Solche Reihen werden wir *spezielle* DIRICHLETsche *Reihen* nennen, im Gegensatz zu den *verallgemeinerten* DIRICHLETschen *Reihen*, bei denen diese Menge beliebig abzählbar ist. Das gewonnene Ergebnis wird sich

[1]) BOHR, H.: Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. Acta Math., Stockh. **47**, 237—281 (1926).

[2]) MÜNTZ, CH.: Über den Approximationssatz von WEIERSTRASS, Mathematische Abhandlungen (Schwarzes Festschrift), S. 303—312. Berlin 1914. — KALUZA, TH.: Entwickelbarkeit von Funktionen in DIRICHLETsche Reihen. Math. Z. **28**, 203—215 (1928). — SCHWARTZ, L.: Études des Sommes d'Exponentielles Réelles. Paris 1943. — STULOFF, N.: Über die Entwickelbarkeit von Funktionen in verallgemeinerte DIRICHLETsche Reihen. Math. Z. **53**, 273—284 (1950). — STULOFF, N.: Absolut konvergente verallgemeinerte DIRICHLETsche Reihen im Reellen. Math. Z. **54**, 329—338 (1951).

dann mittels einiger Abänderungen sowohl für den Fall einer *vorgegebenen* als auch für den der *zugeordneten* Menge $\{\lambda_\nu\}$ aussprechen lassen, und ferner wird man erkennen, daß es gerade die speziellen DIRICHLETschen Reihen sind, die dieses einfache Resultat liefern[3]), so daß hier im Reellen die Dinge umgekehrt zu liegen scheinen wie vorhin: *Die Spezialisierung führt hier zur Vereinfachung.*

Wenn im folgenden von einer Funktion die Rede sein wird, die den Bedingungen (α) genügt, so verstehen wir darunter eine für $x \geq 0$ definierte, für $x > 0$ beliebig oft differenzierbare Funktion $f(x)$, für die

$$(\alpha) \qquad (-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0 \quad \text{für} \quad x > 0 \quad \text{und} \quad n = 1, 2, \ldots,$$
$$f(0) = f(+0), \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0, \quad f(x) \not\equiv 0,$$

gilt; dies sind Eigenschaften, die man einer gegebenen Funktion unschwer ansehen kann. Die erste Forderung wird uns die Darstellbarkeit von $f(x)$ liefern als STIELTJESsches Momentenintegral, und es wird sich darum handeln, aus der Menge aller Momentenfunktionen diejenigen auszusondern, deren monoton wachsende Belegungsfunktion an jeder Stelle ihres Definitionsintervalles gleich der Summe der nicht rechts davon liegenden Sprünge (d.h. eine *Sprungfunktion*) ist. Es wird sich dann zeigen, daß dies bei der Voraussetzung von (1) (bzw. bei ähnlichen Voraussetzungen über $\{\lambda_\nu\}$) in einfacher Weise möglich ist. Die anderen Forderungen in (α) dienen nur der Bequemlichkeit.

In § 1 wird ein Satz bewiesen, der für die Theorie grundlegend ist und aus dem sich dann die Sätze des § 2 ganz einfach ergeben, die auf die soeben besprochenen verschiedenen Entwicklungsprobleme eingehen. Schließlich bringt § 3 ein Beispiel zu einem der zuvor bewiesenen Entwicklungssätze.

§ 1.

Wir beweisen jetzt einen Satz, bei dem über die Menge $\{\lambda_\nu\}$, zunächst etwas abweichend von (1), nur vorausgesetzt ist, daß diese im Inneren von $(0, \infty)$ keine Häufungspunkte besitzt (so daß also die 0 ein Häufungspunkt sein kann), da dies für den Beweisgang einfacher ist. Wir werden dann später wieder auf (1) zurückkommen. Die Exponenten werden bei dem folgenden Satz nicht vorgegeben, sondern sie sind, in dem in der Einleitung erwähnten Sinne, der Funktion auf Grund ihrer *Entwickelbarkeit* ebenso wie die Koeffizienten *zugeordnet.*

Satz 1. *Eine vorgelegte Funktion $f(x)$ möge den Bedingungen (α) genügen. Es gilt:*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x} \quad \textit{mit} \quad a_\nu \geq 0, \ \textstyle\sum a_\nu \ \textit{konvergent}, \quad \lambda_\nu > 0,$$
$$\{\lambda_\nu\} \ \textit{ohne Häufungspunkte im Inneren von } (0, \infty),$$

dann und nur dann, wenn es zu jeder reellen Zahl $0 < \Lambda < \infty$ zwei Zahlen $0 < \varkappa_1 < \Lambda$ und $\infty > \varkappa_2 > \Lambda$ gibt, derart, daß

$$(F) \qquad \liminf_{n \to \infty} \left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa}}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right) \leq C$$

[3]) Vgl. damit etwa das Ergebnis für verallgemeinerte DIRICHLETsche Reihen in dem in Fußnote 2 zitierten ersten Aufsatz des Verfassers.

ist für $\varkappa=\varkappa_1$ und $\varkappa=\varkappa_2$. Hierbei ist $0<C<\infty$ eine nur von der gegebenen Funktion abhängige Konstante.

Für das Folgende setzen wir zur Abkürzung

$$F\equiv F(f,\Lambda,\varkappa,n)\equiv\left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa}}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right)$$

und verstehen unter (F) die obige Beziehung.

Beweis. Die Notwendigkeit obiger Bedingungen können wir direkt zeigen, indem wir mit einer, durch die nicht identisch verschwindende Reihe definierten Funktion $f(x)$, die offenbar den Bedingungen (α) genügt, den ersichtlich nicht negativen Ausdruck F bilden. Es wird jetzt also, nach Wahl eines beliebigen positiven Λ,

$$F=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\left[\frac{\lambda_\nu}{\Lambda}\left(\frac{e^{-\lambda_\nu}}{e^{-\Lambda}}\right)^{1/\varkappa}\right]^n, \tag{2}$$

und wir wollen nun die Existenz der beiden Zahlen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ im Sinne der Behauptung zeigen. Wir nehmen zunächst an, es sei

$$\Lambda\notin\{\lambda_\nu\},$$

und zerlegen jetzt die uns mit der Reihe gegebene Menge $\{\lambda_\nu\}$ in

$$\{\lambda_\nu\}=\{\lambda'_\nu\}+\{\lambda''_\nu\} \tag{3}$$

derart, daß

$$\lambda'_\nu<\Lambda \quad\text{und}\quad \lambda''_\nu>\Lambda \tag{3a}$$

ist. Nach der über $\{\lambda_\nu\}$ gemachten Voraussetzung gibt es sicher zwei Zahlen Λ_l und Λ_r, so daß

$$\Lambda_l<\Lambda<\Lambda_r \tag{4}$$

ist und kein λ_ν sich in diesem Intervall befindet. Nun definieren wir eine Funktion $\Omega(u)$ für $0<u<\infty$ durch:

$$\Omega(u)=\frac{\lg\frac{u}{\Lambda}}{u-\Lambda}\quad\text{für}\quad u\neq\Lambda\qquad\text{und}\qquad\Omega(u)=\frac{1}{\Lambda}\quad\text{für}\quad u=\Lambda. \tag{5}$$

Diese ist, wie man leicht bestätigt, im ganzen Definitionsintervall positiv, monoton nach 0 *abnehmend* und es ist $\lim\limits_{u\to 0}\Omega(u)=\infty$. Wegen $\lim\limits_{u\to\Lambda}\Omega=1/\Lambda$ ist unsere Funktion auch überall stetig und bildet das Intervall (4) ab auf ein nicht leeres Intervall

$$\Omega(\Lambda_l)<\Omega<\Omega(\Lambda_r), \tag{6}$$

das wir mit I_Ω bezeichnen wollen, und in welchem der Funktionswert $\Omega(\Lambda)=1/\Lambda$ liegt. Nun wählen wir eine positive Zahl $\varkappa_1$ derart, daß die Größe $1/\varkappa_1$ sich ebenfalls in I_Ω befindet und ferner so, daß

$$\frac{1}{\varkappa_1}>\frac{1}{\Lambda}$$

wird. Es ist jetzt aber wegen der Monotonie von $\Omega(u)$ und mit (4) und (6)

$$\frac{1}{\varkappa_1} < \Omega(u) \quad \text{für alle} \quad u \leq \Lambda_l < \Lambda$$

und

$$\frac{1}{\varkappa_1} > \Omega(u) \quad \text{für alle} \quad u \geq \Lambda_r > \Lambda.$$

Damit und mit (3), (3a) und (5) erhalten wir die Beziehungen

$$\frac{\lg \frac{\lambda_\nu''}{\Lambda}}{\lambda_\nu'' - \Lambda} < \frac{1}{\varkappa_1} < \frac{\lg \frac{\lambda_\nu'}{\Lambda}}{\lambda_\nu' - \Lambda}, \tag{7}$$

woraus folgt, da ja

$$\lambda_\nu' - \Lambda < 0 \quad \text{und} \quad \lambda_\nu'' - \Lambda > 0$$

ist, daß

$$\frac{\lambda_\nu}{\Lambda}\left(\frac{e^{-\lambda_\nu}}{e^{-\Lambda}}\right)^{1/\varkappa_1} < 1 \tag{8}$$

wird für *alle* λ_ν.

Da nun nach Voraussetznng $a_\nu \geq 0$ und $\sum a_\nu$ konvergiert, so konvergiert wegen (8) die Reihe (2) gleichmäßig in n, und nach gliedweisem Grenzübergang folgt

$$\lim_{n \to \infty} F = 0 \tag{9}$$

für $\varkappa_1 < \Lambda$. Durch Annahme eines $\varkappa_2 > \Lambda$ mit

$$I_\Omega \ni \frac{1}{\varkappa_2} < \frac{1}{\Lambda}$$

folgt sodann nach derselben Schlußweise ebenfalls Gl. (9). Ist nun

$$\Lambda \in \{\lambda_\nu\},$$

etwa $\Lambda = \lambda_\sigma$, dann schreiben wir

$$F = a_\sigma + \sum_{\nu=1}^{\infty}{}' a_\nu \left[\frac{\lambda_\nu}{\Lambda}\left(\frac{e^{-\lambda_\nu}}{e^{-\Lambda}}\right)^{1/\varkappa}\right]^n, \tag{10}$$

wo unter $\sum'$ eine Summe zu verstehen ist, bei der das Glied $\nu = \sigma$ fehlt. Auf diese Summe können wir aber dieselben Betrachtungen wie vorhin anwenden, da es nun um λ_σ eine Umgebung gibt, in die keines der anderen λ_ν hineinfällt. Es ist demnach

$$\lim_{n \to \infty} F = a_\sigma > 0. \tag{11}$$

Da die a_ν beschränkt sind, folgt schließlich, daß es zu $f(x)$ eine Konstante $C > 0$ derart gibt, daß

$$\lim_{n \to \infty} F \leq C$$

ist, womit auch die Notwendigkeit bewiesen ist.

Um nun zu zeigen, daß eine Funktion, die den Forderungen des Satzes 1 genügt, gleich einer der dortigen DIRICHLETschen Reihe ist, benötigen wir für

die vorgelegte Funktion $f(x)$ die bereits in der Einleitung erwähnte Integraldarstellung. Dazu fassen wir einige Ergebnisse einer Arbeit von F. HAUSDORFF zusammen zu der folgenden, für uns geeigneten Form[4]):

Eine für $x \geq 0$ definierte und für $x > 0$ beliebig oft differenzierbare reelle Funktion $f(x)$ ist dann und nur dann gleich dem STIELTJESschen Momentenintegral,

$$f(x) = \int_0^1 u^x \, d\chi(u),$$

mit monoton wachsender, an den Endpunkten 0 und 1 stetiger, beschränkter und nicht identisch verschwindender Belegungsfunktion $\chi(u)$, wenn $f(x)$ den Forderungen (α) genügt. $\chi(u)$ ist umkehrbar eindeutig zugeordnet, wenn man die Normierungen

$$\chi(0) = 0 \quad \text{und} \quad \chi(u) = \chi(u + 0)$$

hinzunimmt.

Wir heben noch die bekannte Tatsache hervor, daß es für $\chi(u)$ eine Darstellung der Form

$$\chi(u) = \Phi(u) + \Psi(u)$$

gibt[5]), wo $\Phi(u)$ *stetig* und *monoton* ist in $0 \leq u \leq 1$ und $\Psi(u)$ eine *Sprungfunktion* ist, die durch Aufsummierung der Sprünge von $\chi(u)$, deren Menge ja höchstens abzählbar ist, entsteht und (in unserem Fall) stetig ist in $u = 0$ und in $u = 1$. Insbesondere sind dies zwei monoton wachsende und beschränkte Funktionen, auf die obige Normierungen sinngemäß anzuwenden sind.

Mithin können wir setzen

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x), \tag{12}$$

wo also

$$\varphi(x) = \int_0^1 u^x \, d\Phi(u) \qquad \text{und} \qquad \psi(x) = \int_0^1 u^x \, d\Psi(u) \tag{13}$$

zwei Funktionen sind, die ihrerseits (α) erfüllen (d.h. *total monoton* sind) und insbesondere also nicht negativ sind.

Mit einem beliebigen, fest gewählten $0 < \Lambda < \infty$ und dem dazu nach Voraussetzung vorhandenen

$$0 < \varkappa_1 < \Lambda \tag{14}$$

bilden wir jetzt den wegen (α) nicht negativen Ausdruck F der S. 341 und setzen sogleich für $f(x)$ die obige Darstellung (12). Dann lautet die Voraussetzung

$$\liminf_{n \to \infty} \left[\left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa_1}}{\Lambda} \right)^n \varphi^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa_1}\right) + \left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa_1}}{\Lambda} \right)^n \psi^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa_1}\right) \right] \leq C.$$

[4]) HAUSDORFF, F.: Summationsmethoden und Momentfolgen, I und II. Math. Z. 9, 74—109, 280—299 insbes. S. 95, 102—103, 286—287 (1921).

[5]) Vgl. HAUPT, O., u. G. AUMANN: Differential- und Integralrechnung, 2. Aufl., Bd. 1, S. 96. Berlin 1948.

Infolge der soeben erwähnten Eigenschaft (α) der beiden Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ist nun jeder der beiden Summanden in der eckigen Klammer stets nicht negativ, so daß auch

$$\lim_{n\to\infty} \inf \left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa_1}}{\Lambda} \right)^n \varphi^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa_1}\right) \leq C$$

ist. Setzen wir nun hier für $\varphi(x)$ die obige Integraldarstellung (13) ein, dann wird schließlich

$$(15) \qquad \lim_{n\to\infty} \inf \int_0^1 \left[-\frac{\lg u}{\Lambda} \left(\frac{u}{e^{-\Lambda}}\right)^{1/\varkappa_1} \right]^n d\Phi(u) \equiv \lim_{n\to\infty} \inf \int_0^1 [v(u)]^n \, d\Phi(u) \leq C,$$

wo wir zur Abkürzung den Ausdruck in der eckigen Klammer gleich $v(u)$ gesetzt haben. Offenbar ist $v(0) = 0$ und $v(1) = 0$, dazwischen hat $v(u)$ genau ein Maximum, das sich an der Stelle $u_M = e^{-\varkappa_1}$ ergibt und dessen Größe wir mit v_M bezeichnen wollen. Es ist ersichtlich $v(e^{-\Lambda}) = 1$ und mit $e^{-\Lambda} \neq e^{-\varkappa_1}$ folgt

$$(16) \qquad v_M = v(e^{-\varkappa_1}) > v(e^{-\Lambda}) = 1.$$

Es bezeichne u_1 die Stelle $e^{-\Lambda}$; aus Stetigkeitsgründen gibt es sicher noch genau eine zweite Stelle, u_2, wo $v(u) = 1$ ist und infolge (16) gibt es eine Umgebung von u_M, die ganz im Inneren von $[u_1, u_2]$ gelegen ist derart, daß dort $v(u) > 1$ ist.

Nun ist ja mit (14)

$$u_1 = e^{-\Lambda} < e^{-\varkappa_1} = u_M,$$

und wir können zwei positive Zahlen η_1 und η_2 so bestimmen, daß

$$(17) \qquad u_1 < \eta_1 < u_M < \eta_2 < u_2$$

ist. Es gibt also eine Zahl $V > 1$, so daß

$$(18) \qquad v(u) \geq V > 1 \quad \text{für} \quad \eta_1 \leq u \leq \eta_2$$

ist, also etwa $V = \min[v(\eta_1), v(\eta_2)]$; η_1 und η_2 werden wir später noch schärfer präzisieren. Wir können jetzt schreiben

$$\int_0^1 [v(u)]^n \, d\Phi(u) = \int_0^{\eta_1} [v(u)]^n \, d\Phi(u) + \int_{\eta_1}^{\eta_2} [v(u)]^n \, d\Phi(u) + \int_{\eta_2}^1 [v(u)]^n \, d\Phi(u)$$

$$\geq \int_{\eta_1}^{\eta_2} [v(u)]^n \, d\Phi(u) \geq V^n [\Phi(\eta_2) - \Phi(\eta_1)],$$

denn sämtliche Terme sind ja nicht negativ. Wenn nun n beliebig groß wird, dann strebt wegen (18), falls die eckige Klammer im letzten Ausdruck von 0 verschieden ist,

$$V^n [\Phi(\eta_2) - \Phi(\eta_1)] \to \infty.$$

Dies wäre aber ein Widerspruch zu (15), so daß also

$$\Phi(\eta_2) - \Phi(\eta_1) = 0$$

folgt. Da aber $\Phi(u)$ monoton nicht abnehmend ist und $\eta_2 \neq \eta_1$, so folgt daraus

$$\Phi(u) = \text{const.} \quad \text{für} \quad \eta_1 \leq u \leq \eta_2.$$

Sind $\varepsilon > 0$ und $0 < \delta < \varepsilon$ zwei noch weiter festzulegende Zahlen, dann wird, nachdem wir $u_1 + \varepsilon = u_\varepsilon$ und $u_1 + \delta = \eta$ gesetzt haben mit (17)

$$u_1 < \eta < u_\varepsilon < u_M < u_2,$$

wenn wir das $\varepsilon > 0$ klein genug wählen. Dabei war ja u_M eine Zahl, die mit der Angabe von $\varkappa_1$ festlag. Insbesondere können wir das η_1 aus (17) jetzt so wählen, daß $\eta_1 = \eta$ ist. Es liegt also der Funktionswert von $\Phi(u)$ an der Stelle u_ε im Inneren eines Konstanzintervalles. Da aber $\Phi(u)$ überall *stetig* ist und $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgegeben werden kann, so gehört der Funktionswert an der Stelle u_1 ebenfalls zu diesem Konstanzintervall.

Nun kann man aber diesen Gedankengang gemäß Voraussetzung für *jedes* $0 < \Lambda < \infty$ anstellen und damit für *jeden* Punkt $u = e^{-\Lambda}$ aus dem Inneren von $(0, 1)$ zeigen, daß an dieser Stelle sich der Anfangspunkt eines Konstanzintervalles von $\Phi(u)$ befindet. Greifen wir nun irgendeinen solchen Punkt u heraus, so können wir auf jeden Punkt aus dem Inneren des zu ihm nach obigem *gehörigen* Konstanzintervalles unser Ergebnis anwenden und somit dieses Intervall weiter nach rechts fortsetzen. Angenommen, es sei U die obere Grenze dieser Intervalle, die also zusammen ein Konstanzintervall ergeben, $u < U < 1$, dann gehört aber, wiederum wegen der Stetigkeit von $\Phi(u)$, der Funktionswert an der Stelle U ebenfalls zu diesem Intervall. Da aber nach obigem für U wieder derselbe Schluß gilt, so folgt, entgegen unserer Annahme, daß U nicht die obere Grenze der betrachteten Intervalle ist. Diese ist also bei 1 und gehört selbst ebenfalls zu dem bei u beginnenden Konstanzintervall. Da u ein beliebiger Punkt aus dem Inneren vom $(0, 1)$ war, so können wir nach Vorgabe eines beliebig kleinen $\varepsilon_1 > 0$ das u so wählen, daß $0 < u < \varepsilon_1$ ist. Wegen $\Phi(0) = 0$ und der Stetigkeit an den Rändern ergibt sich also

$$\Phi(u) = 0 \quad \text{in} \quad 0 \leq u \leq 1,$$

und damit aus (13)

$$\varphi(x) \equiv 0. \tag{19}$$

Kehren wir nun zu den Überlegungen der S. 343 zurück, so ist also zunächst mit (12) und (19)

$$f(x) = \psi(x), \tag{20}$$

und da wegen (α) $f(x) \not\equiv 0$, so ist

$$\psi(x) \not\equiv 0. \tag{21}$$

Es ist aber das STIELTJESsche Integral in (13),

$$\int_0^1 u^x \, d\Psi(u),$$

über eine Sprungfunktion im Sinne von S. 340 und 343 als Belegung, bekanntlich gleich der DIRICHLETschen Reihe, deren Koeffizienten $a_\nu > 0$ die Sprunggrößen von $\Psi(u)$ sind und deren Exponenten λ_ν sich aus den

Sprungstellen ϑ_ν, $0<\vartheta_\nu<1$, ergeben durch $\lambda_\nu=-\lg\vartheta_\nu$ [6]). Die Stetigkeit von $\Psi(u)$ an den beiden Rändern ist eine Folgerung aus den beiden letzten Bedingungen von (α) [7]). Wir haben somit aus (20)

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x}, \tag{22}$$

wo also $\{a_\nu\}$ und $\{\lambda_\nu\}$ zwei, wegen (21) nicht leere Mengen sind, die unserer Funktion durch (13) zugeordnet sind und von denen wir zunächst nur deren Abzählbarkeit wissen. Insbesondere ist wegen der Monotonie und der Beschränktheit von $\Psi(u)$

$$a_\nu \geq 0, \quad \sum a_\nu \text{ konvergent}, \quad 0<\lambda_\nu<\infty, \tag{23}$$

denn es ergibt sich aus der vorletzten Forderung von (α), daß $\lambda_\nu \neq 0$.

Unsere Reihe konvergiert für $x \geq 0$ und es bleibt noch zu zeigen, daß die Menge $\{\lambda_\nu\}$ keine Häufungspunkte im Inneren von $(0, \infty)$ besitzt. Das beweisen wir indirekt und nehmen an, Λ sei ein Häufungspunkt von links her (= linksseitiger Häufungspunkt), wobei es gleichgültig ist, ob er zur Menge gehört oder nicht. Sodann bilden wir den Ausdruck F unseres Satzes, indem wir für $f(x)$ das Ergebnis (22) einsetzen und erhalten (2). Der weitere Gedankengang geschieht nun in Anlehnung an S. 341 bis 342: Man bildet (5) die Funktion $\Omega(u)$ und kann jetzt aber zu jedem noch so nahe an Λ genommenen $\varkappa_1<\Lambda$ $\left(\text{d.h. also } \frac{1}{\varkappa_1}>\Omega(\Lambda)\right)$ ein λ_σ mit $\Lambda>\lambda_\sigma\in\{\lambda_\nu\}$ so angeben, daß $\frac{1}{\varkappa_1}>\Omega(\lambda_\sigma)>\Omega(\Lambda)$ wird. Es ist insbesondere also $\frac{\lg\frac{\lambda_\sigma}{\Lambda}}{\lambda_\sigma-\Lambda}<\frac{1}{\varkappa_1}$, woraus mit $\lambda_\sigma-\Lambda<0$ folgt, daß in (8) für $\nu=\sigma$ das $>$-Zeichen auftritt. Damit wird aber für *alle* $\varkappa_1$ mit $\varkappa_1<\Lambda$

$$\lim_{n\to\infty} F=\infty, \tag{24}$$

da ja sämtliche Glieder in (2) positiv sind. Dies steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung, es kann also Λ kein linksseitiger Häufungspunkt sein. Daß aber Λ kein Häufungspunkt von rechts (= rechtsseitiger Häufungspunkt) ist, zeigt man genau so, indem man jetzt von der Voraussetzung des $\varkappa_2>\Lambda$ Gebrauch macht. Damit ist der Beweis von Satz 1 vollendet.

§ 2.

Aus dem Satz 1 und dessen Beweis lassen sich nun in einfacher Weise weitere Sätze herleiten, die auf die in der Einleitung aufgeworfene Fragen eingehen, und die wir in diesem Paragraphen zusammenstellen wollen. Zunächst folgen zwei Sätze, die man aus dem Bisherigen fast unmittelbar ablesen kann und die für das hierauf Folgende vorbereitend sind.

[6]) Für den Fall, daß die Sprungstellen sich im Inneren von (0, 1) nicht häufen, folgt dies unmittelbar aus der Definitionsgleichung des STIELTJESschen Integrals. Im Falle einer beliebig abzählbaren Menge $\{\vartheta_\nu\}$ (die z. B. überall dicht sein kann) ist die Richtigkeit obiger Aussage vom Verf. in dem in Fußnote 3, S. 340 zitierten Aufsatz (daselbst S. 283) gezeigt worden.

[7]) Vgl. Fußnote 4, S. 343.

Satz 2. *Es sei $f(x)$ in eine* DIRICHLETsche *Reihe im Sinne von Satz 1 entwickelbar. Dann ist*

$$\Lambda \notin \{\lambda_\nu\} \quad (\text{bzw. } \Lambda \in \{\lambda_\nu\})$$

dann und nur dann, wenn es um Λ eine Umgebung $\mathfrak{U}$ gibt, derart, daß

$$\liminf_{n\to\infty}\left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa}}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right) = 0 \quad (\text{bzw. } = a_\nu,\ 0 < a_\nu \leq C)$$

ist für alle $\varkappa \in \mathfrak{U}$.

Beweis. Wir folgen den Gedankengängen der S. 341 bis 342. Die Notwendigkeit ergibt sich daraus, daß nach Annahme von $\Lambda \notin \{\lambda_\nu\}$ (bzw. von $\Lambda \in \{\lambda_\nu\}$) das durch (6) definierte Intervall I_Ω die Umgebung $\mathfrak{U}$ unseres Satzes liefert, denn aus den dortigen Ausführungen ist ersichtlich, daß jedes $\frac{1}{\varkappa} \in I_\Omega$ zu den Gln. (9) [bzw. (11)] führt. Auch das Umgekehrte ergibt sich sofort, denn aus der obigen Limesbeziehung folgt (9) [bzw. (11)]. Dies kann aber nur dann eintreten, wenn $\Lambda \notin \{\lambda_\nu\}$ (bzw. wenn $\Lambda \in \{\lambda_\nu\}$) ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Aus dem hinreichenden Teil des Beweises von Satz 1 (insbesondere S. 343 bis 346) ist ohne weiteres ersichtlich, daß man, um zu dem Ergebnis (22) zu gelangen, *nur $\varkappa_1 < \Lambda$ oder nur $\varkappa_2 > \Lambda$* vorauszusetzen braucht. Wir wollen dies zusammenfassen zu

Satz 3. *Gilt für eine Funktion $f(x)$, die den Bedingungen (α) genügt,*

$$\lim_{n\to\infty} \inf\left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa}}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right) \leq C$$

für jedes $0 < \Lambda < \infty$ und dazu einem $\varkappa < \Lambda$ (bzw. einem $\varkappa > \Lambda$), dann ist

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x} \tag{22}$$

mit

$$a_\nu \geq 0, \qquad \sum a_\nu \text{ konvergent}, \qquad 0 < \lambda_\nu < \infty. \tag{23}$$

Wir bemerken noch, daß der Satz 1 den Fall enthält, bei dem die Folge der λ_ν nicht abbricht, wohl aber ein größtes λ_N vorhanden ist. Um nun zu der eingangs besprochenen Exponentialbedingung (1) wieder zurückzukehren, sei daran erinnert, daß eine Anordnung (1) der Exponentenmenge des Satzes 1 dann und nur dann getroffen werden kann, wenn die Folge (λ_ν) nicht abbricht und wenn es darunter einen *kleinsten* Exponenten λ_1 gibt. Wir beweisen jetzt aber einen allgemeineren Satz, der zugleich den Fall eines *größten* Exponenten einschließt.

Satz 4. *Eine gegebene Funktion $f(x)$ möge die Bedingungen des Satzes 1 erfüllen. Innerhalb der damit vorhandenen Menge $\{\lambda_\nu\}$ gibt es dann und nur dann ein kleinstes $\lambda_1 > 0$ (bzw. ein größtes $\lambda_N < \infty$), wenn eine Zahl $\infty > \Lambda_m > 0$ (bzw. eine Zahl $0 < \Lambda_M < \infty$) derart vorhanden ist, daß*

$$\lim_{n\to\infty} \inf\left(-\frac{e}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\Lambda}\right) = 0$$

ist für alle $0 < \Lambda < \Lambda_m$ (bzw. für alle $\Lambda_M < \Lambda < \infty$).

Beweis. Besitzt eine Reihe einen kleinsten (bzw. einen größten) Exponenten λ_1 (bzw. λ_N), dann wählen wir irgendein Λ_m (bzw. Λ_M) mit $0<\Lambda_m<\lambda_1$ (bzw. mit $\lambda_N<\Lambda_M<\infty$). Aus Satz 2 folgt jetzt für *jedes* Λ mit $0<\Lambda<\Lambda_m$ (bzw. mit $\Lambda_M<\Lambda<\infty$), für welches also insbesondere $\Lambda\notin\{\lambda_\nu\}$ ist, das Behauptete, nachdem man noch $\varkappa=\Lambda$ gesetzt hat. Das Umgekehrte zeigen wir indirekt: Wäre 0 (bzw. ∞) ein Häufungspunkt, dann könnte man zu jedem $0<\Lambda_m$ (bzw. $\Lambda_M<\infty$) ein $\lambda_\sigma\in\{\lambda_\nu\}$ mit $0<\lambda_\sigma<\Lambda_m$ (bzw. mit $\Lambda_M<\lambda_\sigma<\infty$) angeben, so daß in (2) das Glied mit $\nu=\sigma$ gleich $a_\sigma>0$ wäre. Dies würde, insbesondere für $\varkappa=\Lambda$, ergeben $\lim\limits_{n\to\infty} F>0$, und damit einen Widerspruch zur Voraussetzung.

Dieser Satz besagt z. B., daß eine Funktion $f(x)$ dann und nur dann gleich einem Exponentialpolynom ist, wenn es beide Zahlen Λ_m und Λ_M im Sinne dieses Satzes gibt. Die Exponenten einer DIRICHLET-Entwicklung einer Funktion lassen sich dann und nur dann gemäß (1) anordnen, wenn Λ_m, nicht aber Λ_M vorhanden ist.

Nun wollen wir einen Satz formulieren, der Auskunft darüber gibt, wie man zu einer, gemäß Satz 1 *entwickelbaren* Funktion die ihr *zugeordneten* Koeffizienten- und Exponentenmenge erhält.

Satz 5[8]). *Erfüllt eine vorgegebene Funktion $f(x)$ die Bedingungen des Satzes 1 (d.h. sie ist entwickelbar), dann ist*

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{e}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\Lambda}\right)=\begin{cases}0, & \text{wenn } \Lambda\notin\{\lambda_\nu\}\\ a_\nu>0, & \text{wenn } \Lambda\in\{\lambda_\nu\}.\end{cases}$$

Beweis. Da die Funktion eine DIRICHLETsche Reihe im Sinne des Satzes 1 ist, existiert der Limes und es ergibt sich die Behauptung aus Satz 2 mit $\varkappa=\Lambda$.

Die $\{\lambda_\nu\}$ ergeben sich also aus diesem Satz als diejenigen Werte von Λ, für die obiger Ausdruck von 0 verschieden ist, der dann selbst gleich dem zugehörigen Koeffizienten ist. Hier anknüpfend beweisen wir jetzt einen Satz über den größten Koeffizienten einer DIRICHLET-Entwicklung.

Satz 6. *Es gibt mindestens eine Zahl $0<\Lambda<\infty$ derart, daß in* (F) *des Satzes 1 das Gleichheitszeichen auftritt, dann und nur dann, wenn die dortige Konstante C gleich ist dem größten Koeffizienten der* DIRICHLET-*Entwicklung von $f(x)$.*

Beweis. Steht in (F) das $=$-Zeichen, dann ist die Behauptung aus (10) und (11) ersichtlich. Ebenso folgt auch, wenn man $C=\max\limits_{\nu=1,2,\ldots} a_\nu$ setzt, daß dann das $=$-Zeichen in (F) für mindestens ein geeignetes Λ eintreten muß.

Aus dem Satz 3 geht nun deutlich hervor, daß man den Satz 1 allgemeiner fassen könnte, und zwar könnte man dort innerhalb der Exponentenmenge *einseitige* Häufungspunkte zulassen. Wir wollen dies zum Ausdruck bringen in

[8]) Dieser Satz ist in einer allgemeineren Form vom Verf. bereits in der in Fußnote 3, S. 340 zitierten Arbeit mit anderen Mitteln bewiesen worden, doch soll er hier der Vollständigkeit halber mit aufgenommen werden.

Satz 7. *Eine vorgelegte Funktion $f(x)$ möge den Bedingungen (α) genügen. Es gilt:*

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x} \quad \text{mit} \quad a_\nu \geq 0, \quad \sum a_\nu \text{ konvergent}, \quad \lambda>0,$$

$\{\lambda_\nu\}$ ohne linksseitige (bzw. ohne rechtsseitige) Häufungspunkte,

dann und nur dann, wenn es zu jedem $0<\Lambda<\infty$ eine Zahl $0<\varkappa<\Lambda$ (bzw. eine Zahl $\infty>\varkappa>\Lambda$) derart gibt, daß

$$\text{(F')} \qquad \liminf_{n\to\infty}\left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa}}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right)\leq C$$

ist. Hierbei ist $0<C<\infty$ eine nur von der Funktion abhängige Konstante.

Beweis. Ist eine solche Reihe vorgelegt und ist Λ weder links- noch rechtsseitiger Häufungspunkt von $\{\lambda_\nu\}$, dann gelten im Falle $\Lambda\notin\{\lambda_\nu\}$ für dieses die Beziehungen (3), (3a) und (4), und wie man sich leicht überzeugen kann, sämtliche weiteren Schlüsse der S. 341 bis 342, die dann wieder zu (9) und im Falle $\Lambda\in\{\lambda_\nu\}$ zu (11) führen. Es genügt also, die Beziehung (F') nur noch für den Fall nachzuweisen, daß Λ ein rechtsseitiger (bzw. ein linksseitiger) Häufungspunkt von $\{\lambda_\nu\}$ ist. Aber auch jetzt verläuft der Beweis wie vorhin: Wir nehmen zunächst $\Lambda\notin\{\lambda_\nu\}$ an und bilden den Ausdruck (2) und die Beziehungen (3), (3a) und lassen ferner in (4) nur die *linke* (bzw. nur die *rechte*) Ungleichung bestehen, da es ja nach Voraussetzung ein Λ_l (bzw. ein Λ_r) mit solchen Eigenschaften gibt. Jetzt betrachten wir wieder die Funktion $\Omega(u)$, die das Intervall $\Lambda_l<u<\Lambda$ (bzw. $\Lambda<u<\Lambda_r$) auf ein entsprechendes Intervall I^l_Ω (bzw. I^r_Ω) abgebildet, das aus (6) entsteht, nachdem man dort $\Lambda_r=\Lambda$ (bzw. $\Lambda_l=\Lambda$) gesetzt hat. Mit einem aus diesem gewählten $\frac{1}{\varkappa}>\frac{1}{\Lambda}\left(\text{bzw. } \frac{1}{\varkappa}<\frac{1}{\Lambda}\right)$ bleiben aber Gln. (7) und, da $\Lambda\neq\lambda_\nu$ ist, auch (8) gültig. Nach derselben Schlußweise wie S. 343 folgt dann auch (9). Ist nun $\Lambda\in\{\lambda_\nu\}$, dann liefert der Ansatz (10) zusammen mit dem soeben Gezeigten, daß (F') besteht. Für den hinreichenden Teil verweisen wir auf Satz 3, und haben nur noch zu zeigen, daß die damit erhaltene Menge $\{\lambda_\nu\}$ keine linksseitigen (bzw. keine rechtsseitigen) Häufungspunkte besitzt. Das folgt indirekt wie S. 346, wobei die Annahme eines einseitigen Häufungspunktes zu (24) und damit zum Widerspruch zur Voraussetzung führt. Damit ist Satz 7 bewiesen.

Wir wollen hier unmittelbar ein später benötigtes Analogon zu Satz 2 anknüpfen.

Satz 8. *Es sei $f(x)$ in eine* DIRICHLETsche *Reihe mit $\lambda_\nu>0$, $a_\nu\geq 0$, $\sum a_\nu$ konv., entwickelbar, deren Exponentenmenge keine linksseitigen Häufungspunkte besitzt. Dann ist*

$$\Lambda\notin\{\lambda_\nu\} \quad (\text{bzw. } \Lambda\in\{\lambda_\nu\}),$$

dann und nur dann, wenn es um Λ eine linksseitige Umgebung $\mathfrak{U}^l$ gibt, derart, daß

$$\liminf_{n\to\infty}\left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa}}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right)=0 \quad (\text{bzw. } =a_\nu, \quad 0<a_\nu\leq C)$$

ist für alle $\varkappa\in\mathfrak{U}^l$. Entsprechendes gilt, wenn man statt „linksseitig" überall einsetzt „rechtsseitig".

Beweis. Dieser verläuft ganz nach dem Vorbild des Beweises von Satz 2, wobei man nun aber bezüglich des Intervalles I_Ω den Beweis des Satzes 7 zu berücksichtigen hat. Das dortige I'_Ω (entspr. I''_Ω) besitzt, wie ohne weiteres einzusehen ist, die Umgebungseigenschaften des notwendigen Teiles. Für den hinreichenden Teil bemerken wir nur, daß man wieder die Gültigkeit der Gln. (9) [bzw. (11)] folgert, womit dann alles bewiesen ist.

Man könnte jetzt fragen, ob der Satz 7 noch einer weiteren Verallgemeinerung fähig sei, indem man statt $\varkappa<\Lambda$ (bzw. $\varkappa>\Lambda$) etwa $\varkappa=\Lambda$ setzt und nach den Funktionen fragt, für die

$$\liminf_{n\to\infty}\left(-\frac{e}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\Lambda}\right)\leq C$$

ist für alle $0<\Lambda<\infty$. In der Tat gehören dann die DIRICHLETschen Reihen mit beliebig abzählbaren Exponenten (die z.B. dicht liegen können) dazu, doch kann man zeigen, daß zu dieser Funktionenklasse dann aber auch *sämtliche* total monotonen [d.h. die Bedingung (α) erfüllenden] Funktionen gehören[9]). Man erkennt also hieran, daß der Übergang von den beliebig abzählbaren zu den spezielleren Exponentenmengen für die obigen Ergebnisse und Methoden von *wesentlicher* Natur ist.

Eine gewisse weitere Lockerung der in unseren Sätzen an die Exponenten gestellten Bedingungen ist aber doch möglich, wenn wir nun von dem bisher behandelten Fall der *zugeordneten* Exponenten übergehen zu einer im Sinne der Einleitung *vorgegebenen* Folge (λ_ν). Zunächst beweisen wir einen Satz, der gewissermaßen zwischen diesen beiden Fragestellungen liegt, bei dem eine vorgegebene Zahlenmenge nicht die Exponenten der DIRICHLET-Entwicklung, wohl aber deren *abgeschlossene Hülle* darstellt.

Satz 9. *Es seien eine Funktion $f(x)$, die den Bedingungen (α) genügt, und eine abgeschlossene und abzählbare Menge positiver Zahlen $\{\bar\lambda_\nu\}$ vorgegeben. Es ist*

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu e^{-\lambda_\nu x},\qquad \textit{mit}\quad a_\nu\geq 0,\quad \sum a_\nu \textit{ konvergent},\quad \lambda_\nu>0,$$

$$\{\bar\lambda_\nu\} \textit{ die abgeschlossene Hülle von } \{\lambda_\nu\},$$

dann und nur dann, wenn es zu jedem Λ mit $0<\Lambda\notin\{\bar\lambda_\nu\}$, und nur zu diesen Λ, ein $\varkappa_1<\Lambda$ und ein $\varkappa_2>\Lambda$ gibt, so daß

$$\text{(F'')}\qquad \liminf_{n\to\infty}\left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa}}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right)=0$$

ist für $\varkappa=\varkappa_1$ und $\varkappa=\varkappa_2$.

Beweis. Es sei eine Reihe vorgegeben, $\{\bar\lambda_\nu\}$ sei die abgeschlossene und abzählbare Hülle der Exponentenmenge, dann bilden wir mit einem $\Lambda\notin\{\bar\lambda_\nu\}$,

[9]) Dies ist vom Verf. in der in Fußnote 3, S. 340 zitierten Arbeit, daselbst S. 277—281, gezeigt worden, ist aber auch unschwer hier aus den Überlegungen S. 343—345 dieses Aufsatzes zu erkennen. Zum Beispiel ist $\frac{1}{1+x}$, $(x\geq 0)$, eine solche Funktion, die aber keine DIRICHLETsche Reihe ist.

das also kein Häufungspunkt ist von $\{\lambda_\nu\}$, den Ausdruck

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left[\frac{\lambda_\nu}{\Lambda}\left(\frac{e^{-\lambda_\nu}}{\Lambda}\right)^{1/\varkappa}\right]^n.$$

Es gelten nun für dieses Λ die Beziehungen der Form (3), (3a) und (4) der S. 341. Damit bleiben aber für *dieses* Intervall (4) die weiteren Schlüsse der S. 341 bis 342 erhalten, so daß aus (8) und (9) dann (F'') folgt. Für ein $\Lambda \in \{\bar{\lambda}_\nu\}$ ist nun entweder $\Lambda \in \{\lambda_\nu\}$ oder Λ ist ein nicht zur Menge $\{\lambda_\nu\}$ gehöriger Häufungspunkt.

Im ersten Falle folgt $F > 0$ wieder aus (11), im zweiten Fall erkennt man dasselbe aus S. 346 wegen (24), damit gilt (F'') für genau alle $\Lambda \notin \{\bar{\lambda}_\nu\}$, womit der notwendige Teil erledigt ist. Jetzt sei eine abzählbare und abgeschlossene Menge $\{\bar{\lambda}_\nu\}$ und eine Funktion vorgelegt, die (α) und (F'') erfüllt. Es gelten zunächst wegen (α) die gleichen Überlegungen wie S. 343 bis 345, und wir können also, da ja (12) und (13) bestehen bleiben, schließen, daß (15) wieder gilt, jedoch nur für $\Lambda \notin \{\bar{\lambda}_\nu\}$. Von der in $0 \leq u \leq 1$ *stetigen* Belegungsfunktion $\Phi(u)$ aus (13) können wir damit aussagen, daß an jeder Stelle $u = e^{-\Lambda}$ mit $\Lambda \notin \{\bar{\lambda}_\nu\}$ zufolge der Überlegung der S. 344 bis 345 der Anfangspunkt eines Konstanzintervalles sich befindet. Die anderen Punkte seien dementsprechend mit $u_\nu = e^{-\bar{\lambda}_\nu}$ bezeichnet. Nun liegen aber nach der Voraussetzung über die Menge $\{\bar{\lambda}_\nu\}$ deren Häufungspunkte H_ν *isoliert*, denen dann in (0, 1) die diskreten Punkte $U_\nu = e^{-H_\nu}$ entsprechen mögen. Wir betrachten jetzt ein zwischen zwei solchen Punkten gelegenes Intervall, etwa $(U_\sigma, U_{\sigma+1})$, und greifen aus den darin befindlichen u_ν zwei aufeinanderfolgende, etwa u_τ und $u_{\tau+1}$ heraus. Wählen wir das Λ des Satzes so, daß $U_\sigma < u_\tau < u = e^{-\Lambda} < u_{\tau+1} < U_{\sigma+1}$ ist und wenden darauf wörtlich dieselben Gedankengänge der S. 345 an, so folgt, daß das bei u beginnende Konstanzintervall bis $u_{\tau+1}$ einschließlich reichen muß. In $(u_{\tau+1}, u_{\tau+2})$ können wir nun das Konstanzintervall beliebig nahe rechts von $u_{\tau+1}$ beginnen lassen, damit wird dieses aber, da $\Phi(u)$ stetig, zur Fortsetzung des vorherigen, und schließlich können wir, so fortfahrend, beliebig nahe an den Punkt $U_{\sigma+1}$ herankommen und damit wieder über diesen hinaus. Demzufolge und mit $\Phi(0) = 0$ ist wieder $\Phi(u) = 0$ in $0 \leq u \leq 1$, und mit (19), (20) und (21) ist der gegebenen Funktion eine Menge $\{\lambda_\nu\}$ durch (13) zugeordnet, so daß wieder

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x} \tag{22}$$

wird mit den Eigenschaften (23). Von der Menge $\{\lambda_\nu\}$ bleibt jetzt noch zu zeigen, daß deren abgeschlossene Hülle gleich der gegebenen Menge $\{\bar{\lambda}_\nu\}$ ist. Das ergibt sich folgendermaßen: Es bezeichne $\{\bar{\lambda}_\nu^i\}$ die sicher nicht leere Menge der isolierten Punkte von $\{\bar{\lambda}_\nu\}$. Aus der Voraussetzung folgt für (22) nun leicht, daß für alle $\Lambda \in \{\bar{\lambda}_\nu^i\}$ und *nur für diese* Λ

$$\liminf_{n\to\infty} \left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa}}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right) > 0 \tag{25}$$

ist mit allen $\varkappa<\Lambda$ oder allen $\varkappa>\Lambda$ (oder mit allen $\varkappa$ beider Art), und daß es dabei um jedes $\bar{\lambda}_\nu^i$ eine Umgebung gibt, derart, daß für jedes Λ' aus dieser Umgebung und dazu geeignete $\varkappa_1<\Lambda'$ und $\varkappa_2>\Lambda'$ der obige Limes verschwindet. Bezeichnen wir mit $\{\lambda_\nu^i\}$ die demzufolge nicht leere Menge der isolierten Punkte von $\{\lambda_\nu\}$ und setzen in obigen Ausdruck für $f(x)$ die nur mit diesen $\{\lambda_\nu^i\}$ gebildete Teilreihe unseres Ergebnisses (22) ein, dann gilt dasselbe für

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^i\left[\frac{\lambda_\nu^i}{\Lambda}\left(\frac{e^{-\lambda_\nu^i}}{e^{-\Lambda}}\right)^{1/\varkappa}\right]^n>0.$$

Läßt man hier Λ sämtliche Werte $\bar{\lambda}_\nu^i$ durchlaufen, dann lehrt der Satz 2 zusammen mit (25) und dem darauf Folgenden, daß

$$\{\bar{\lambda}_\nu^i\}=\{\lambda_\nu^i\}$$

ist. Nun ist aber $\{\bar{\lambda}_\nu\}$ die abgeschlossene Hülle der Menge $\{\bar{\lambda}_\nu^i\}$, diese unterscheidet sich aber zufolge der letzten Gleichung von $\{\lambda_\nu\}$ höchstens um die zu der letzteren gehörigen Häufungspunkte. Damit ist aber $\{\bar{\lambda}_\nu\}$ die abgeschlossene Hülle von $\{\lambda_\nu\}$, und der Satz 9 bewiesen.

Die Exponentenmenge dieses Satzes kann also Häufungspunkte, sogar unendlich viele im Inneren von $(0,\infty)$ besitzen, die aber nicht ein ganzes Intervall ausfüllen dürfen; man erhält mit diesem Satz sämtliche DIRICHLETschen Reihen, deren Exponentenmengen alle dieselbe vorgegebene abgeschlossene Hülle haben.

Wir kommen nun zu dem Fall der *vorgegebenen* Exponentenmenge und formulieren einen Satz, bei dem aber die an diese Menge gestellten Forderungen wieder soweit eingeschränkt werden müssen, daß wir ein Analogon zu Satz 7 bekommen:

Satz 10. *Es seien eine Funktion $f(x)$, die den Bedingungen (α) genügt, und eine abzählbare Menge positiver Zahlen $\{\lambda_\nu\}$, die keine linksseitigen (bzw. keine rechtsseitigen Häufungspunkte) hat, vorgegeben. Es ist*

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu e^{-\lambda_\nu x}\quad\text{mit}\quad a_\nu\gtrless 0,\quad\sum a_\nu\ \text{konvergent},$$

dann und nur dann, wenn es zu jedem Λ mit $0<\Lambda\notin\{\lambda_\nu\}$, und nur zu solchen Λ, ein $\varkappa<\Lambda$ (bzw. ein $\varkappa>\Lambda$) gibt, derart, daß

$$\liminf_{n\to\infty}\left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa}}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right)=0$$

ist.

Beweis. Die Notwendigkeit ist direkt aus Satz 8 abzulesen. Für den hinreichenden Teil folgt, wie beim Beweis von Satz 9, daß (15) nur für $\Lambda\notin\{\lambda_\nu\}$ gilt. Da jetzt wieder die Häufungspunkte von $\{\lambda_\nu\}$ isoliert sind, so schließen wir, genau wie dort, daß (19) besteht, und mithin ist also

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu e^{-\mu_\nu x}$$

mit den entsprechenden Eigenschaften (23). Es ist jetzt noch zu zeigen, daß $\{\mu_\nu\} = \{\lambda_\nu\}$ ist. Auch das geschieht analog wie beim vorherigen Satz. Aus der Voraussetzung ist ersichtlich, daß für alle $\Lambda \in \{\lambda_\nu\}$ und *nur für diese* Λ

$$\liminf_{n\to\infty}\left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa}}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right) > 0$$

ist mit allen $\varkappa < \Lambda$ (bzw. mit allen $\varkappa > \Lambda$) und daß es dabei um jedes λ_ν eine linksseitige (bzw. eine rechtsseitige) Umgebung $\mathfrak{U}'$ (bzw. $\mathfrak{U}''$) gibt, derart, daß für jedes Λ' aus $\mathfrak{U}'$ (bzw. aus $\mathfrak{U}''$) und dazu geeignetes $\varkappa < \Lambda'$ (bzw. $\varkappa > \Lambda'$) der obige Limes verschwindet. Man zeigt nun, daß $\{\mu_\nu\}$ keine linksseitigen (bzw. keine rechtsseitigen) Häufungspunkte besitzt, und läßt in

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\left[\frac{\mu_\nu}{\Lambda}\left(\frac{e^{-\mu_\nu}}{e^{-\Lambda}}\right)^{1/\varkappa}\right]^n$$

Λ sämtliche λ_ν durchlaufen; es folgt jetzt aus Satz 8, daß $\{\mu_\nu\} = \{\lambda_\nu\}$ ist, womit die Behauptung bewiesen ist.

Wir können die bisherigen Methoden wenigstens zum Teil noch auf den Spezialfall anwenden, bei dem es sich um eine Exponentenmenge handelt, die im ganzen Intervall $(0, \infty)$ *dicht* ist.

Satz 11. *Ist von einer Funktion $f(x)$ bekannt, daß sie eine* DIRICHLET-*Entwicklung besitzt mit $\lambda_\nu > 0$, $a_\nu \geqq 0$, $\sum a_\nu$ konv., so ist deren Exponentenmenge dann und nur dann dicht im ganzen Intervall $(0, \infty)$, wenn*

$$\limsup_{n\to\infty}\left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa}}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right) = \infty$$

ist für jedes $0 < \Lambda < \infty$ und jedes $0 < \varkappa \neq \Lambda$.

Beweis. Ist bei einer gegebenen Reihe Λ ein Häufungspunkt der $\{\lambda_\nu\}$, dann ergibt der Beweis S. 346 wieder (24) und damit folgt für alle Λ die Behauptung. Das Umgekehrte zeigen wir indirekt, indem wir annehmen, irgendein Λ sei kein Häufungspunkt von $\{\lambda_\nu\}$. Es würde dann die beiden Intervalle (4) und (6) geben, so daß daselbst wegen (9) bzw. (11) für gewisse $\varkappa$ obiger Ausdruck beschränkt wäre, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Wir haben also bei diesem Satz die Existenz der DIRICHLET-Entwicklung voraussetzen müssen. Will man sich hiervon befreien, dann muß man auf den allgemeinen Entwicklungssatz zurückgehen, der für beliebige DIRICHLETsche Reihen gilt, und ihn mit der obigen Aussage verbinden. Dieser Satz wurde vom Verfasser in der Fußnote 3 zitierten Mitteilung bewiesen.

§ 3.

Zum Abschluß wollen wir als Beispiel die Funktion $f(x) = e^{e^{-x}} - 1$, $x \geqq 0$, behandeln, von der man leicht erkennt, daß sie (α) erfüllt und ferner, wenn man sich die Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion vor Augen hält, daß sie gleich der DIRICHLETschen Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} e^{-\nu x}$ ist. Wir können dies jetzt aber direkt zeigen, indem wir den Satz 1 auf diese Funktion anwenden.

Man hat dann zunächst für die n-te Ableitung[10])

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = (-1)^n e^{e^{-x}} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{C_\nu^{(n)}}{\nu!} e^{-\nu x},$$

wo

$$C_\nu^{(n)} = \nu^n - \binom{\nu}{1}(\nu-1)^n + \binom{\nu}{2}(\nu-2)^n - + \cdots \tag{26}$$

ist. Wir wählen ein beliebiges positives Λ, zunächst aber so, daß $\Lambda \neq 1, 2, 3, \ldots$ ist, etwa

$$i - 1 < \Lambda < i, \tag{27}$$

wo i eine natürliche Zahl ist. Damit bilden wir

$$F = e^{e^{-\frac{n}{\varkappa}} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{C_\nu^{(n)}}{\nu!} \left(\frac{e^{\frac{\Lambda-\nu}{\varkappa}}}{\Lambda} \right)^n}$$

und zeigen jetzt die Existenz des $\varkappa_1$ und des $\varkappa_2$ des Satzes 1.

Wir definieren eine Funktion $v(u)$ für $u > 0$ durch $v(u) = \frac{u}{\varkappa} - \lg u$, wo $\varkappa$ eine positive Zahl ist mit

$$\Lambda > \varkappa \in (i-1, i). \tag{28}$$

Diese Funktion ist positiv und hat genau ein Minimum, und zwar an der Stelle $u_m = \varkappa$, so daß ersichtlich $v(\varkappa) < v(\nu)$ ist für alle $\nu = 1, 2, 3, \ldots$. Wählen wir nun $\varkappa$ nah genug an Λ, dann können wir es wegen der Stetigkeit von $v(u)$ so einrichten, daß auch $v(\Lambda) < v(\nu)$ ist, ebenfalls für alle $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, und erhalten aus dem obigen

$$\frac{\Lambda}{\varkappa} - \lg \Lambda < \frac{\nu}{\varkappa} - \lg \nu, \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{e^{\frac{\Lambda-\nu}{\varkappa}}}{\Lambda} < \frac{1}{\nu};$$

und wegen (27) und (28) kann man sogar eine von ν unabhängige Zahl $0 < \alpha < 1$ so angeben, daß

$$\frac{e^{\frac{\Lambda-\nu}{\varkappa}}}{\Lambda} \leq \frac{\alpha}{\nu} \text{ ist für alle } \nu = 1, 2, 3, \ldots.$$

Damit wird aus der obigen Gleichung für F

$$F \leq e^{e^{-\frac{n}{\varkappa}} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{C_\nu^{(n)}}{\nu!} \left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^n} \leq e^{e^{-\frac{n}{\varkappa}} n \frac{C_N^{(n)}}{N!} \left(\frac{\alpha}{N}\right)^n},$$

wo $N = N(n)$ eine natürliche Zahl ist mit $1 \leq N \leq n$, derart, daß

$$\frac{C_N^{(n)}}{N!}\left(\frac{\alpha}{N}\right)^n = \max_{\nu=1,2,\ldots,n} \frac{C_\nu^{(n)}}{\nu!}\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^n$$

ist. Mit (26) wird dann

$$F \leq e^{e^{-\frac{n}{\varkappa}} \frac{n}{N!}\left(\frac{\alpha}{N}\right)^n \left[N^n - \binom{N}{1}(N-1)^n + \binom{N}{2}(N-2)^n - + \cdots\right]}$$

[10]) Vgl. etwa Bd. II, S. 25/26 des in Fußnote 5, S. 343 zitierten Werkes.

und mit

$$\binom{N}{\sigma}(N-\sigma) = \max_{\tau=0,1,2,\ldots,N-1}\binom{N}{\tau}(N-\tau)^n, \qquad 0 \leq \sigma \leq N-1 < n$$

wird

$$F \leq e^{e^{-\frac{n}{\varkappa}}} \frac{n}{N!}\left(\frac{\alpha}{N}\right)^n \left[\binom{N}{\sigma}(N-\sigma)\right]^n N.$$

Der erste Faktor der rechten Seite dieser Beziehung strebt bei jedem $\varkappa > 0$ mit wachsendem n gegen 1, ferner ist $\left(\frac{N-\sigma}{N}\right)^n \leq 1$ und $\frac{1}{N!}\binom{N}{\sigma}$ bleibt für jedes n beschränkt. Sei K eine positive Konstante, so daß wir mit $N \leq n$ schließlich erhalten

$$F \leq K\, n^2 \alpha^n,$$

wo aber die rechte Seite wegen $0 < \alpha < 1$ mit wachsendem n gegen 0 strebt. Entsprechendes folgt nun, wenn man oben ein $\varkappa > \Lambda$ annimmt, so daß also $\lim_{n\to\infty} F = 0$ ist für $\Lambda \neq 1, 2 \ldots$, mit den entsprechenden $\varkappa_1 < \Lambda$ und $\varkappa_2 > \Lambda$.

Es bleibt noch der Fall zu diskutieren, wo Λ gleich einer natürlichen Zahl ist. Sei also $\Lambda = i \geq 1$ gewählt, dann haben wir

$$F = e^{e^{-\frac{n}{\varkappa}}} \frac{C_i^{(n)}}{i!} \cdot \frac{1}{i^n} + e^{e^{-\frac{\varkappa}{n}}} \sum_{\nu=1}^{n}{}' \frac{C_\nu^{(n)}}{\nu!}\left(e^{\frac{i-\nu}{\varkappa}}\right)^n,$$

wo aber im zweiten Summanden $\nu \neq i$ ist und dieser mit wachsendem n gegen 0 strebt, da man sämtliche soeben gemachten Schlüsse auf diesen anwenden kann. Der erste Faktor des ersten Summanden strebt wiederum gegen 1. Mit (26) haben wir jetzt

$$\frac{C_i^{(n)}}{i!}\frac{1}{i^n} = \frac{1}{i!}\left[1 - \binom{i}{1}\left(\frac{i-1}{i}\right)^n + \binom{i}{2}\left(\frac{i-2}{i}\right)^n - + \cdots\right].$$

In der eckigen Klammer stehen aber endlich viele Glieder, deren Anzahl von n unabhängig ist und ferner sind die in den runden Klammern stehenden Ausdrücke < 1. Damit bekommt man $\lim_{n\to\infty} F = \frac{1}{i!} \leq 1$. Unsere Funktion ist also entwickelbar mit der Exponentenmenge $\{\nu\}$ und mit den Koeffizienten $1/\nu!$, $\nu = 1, 2 \ldots$; der Satz 6 ergibt dann $C = 1$ mit $\Lambda = 1$.

München, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 17. August 1953.)

WEIER, J.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 356—374 (1954)

Normale Abbildungsscharen.

Von
JOSEF WEIER.

Es bezeichne K einen endlichen simplizialen Komplex, der in einem Euklidischen Zahlenraum liegt, und P das durch K bestimmte Polyeder. Der Komplex K sei überdies zusammenhängend, und es zerlege kein Eckpunkt von K seine Umgebung; K sei, wie wir auch sagen werden, eindimensional zusammenhängend.

Dann besagt ein bekannter Satz[1]): Ist f die Identität von P, also $p = f(p)$ für alle Punkte p von P, so existiert eine Schar $(f^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von P in sich mit $f^0 = f$ und der Eigenschaft, daß f^1 genau einen Fixpunkt hat.

Diesen Satz wollen wir wie folgt verschärfen. Es existieren Kurven $(q_i^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$, $i = 1, \ldots, m$, und eine Schar $(f^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von P in sich mit $f^0 = f$ und den Eigenschaften: für $0 < \tau < 1$ sind die paarweis verschiedenen Punkte $q_1^\tau, \ldots, q_m^\tau$ die Fixpunkte der Abbildung f^τ; die Abbildung f^1 hat genau einen Fixpunkt q, und es ist $q_i^1 = q$ für $i = 1, \ldots, m$.

Der vorstehende Satz wird überdies in verschiedener Richtung abgewandelt und ergänzt. Näherhin ist das Ziel der vorliegenden Arbeit zu zeigen, daß man auch an den Weg, auf dem eine Abbildung in eine zu ihr homotope Abbildung mit der Mindestzahl von Fixpunkten der zugehörigen Abbildungsklasse überführt wird, Forderungen stellen kann bezüglich einer übersichtlichen Art, in welcher die Fixpunkte einer Fixpunktklasse auf einen Fixpunkt zusammengezogen werden. Eine Abbildungsschar, die die Fixpunkte in der oben gekennzeichneten Weise zusammenführt, haben wir in der Überschrift als „normal" bezeichnet.

Bemerkt sei noch, daß man — nach geeigneter Abänderung der über den Komplex K gemachten Voraussetzungen — die folgenden Untersuchungen ohne größere Schwierigkeiten auch auf beliebige Abbildungsklassen ausdehnen kann.

I. Doppelpunktfreie Abbildungsscharen.

Zu den benutzten Bezeichnungen sei folgendes bemerkt. Die vorkommenden Mengen sind im allgemeinen mit großen lateinischen Buchstaben, ihre Elemente mit kleinen lateinischen Buchstaben gekennzeichnet. Für reelle Zahlen verwenden wir neben kleinen lateinischen auch griechische Buchstaben. Sind a, b die Punkte $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ eines n-dimensionalen Euklidischen Zahlenraumes R^n, so bedeutet $a + b$ den Punkt $(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$

[1]) Wenn P eine Mannigfaltigkeit ist, vergleiche man H. HOPF: Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **96**, 225—250 (1926).

und $\overrightarrow{a\,b}$ den Vektor $\{\beta_1-\alpha_1, \ldots, \beta_n-\alpha_n\}$. Sind $a_1, \ldots, a_r$ Punkte des R^n, so bezeichnet $\overline{a_1 \ldots a_r}$ die konvexe Hülle der Punkte $a_1, \ldots, a_r$; lineare Unabhängigkeit der Punkte $a_1, \ldots, a_r$ setzen wir dabei nicht voraus. „Simplexe" im R^n schlechthin sind stets abgeschlossen und gradlinig. Unter einem „endlichen simplizialen Komplex" im R^n verstehen wir eine endliche Menge K von Simplexen S des R^n mit den Eigenschaften: der Durchschnitt zweier S aus K gehört zu K; mit S gehört jede Seite von S zu K. Für das Simplex S bezeichnet $I(S)$ das Innere bezüglich seiner Trägerebene von S. Sind M und N Mengen des R^n mit $M \subset N$, so ist $B(M;N)$ die in bezug auf N gebildete Begrenzung von M.

Für diesen Abschnitt bezeichne K einen beliebigen endlichen simplizialen Komplex, der in einem Euklidischen Raum liegt, und P das durch K bestimmte Polyeder. Ist dann f die Identität von P, also die durch $f(p)=p$, $p \in P$, erklärte Abbildung von P in sich und ε eine positive Zahl, so existiert einem bekannten Satz zufolge eine zu f homotope Abbildung f', die von f um weniger als ε entfernt ist und die nur endlich viele Fixpunkte hat. Dieses Ergebnis wollen wir verschärfen zu

Satz I. *Ist f die Identität von P und ε eine positive Zahl, so gibt es Punkte $q_1, \ldots, q_m$ in P und eine Schar $(f^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von P in sich mit $f^0 = f$, $\varrho(f, f^\tau) < \varepsilon$, $0 \leq \tau \leq 1$, und der Eigenschaft, daß für $0 < \tau \leq 1$ die Punkte $q_1, \ldots, q_m$ die Fixpunkte der Abbildung f^τ sind.*

Beweis. Man kann annehmen, daß die Durchmesser der Simplexe von K sämtlich kleiner als $\varepsilon/2$ sind. Zwei Punkte p_1 und p_2 aus P, deren zu K gehörige Trägersimplexe einen nicht leeren Durchschnitt haben, bezeichnen wir als in „benachbarten Simplexen von K liegende Punkte". Dann sei ω eine positive Zahl, so daß jedes Punktpaar (p_1, p_2) aus P mit $\varrho(p_1, p_2) < \omega$ in benachbarten Simplexen von K liegt; und f' eine stetige Abbildung von P in sich mit $\varrho(f, f') < \omega$ und nur endlich vielen Fixpunkten. Die letzteren nennen wir $q_1, \ldots, q_m$.

Zum Beweis von Satz I braucht es dann offenbar nur den Nachweis der Existenz einer für alle (p_1, p_2, τ), p_1 und p_2 in benachbarten Simplexen von K liegende Punkte aus P und τ eine Zahl aus $[0, 1]$, erklärten stetigen Abbildung h in P mit den folgenden Eigenschaften 1. bis 4.

1. In allen (p_1, p_2) ist $h(p_1, p_2, 0) = p_1$ und $h(p_1, p_2, 1) = p_2$.

2. Es ist $h(p_1, p_2, \tau) = p_1$ für $0 \leq \tau \leq 1$, wenn $p_1 = p_2$.

3. Für alle (p_1, p_2, τ) liegen die Punkte p_1 und $h(p_1, p_2, \tau)$ in benachbarten Simplexen von K.

4. Es ist $h(p_1, p_2, \tau_1) \neq h(p_1, p_2, \tau_2)$ in allen $(p_1, p_2, \tau_1, \tau_2)$ mit $p_1 \neq p_2$ und $\tau_1 \neq \tau_2$.

Sind p, p_1, p_2 Punkte aus P, so bezeichnen wir $\overline{p_1 p} + \overline{p p_2}$ als einen „doppelpunktfreien" Streckenzug, wenn $\overline{p_1 p} \cdot \overline{p p_2} = p$. Dabei lassen wir auch die Fälle zu, daß $p = p_1 = p_2$ oder $p = p_1$ und $p_1 \neq p_2$ oder $p = p_2$ und $p_1 \neq p_2$ ist.

Ist Q die Menge aller in benachbarten Simplexen von K liegenden Punktpaare (p_1, p_2) aus P und a eine stetige Abbildung von Q in P mit den im nachstehenden Satz I' angeführten Eigenschaften, so wird eine stetige

Abbildung h der Menge aller (p_1, p_2, τ), (p_1, p_2) ein Punkt aus Q und τ eine Zahl aus $[0, 1]$, in P bestimmt, von der die obigen Aussagen 1. bis 4. gelten, wenn für jedes (p_1, p_2) aus Q die Strecke $[0, 1]$ auf den Streckenzug

$$\overline{p_1 h(p_1, p_2)} + \overline{h(p_1, p_2) p_2}$$

abgebildet wird durch $h(p_1, p_2, 0) = p_1$, $h(p_1, p_2, 1) = p_2$ und lineare Fortsetzung für die übrigen Zahlen aus $[0, 1]$.

Mithin, es genügt, statt Satz I zu zeigen:

Satz I'. *Es gibt eine für alle (p_1, p_2), p_1 und p_2 in benachbarten Simplexen von K liegende Punkte aus P, erklärte stetige Abbildung a in P mit den Eigenschaften:*

$$\text{für} \quad p_1 = p_2 \quad \text{ist} \quad a(p_1, p_2) = p_1;$$

ist $T(p_1)$ das Trägersimplex von p_1 und $T(p_2)$ das von p_2, so liegt der Punkt $a(p_1, p_2)$ im Innern des Simplexes $T(p_1) \cdot T(p_2)$; der Streckenzug $\overline{p_1 a(p_1, p_2)} + \overline{a(p_1, p_2) p_2}$ ist doppelpunktfrei.

Beweis. Sind $p_1 = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n})$ und $p_2 = (\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2n})$ Punkte aus P, so betrachten wir das Punktpaar (p_1, p_2) auch als den Punkt $(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{2n})$. Dann ist die Entfernung zweier (p_1, p_2) erklärt. Sind P_1 und P_2 Teilmengen aus P, so bezeichne (P_1, P_2) die Menge aller (p_1, p_2) mit $p_1 \in P_1$ und $p_2 \in P_2$. Abgeschlossene Hülle, Begrenzung usw. von Mengen (P_1, P_2) sind stets bezüglich (P, P) gebildet, wo die Bezugsmenge nicht besonders angegeben ist.

Mit Q bezeichnen wir die Menge aller (p_1, p_2) aus (P, P), für die p_1 und p_2 in benachbarten Simplexen aus K liegen. Für $p \in P$ sei $T(p)$ das Trägersimplex von p in K. Weiter seien für alle p aus P, wenn e_i die Eckpunkte von K sind, die Zahlen $\lambda_i^0(p)$ durch

$$p = \sum \lambda_i^0(p)\, e_i, \qquad \sum \lambda_i^0(p) = 1, \qquad \lambda_i^0(p) \geq 0, \qquad \lambda_i^0(p) = 0 \text{ für } e_i \notin T(p)$$

bestimmt. Wir ordnen die Simplexe von K derart in eine Folge $S^1, \ldots, S^m$, $S^{m+1}, \ldots, S^{m'}$, daß $\dim S^m = 0$, $\dim S^{m+1} = 1$ und $\dim S^i \leq \dim S^{i+1}$ für $i = 1, \ldots, m' - 1$.

Hierauf bezeichnen wir für alle Punkte (p_1, p_2) aus der Menge Q mit $a^m(p_1, p_2)$ den Punkt

$$\sum \lambda_i^0(p_1)\, \lambda_i^0(p_2)\, e_i / \sum \lambda_i^0(p_1)\, \lambda_i^0(p_2).$$

Da die Abbildungen λ_i^0 stetig sind, ist die Abbildung a^m stetig. Es gilt:

I^m. Für $p_1 = p_2$ ist $a^m(p_1, p_2) = p_1$.

II^m. Es liegt $a^m(p_1, p_2)$ im Innern von $T(p_1) \cdot T(p_2)$.

III^m. In allen (p_1, p_2), für die $T(p_1)$ wie $T(p_2)$ unter den Simplexen $S^1, \ldots, S^m$ vorkommt, ist der Streckenzug $\overline{p_1 a^m(p_1, p_2)} + \overline{a^m(p_1, p_2) p_2}$ doppelpunktfrei.

Wir machen nun die Annahme, es sei $r - 1$ eine natürliche Zahl $\geq m$ und bereits eine stetige Abbildung a^{r-1} von Q in P erklärt mit I^{r-1} bis III^{r-1}. Dann wollen wir die Existenz einer stetigen Abbildung a^r von Q in P nachweisen, von der I^r bis III^r gilt.

Zu diesem Ende seien V die Menge aller Punkte p aus P mit $S^r \subset T(p)$ und S das Innere von S^r. Es sei A die Menge aller Punkte (p_1, p_2) von (S, S), in denen der Punkt $a^{r-1}(p_1, p_2)$ von p_1 wie p_2 gleichen Abstand hat. Für $i = 1, 2$ bedeute A_i die Menge aller Punkte (p_1, p_2) von (S, S), in denen der Punkt $a^{r-1}(p_1, p_2)$ von p_i kleineren Abstand als vom anderen der beiden Punkte p_1 und p_2 hat. Weiter bezeichne A_i^0 für $i = 1, 2$ die Menge aller (p_1, p_2) von A_i, in denen $a^{r-1}(p_1, p_2)$ auf der Geraden durch $\overline{p_1 p_2}$ liegt und zu $\overline{p_1 p_2}$ fremd ist. Die Menge A_i ist in $(\overline{S, S})$ offen; ihre bezüglich $(\overline{S, S})$ gebildete Begrenzung nennen wir B_i. Sind p ein Punkt aus V, e_i^1 die Eckpunkte von S^r, e_i^2 die von den e_i^1 verschiedenen Eckpunkte von $T(p)$ und

$$p = \sum \lambda_i^1 e_i^1 + \sum \lambda_i^2 e_i^2, \qquad \sum \lambda_i^1 e_i^1 + \sum \lambda_i^2 e_i^2 = 1, \qquad \lambda_i^k > 0,$$

so bezeichne p' den Punkt $\sum \lambda_i^1 e_i^1 / \sum \lambda_i^1$.

Es ist

(1) $$a^{r-1}(p_1, p_2) = p_i \quad \text{für} \quad (p_1, p_2) \in B_i \cdot \bar{A}_i^0.$$

Falls $p_1 = p_2$, ist (1) sicher richtig. Nun sei $p_1 \neq p_2$ und G die Gerade durch p_1 und p_2. Wegen $(p_1, p_2) \in \bar{A}_i^0$ und der Bedeutung von A_i^0 ist

(*) $$a^{r-1}(p_1, p_2) \in \overline{G - \overline{p_1 p_2}}.$$

Wäre erstens (p_1, p_2) in (S,S) gelegen, so folgte aus (*), daß eine ganze Umgebung von (p_1, p_2) zu A_i gehörte, obschon doch (p_1, p_2) in $B_i = \bar{A}_i - A_i$ liegt. Auch der zweite Fall, daß p_i in S und der von p_i verschiedene der Punkte p_1 und p_2, den wir auch mit p_j bezeichnen auf, $\bar{S} - S$ liegt, ist nicht möglich. Denn in diesem Falle läge der Punkt $a^{r-1}(p_1, p_2)$ auf $\bar{S} - S$ und wäre wegen (*) daher gleich p_j, während doch die Entfernung des Punktes $a^{r-1}(p_1, p_2)$ von p_i nicht kleiner ist als die von p_j. Drittens liege p_i auf $\bar{S} - S$ und p_j in S. Hier folgt (1) aus $a^{r-1}(p_1, p_2) \in \bar{S} - S$ und (*). Viertens sei p_1 wie p_2 auf $\bar{S} - S$ gelegen. In diesem Fall ergibt sich (1) aus (*) und III^{r-1}.

Es ist

(2) $$\overline{(S, S)} = (\bar{S}, \bar{S}) = \bar{A} + \bar{A}_1 + \bar{A}_2.$$

Ist q ein Punkt aus $(\bar{S}, \bar{S})$, so gibt es eine Folge $q_1, q_2, \ldots$ von Punkten q_i aus (S, S), die auf q konvergiert. In mindestens einer der Mengen A, A_1, A_2 liegt eine Teilfolge $q_1^*, q_2^*, \ldots$ der Folge $q_1, q_2, \ldots$, woraus (1) folgt.

Für $i = 1, 2$ ordnen wir jedem Punkt $q = (p_1, p_2)$ aus $\bar{A}_i$ eine Zahl $\lambda_i(q)$ aus $[0, 1]$ zu. Und zwar sei $\lambda_i(q)$ gleich

$$\varrho(q, B_i - \bar{A}_i^0) / \left(\varrho(q, B_i - \bar{A}_i^0) + \varrho(q, \bar{A}_i^0)\right),$$

wenn $\varrho(q, B_i - \bar{A}_i^0) + \varrho(q, \bar{A}_i^0) > 0$; sonst gleich 0. Die Funktion λ_i ist unstetig nur in den gemeinsamen Häufungspunkten von $B_i - \bar{A}_i^0$ und $\bar{A}_i^0$, also auf der Menge $\overline{B_i - \bar{A}_i^0} \cdot \bar{A}_i^0$.

Ebenso ordnen wir jedem Punkt $q = (p_1, p_2)$ aus der Menge (V, V) eine Zahl $\mu(q)$ zu. Wir bezeichnen (V, V) auch mit V^* und (S, S) auch mit S^*.

Dann sei $\mu(q)$ gleich

$$\varrho(q, \overline{V}^* - V^*)/\big(\varrho(q, \overline{V}^* - V^*) + \varrho(q, S^*)\big).$$

Die Abbildung μ ist stetig.

Hierauf weisen wir jedem Punkt $q = (p_1, p_2)$ von Q wie folgt einen Punkt $a^r(q)$ aus P zu: Es sei $a^r(q)$ gleich

(3) $$a^{r-1}(q)$$

für alle q aus $Q - (V, V)$ und ebenso für alle q aus $\bar{A}$; gleich

(4) $$\big(1 - \lambda_i(q)\big)\, a^{r-1}(q) + \lambda_i(q)\, p_i$$

für die Punkte q von $\bar{A}_i$, $i = 1, 2$; gleich

(5) $$\big(1 - \mu(q)\big)\, a^{r-1}(q) + \mu(q)\, a^r(p_1', p_2')$$

für die q aus $(V, V) - \overline{(S, S)}$.

Zum Nachweis, daß die Abbildung a^r von Q in P eindeutig ist, genügt es, die Eindeutigkeit von a^r auf den Mengen $\bar{A} \cdot \bar{A}_1$, $\bar{A} \cdot \bar{A}_2$, $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2$ und $(\bar{S} - S, \bar{S} - S) \cdot (\bar{A}_1 + \bar{A}_2)$ zu prüfen. Diese Mengen sind bzw. gleich $\bar{A} \cdot B_1$, $\bar{A} \cdot B_2$, $B_1 \cdot B_2$ und $(\bar{S} - S, \bar{S} - S) \cdot (B_1 + B_2)$. Alsdann braucht es nur noch den Nachweis, daß

(*) $$\big(1 - \lambda_i(q)\big)\, a^{r-1}(q) + \lambda_i(q)\, p_i = a^{r-1}(q)$$

für die Punkte $q = (p_1, p_2)$ aus B_i; $i = 1, 2$. Für $q \in B_i - \bar{A}_i^0$ folgt (*) aus $\lambda_i(q) = 0$, für $q \in B_i \cdot \bar{A}_i^0$ aus (1).

Bezeichnet a_i^r die durch $a_i^r(q) = a^r(q)$, $q \in \bar{A}_i$, bestimmte Abbildung von $\bar{A}_i$ in P, so ist a_i^r auf $\bar{A}_i$ stetig: Die Abbildung λ_i ist nur in den Punkten der Menge $\overline{B_i - \bar{A}_i^0} \cdot \bar{A}_i^0$ unstetig. Die letztere Menge ist aber in $B_i \cdot \bar{A}_i^0$ enthalten. Daher folgt die Behauptung aus (1) und (4).

Aus der Eindeutigkeit von a^r sowie (4) und (*) ergibt sich, daß

(6) $$a^r(q) = a^{r-1}(q) \quad \text{für} \quad q \in B_i;$$

und hieraus, daß

(7) $$a^r(q) = a^{r-1}(q) \quad \text{für} \quad q \in \overline{(S, S)} - (S, S).$$

Wir bezeichnen mit a_0^r die durch $a_0^r(q) = a^r(q)$, $q \in \overline{(S, S)}$, bestimmte Abbildung von $\overline{(S, S)}$ in P. Dann folgt aus (6) die Stetigkeit von a_0^r.

Die Abbildung a^r ist stetig: Wegen der Stetigkeit von μ und a_0^r ist a^r auf (V, V) stetig. Verbleibt, die Stetigkeit von a^r in den Punkten q aus $\overline{(V, V)} - (V, V)$ zu prüfen. Und diese ergibt sich leicht aus (7).

Zum Nachweis, daß I^r bis III^r über a gilt, bedarf es nur noch einer Prüfung von III^r. Es sei also (p_1, p_2) ein Punkt aus Q, für den die Simplexe $T(p_1)$ und $T(p_2)$ unter den Simplexen $S^1, \ldots, S^r$ vorkommen. Erstens möge $T(p_1)$ wie $T(p_2)$ bereits unter den Simplexen $S^1, \ldots, S^{r-1}$ enthalten sein. Hier folgt III^r aus $a^r(p_1, p_2) = a^{r-1}(p_1, p_2)$ und der als richtig angenommenen Aussage III^{r-1}. Liegt der erste Fall nicht vor, so ist wenigstens einer der Punkte p_1 und p_2 im Innern von S^r gelegen. Das folgt aus

$\bar{S} - S \subset S^1 + \cdots + S^{r-1}$. Es liege zweitens der eine der Punkte p_1 und p_2 in S und der andere in $S^1 + \cdots + S^{r-1}$. Dann ist $a^r(p_1, p_2)$ in $\bar{S} - S$ gelegen und also III^r richtig. Drittens befinde sich p_1 wie p_2 in S. Hier folgt III^r aus der Erklärung von $A_1^0 + A_2^0$ und daraus, daß dann $a^r(p_1, p_2)$ gleich einem der Punkte p_1 und p_2.

Für $r = m'$ gilt $\mathrm{I}^{m'}$, $\mathrm{II}^{m'}$ und $\mathrm{III}^{m'}$, womit Satz I′ bewiesen ist.

Dem bisher Gesagten entnimmt man folgenden in den Abschnitten 2, 3 und 4 benutzten

Hilfssatz. *Es sei K ein endlicher simplizialer Komplex, der in einem Euklidischen Raum liegt, und P das durch K bestimmte Polyeder. Dann gibt es eine für alle (p_1, p_2, τ), p_1 und p_2 in benachbarten Simplexen von K liegende Punkte aus P und τ eine Zahl aus $[0, 1]$, erklärte stetige Abbildung h in P mit den Eigenschaften: $h(p_1, p_2, 0) = p_1$ und $h(p_1, p_2, 1) = p_2$; $h(p_1, p_2, \tau) = p_1$ für $0 \leq \tau \leq 1$, wenn $p_1 = p_2$; ist $T(p_1)$ das Trägersimplex von p_1 und $T(p_2)$ das von p_2, so gibt es im Innern von $T(p_1) \cdot T(p_2)$ einen Punkt q derart, daß $h(p_1, p_2, \tau)$ in $\overline{p_1 q} + \overline{q p_2}$ liegt für $0 \leq \tau \leq 1$;*

$$h(p_1, p_2, \tau_1) \neq h(p_1, p_2, \tau_2)$$

in allen $(p_1, p_2, \tau_1, \tau_2)$ mit $p_1 \neq p_2$ und $\tau_1 \neq \tau_2$.

2. Normale Abbildungsscharen im Kleinen.

Ist P ein Polyeder, f eine stetige Abbildung von P in sich, q ein Fixpunkt von f und V eine in P offene Menge derart, daß $q \in V$ der einzige Fixpunkt von f auf $\bar{V}$, so heißt q ein „isolierter" Fixpunkt von f; ist überdies V zu einer Vollkugel homöomorph, so heißt q ein „regulärer" Fixpunkt. Ist q isoliert und existiert eine Strecke S mit $f(\bar{V}) \subset S$, so bezeichnen wir q als einen „linearen" Fixpunkt.

Über Fixpunkte vom Index Null ist folgender Satz bekannt: Ist V eine offene n-dimensionale Vollkugel in dem Euklidischen Raum R^n, $n > 0$, q ein Punkt aus V und f eine stetige Abbildung von $\bar{V}$ in den R^n mit $p \neq f(p)$, $p \in \bar{V} - q$, und q als Fixpunkt vom Index Null, so gibt es eine Schar $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von $\bar{V}$ in den R^n, von der gilt: es ist $f^\tau(p) = f(p)$ in allen (p, τ), für die entweder $p \in \bar{V}$ und $\tau = 0$ oder $p \in \bar{V} - V$ und $0 \leq \tau \leq 1$; die Abbildung f^1 hat keinen Fixpunkt. Diesen Satz wollen wir verschärfen zu

Satz 1. *Es sei V eine offene n-dimensionale Vollkugel im R^n, $n > 0$, und q ein Punkt aus V; f eine stetige Abbildung von $\bar{V}$ in den R^n mit $p \neq f(p)$, $p \in \bar{V} - q$, und q als Fixpunkt vom Index Null. Dann existiert eine Schar $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von $\bar{V}$ in den R^n mit den Eigenschaften: $f^\tau(p) = f(p)$ in allen (p, τ), für die entweder $p \in \bar{V}$ und $\tau = 0$ oder $p \in \bar{V} - V$ und $0 \leq \tau \leq 1$; für $0 < \tau \leq 1$ hat die Abbildung f^τ keinen Fixpunkt.*

Beweis. Man kann annehmen, daß q der Mittelpunkt von V ist. Für $0 < \sigma \leq 1$ sei V^σ die offene n-dimensionale Vollkugel im R^n mit q als Mittelpunkt und $\sigma \cdot \varrho(q, \bar{V} - V)$ als Radius. In allen Punkten p aus $\bar{V} - q$ bezeichne $w(p)$ die Projektion von p auf $\bar{V} - V$ aus q. Für $0 < \sigma \leq 1$ sei w^σ

die durch $w^\sigma(p)=w(p)$, $p\in\overline{V}^\sigma-V^\sigma$, bestimmte affine Abbildung von $\overline{V}^\sigma$ auf $\overline{V}$. Es bezeichne f' eine stetige Abbildung von $\overline{V}$ in den R^n, die auf $\overline{V}-V$ mit f übereinstimmt und die keinen Fixpunkt hat.

Zur Erklärung der Abbildungsschar $(f^\tau,\ 0\leq\tau\leq 1)$ sei zunächst $f^0=f$. Es bezeichne ζ eine Zahl aus $(0,1]$. Für $p\in\overline{V}-V^\zeta$ sei dann

$$f^\zeta(p)=f(p);\tag{1}$$

für $p\in\overline{V}^\sigma-V^\sigma$, $\zeta\geq\sigma\geq\zeta\,\zeta$, weiter

$$f^\zeta(p)=p+\frac{\sigma}{\zeta}\overrightarrow{w^{\lambda(\zeta,\sigma)}(p)\,f\,w^{\lambda(\zeta,\sigma)}(p)}\tag{2}$$

mit $\lambda(\zeta,\sigma)=\dfrac{\zeta\zeta-1}{\zeta-1}\cdot\dfrac{\sigma}{\zeta}-\dfrac{\zeta\zeta-\zeta}{\zeta-1}$; für $p\in V^{\zeta\zeta}$ schließlich

$$f^\zeta(p)=p+\zeta\overrightarrow{w^{\zeta\zeta}(p)\,f'\,w^{\zeta\zeta}(p)}.\tag{3}$$

Zum Nachweis der Stetigkeit der Abbildung f^ζ, ζ eine Zahl aus $(0,1]$, genügt es zu zeigen, daß (1) und (2) auf $\overline{V}^\zeta-V^\zeta$ sowie (2) und (3) auf $\overline{V}^{\zeta\zeta}-V^{\zeta\zeta}$ übereinstimmen: Für $p\in\overline{V}^\zeta-V^\zeta$ ist (2) zufolge $f^\zeta(p)$ der Punkt $p+\overrightarrow{p^*\,f(p^*)}$ mit $p^*=w^{\lambda(\zeta,\zeta)}(p)$, wegen $\lambda(\zeta,\zeta)=1$ und $w^1(p)=p$ daher (2) mit (1) übereinstimmend. In den p von $\overline{V}^{\zeta\zeta}-V^{\zeta\zeta}$ ist (2) zufolge $f^\zeta(p)$ der Punkt $p+\zeta\overrightarrow{p^{**}f'(p^{**})}$ mit $p^{**}=w^{\lambda(\zeta,\zeta\zeta)}(p)$, wegen $\lambda(\zeta,\zeta\zeta)=\zeta\zeta$, $w^{\zeta\zeta}(p)=w(p)$ und $f\,w(p)=f'w(p)$ also (2) mit (3) gleich.

Der Durchmesser von $f^\zeta(\overline{V}^{\zeta\zeta})$ geht gegen 0, wenn ζ gegen 0 geht. Hieraus und aus $f^0(q)=q$ folgt leicht, wenn F die durch $F(p,\tau)=f^\tau(p)$, (p,τ) ein Punkt mit $p\in\overline{V}$ und $0\leq\tau\leq 1$, bestimmte Abbildung bezeichnet, die Stetigkeit von F in $(q,0)$. Die Stetigkeit von F in den übrigen Punkten folgt leicht aus der Stetigkeit der Abbildungen f^τ, $0\leq\tau\leq 1$, und (1) bis (3). Mithin ist $(f^\tau,\ 0\leq\tau\leq 1)$ eine Abbildungsschar im Sinne der gebräuchlichen Erklärung einer solchen.

Verbleibt zum Beweis von Satz 1 zu zeigen, daß für $0<\tau\leq 1$ die Abbildung f^τ keinen Fixpunkt hat: Für $p\in\overline{V}-V^{\tau\tau}$ ist $f^\tau(p)$ gleich einem Punkt $p+\alpha\overrightarrow{p'\,f(p')}$ mit $\alpha>0$ und $p'\in\overline{V}-q$, wegen $p'\neq f(p')$ daher $p\neq f^\tau(p)$. Für $p\in V^{\tau\tau}$ ist $f^\tau(p)$ ein Punkt $p+\tau\overrightarrow{p''\,f'(p'')}$ mit $p''\in\overline{V}$, wegen $\tau>0$ und $p''\neq f'(p'')$ also gleichfalls $p\neq f^\tau(p)$.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Satz 2. *Es seien V eine offene n-dimensionale Vollkugel im R^n, $n>0$; $q, q_1, \ldots, q_m$ paarweis verschiedene Punkte in V und f, f' stetige Abbildungen von $\overline{V}$ in den R^n mit $f(p)=f'(p)$, $p\in\overline{V}-V$, und den Eigenschaften: der einzige Fixpunkt von f ist q; die Punkte $q_1, \ldots, q_m$ sind die Fixpunkte der Abbildung f'. Für alle (τ, i) mit $0<\tau<1$ und $i=1, \ldots, m$ bezeichne q^τ den Punkt $(1-\tau)q+\tau q_i$. Dann gibt es eine Schar $(f^\tau,\ 0\leq\tau\leq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von $\overline{V}$ in den R^n, von der gilt: $f^0=f$ und $f^1=f'$; $f^\tau(p)=f(p)$ in allen (p,τ) mit $p\in\overline{V}-V$ und $0\leq\tau\leq 1$; für $0<\tau<1$ sind die Punkte $q_1^\tau, \ldots, q_m^\tau$ die Fixpunkte der Abbildung f^τ.*

Beweis. Man kann annehmen, daß q der Mittelpunkt von V ist. Die Bedeutung von w, V^σ und w^σ sei die gleiche wie im Beweis zu Satz 1. Dann ist die im Beweis zu Satz 1 durch (1) bis (3) erklärte Abbildungsschar $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ schon von der geforderten Art.

Aus Satz 2 folgt, wenn V und q die in Satz 2 erklärte Bedeutung haben: Zu jeder stetigen Abbildung f von $\overline{V}$ in den R^n, die q zum einzigen Fixpunkt hat, gibt es paarweis verschiedene Punkte $q_1, \ldots, q_m$ in V und eine Schar $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von $\overline{V}$ in den R^n mit den Eigenschaften: $f^\tau(p) = f(p)$ in allen (p, τ), für die entweder $p \in V$ und $\tau = 0$ oder $p \in \overline{V} - V$ und $0 \leq \tau \leq 1$; für $0 < \tau \leq 1$ sind die Punkte $(1-\tau)\, q + \tau\, q_i$, $i = 1, \ldots, m$, die Fixpunkte der Abbildung f^τ; jeder Fixpunkt der Abbildung f^1 ist linear.

Denn aus bekannten Sätzen ergibt sich die Existenz einer stetigen Abbildung f' von $\overline{V}$ in den R^n, die auf $\overline{V} - V$ mit f übereinstimmt und deren jeder Fixpunkt linear ist.

Ferner folgt aus Satz 2: Zu jeder stetigen Abbildung f von V in den R^n, die auf $\overline{V} - V$ keinen Fixpunkt und auf V nur endlich viele Fixpunkte $q_1, \ldots, q_m$ besitzt, existiert ein Punkt q in V und eine Schar $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von $\overline{V}$ in den R^n mit den Eigenschaften: $f^\tau(p) = f(p)$ in allen (p, τ), für die entweder $p \in \overline{V}$ und $\tau = 0$ oder $p \in \overline{V} - V$ und $0 \leq \tau \leq 1$; für $0 \leq \tau < 1$ sind die Punkte $(1-\tau)\, q_i + \tau\, q$, $i = 1, \ldots, m$, die Fixpunkte der Abbildung f^τ; der einzige Fixpunkt der Abbildung f^1 ist der Punkt q.

Bezeichnet nämlich q irgendeinen Punkt aus V und $w(p)$ für $p \in \overline{V} - q$ die Projektion von p auf $\overline{V} - V$ aus q, so ist die durch $f'(q) = q$ und

$$f'(p) = q + (1 - \sigma)\, \overrightarrow{q\, f\, w(p)},$$

p ein Punkt aus $\overline{V} - q$ mit $p = q + (1-\sigma)\, \overrightarrow{q\, w(p)}$, bestimmte Abbildung f' eine stetige Abbildung von $\overline{V}$ in den R^n, die auf $\overline{V} - V$ mit f übereinstimmt und deren einziger Fixpunkt der Punkt q ist.

Für den folgenden Satz bezeichne K einen simplizialen Komplex, der in einem Euklidischen Raum liegt, und P das durch K bestimmte Polyeder. Eine stetige Abbildung von P in sich derart, daß für alle Punkte aus P stets Punkt und Bildpunkt in benachbarten Simplexen von K liegen, bezeichnen wir als eine zur Identität „benachbarte" Abbildung; dabei nennen wir wie in Abschnitt 1 zwei Punkte aus P, deren zu K gehörige Trägersimplexe einen nichtleeren Durchschnitt haben, in „benachbarten Simplexen von K liegende Punkte". Ferner seien S und T Grundsimplexe aus K mit $\dim(S \cdot T) \geq 1$; hierauf a, b, q bzw. ein innerer Punkt von S, T und $S \cdot T$; und A die Menge aller Punkte p aus P, deren Trägersimplex das Simplex $S \cdot T$ enthält. Alsdann wollen wir zeigen:

Satz 3. *Es sei f eine zur Identität benachbarte Abbildung von P in sich mit a als einzigem Fixpunkt auf $\bar{A}$; überdies sei a linear bei f. Dann existiert eine Kurve $(q^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ und eine Schar $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ zur Identität benachbarter Abbildungen f^τ von P in sich mit den Eigenschaften: $f^\tau(p) = f(p)$ in*

allen (p, τ), *für die entweder* $p \in P$ *und* $\tau = 0$ *oder* $p \in P - A$ *und* $0 \leq \tau \leq 1$; *für* $0 \leq \tau \leq 1$ *ist der Punkt* q^τ *der einzige Fixpunkt von* f^τ *auf* $\bar{A}$ *und linear bei* f^τ; *es ist* $q^0 = a$, $q^{\frac{1}{2}} = q$, $q^1 = b$, *für* $0 < \tau < \frac{1}{2}$ *liegt* q^τ *in* $I(S)$ *und für* $\frac{1}{2} < \tau < 1$ *in* $I(T)$.

Beweis. Die Menge A ist offen in P. Man kann annehmen, wie sich leicht aus dem zu Ende von Abschnitt 1 angeführten Hilfssatz ergibt, daß eine in P offene Menge V existiert mit $\overline{aq} + \overline{qb} \subset V \subset A$ und

$$f(\bar{V}) \subset A. \tag{1}$$

Es seien weiter S_0 und T_0 Simplexe der Dimension 2, von denen gilt: $S_0 \subset S$, $T_0 \subset T$, $\dim(S_0 \cdot T_0) = 1$, $S_0 + T_0 \subset A$; a liegt im Innern von S_0, b im Innern von T_0 und q im Innern von $S_0 \cdot T_0$.

Da a bei f linear ist, gibt es eine offene Vollkugel W mit $\dim W = \dim S$, $a \in W$ und

$$\overline{W} \subset S - S \cdot T, \qquad f(\overline{W}) \subset S_0 - S_0 \cdot T_0.$$

Den Schnittpunkt der Sphäre $\overline{W} - W$ mit der Strecke $\overline{aq}$ nennen wir d.

Wegen $p \neq f(p)$, $p \in \overline{dq} + \overline{qb}$, kann man annehmen, daß $f(\overline{dq} + \overline{qb})$ ein Streckenzug ist, der mit $\overline{dq} + \overline{qb}$ höchstens endlich viele gemeinsame Punkte hat.

Hierauf wollen wir zeigen:

II. Es gibt eine Schar $(g_0^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen g_0^τ von $\overline{dq} + \overline{qb}$ in P mit den Eigenschaften: $g_0^\tau(d) = f(d)$ für $0 \leq \tau \leq 1$;

$$g_0^0(p) = f(p) \quad \text{und} \quad g_0^1(p) \in S_0 + T_0$$

für $p \in \overline{dq} + \overline{qb}$; in allen (p, τ) mit $p \in \overline{dq} + \overline{qb}$ und $0 \leq \tau \leq 1$ ist $p \neq g_0^\tau(p)$ und $g_0^\tau(p)$ in A gelegen.

Beweis von II. Es sei α die Zahl $\frac{1}{2}$. Wegen $\dim(S \cdot T) \geq 1$ existiert, wie man sich leicht überlegt, eine Schar $(g_0^\tau,\ 0 \leq \tau \leq \alpha)$ stetiger Abbildungen g_0^τ von $\overline{dq} + \overline{qb}$ in P mit den Eigenschaften: $g_0^\tau(d) = f(d)$ für $0 \leq \tau \leq \alpha$; $g_0^0(p) = f(p)$ für $p \in \overline{dq} + \overline{qb}$;

$$g_0^\alpha(p) \in S_0 - S_0 \cdot T_0$$

für alle Punkte p aus $\overline{q_1 q} + \overline{q q_2}$, wobei q_1 ein Punkt im Innern von $\overline{dq}$ und q_2 ein Punkt im Innern von $\overline{qb}$; in allen (p, τ) mit $p \in \overline{dq} + \overline{qb}$ und $0 \leq \tau \leq \alpha$ ist $p \neq g_0^\tau(p)$ und $g_0^\tau(p)$ in A gelegen.

Hierauf ergibt eine einfachere Deformation der Kurve $(g_0^\alpha(p),\ p \in \overline{dq} + \overline{qb})$ eine Fortsetzung von $(g_0^\tau,\ 0 \leq \tau \leq \alpha)$ über $(\alpha, 1]$, so daß II gilt.

Aus II folgt leicht:

II'. Es existiert eine in P offene Menge X mit $\overline{aq} + \overline{qb} \subset X \subset A$ und eine Schar $(g^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von P in sich mit den Eigenschaften: $g^\tau(p) = f(p)$ in allen (p, τ), für die entweder $p \in P$ und $\tau = 0$ oder $p \in P - A$ und $0 \leq \tau \leq 1$; für $0 \leq \tau \leq 1$ ist a der einzige Fixpunkt von g^τ auf

A und bei g^τ linear; für $0 \leqq \tau \leqq 1$ ist g^τ zur Identität benachbart;

$$g^1(\overline{X}) < S_0 + T_0. \tag{2}$$

Wie man sich leicht überlegt, gibt es eine in P offene Menge Y, von der $\overline{a\,q} + \overline{q\,b} < Y < X$ und, wenn $Y \cdot (S_0 + T_0)$ mit Y_0 bezeichnet wird, weiter gilt: man kann $\overline{Y}$ so durch eine stetige Abbildung w auf $\overline{Y}_0$ abbilden, daß

$$w(p) = p \quad \text{für} \quad p \in \overline{Y}_0 \quad \text{und} \quad \overline{p\,w(p)} < X \quad \text{für} \quad p \in \overline{Y}.$$

Für alle (p, τ) mit $p \in \overline{Y}$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ werde der in X liegende Punkt $(1-\tau)\,p + \tau\,w(p)$ mit $w^\tau(p)$ bezeichnet.

Dann sei erstens $(h_0^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ eine Schar stetiger Abbildungen h_0^τ von $\overline{Y}_0$ in $S_0 + T_0$, von der gilt: $h_0^\tau(p) = g^1(p)$ in allen (p, τ), für die entweder $p \in \overline{Y}_0$ und $\tau = 0$ oder $p \in \overline{Y}_0 - Y_0$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$; für $0 \leqq \tau \leqq \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2} < \tau \leqq 1$ ist der Punkt

$$(1-2\tau)\,a + 2\tau\,q \quad \text{bzw.} \quad (2-2\tau)\,q + (2\tau-1)\,b,$$

den wir auch mit q_0^τ bezeichnen, der einzige Fixpunkt von h_0^τ und linear bei h_0^τ. Wegen $\dim(S_0 \cdot T_0) = 1$ existiert eine solche Schar.

Zweitens erklären wir eine Schar $(h_1^\tau,\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ stetiger Abbildungen h_1^τ von $\overline{Y}$ in $S_0 + T_0$. Es sei:

$$h_1^\tau = g^1 w^{2\tau} \quad \text{für} \quad 0 \leqq \tau \leqq \tfrac{1}{2}, \qquad h_1^\tau = h_0^{2\tau-1} w^1 \quad \text{für} \quad \tfrac{1}{2} < \tau \leqq 1.$$

Wegen $h_0^0(p) = g^1(p)$, $p \in \overline{Y}_0$, ist $g^1 w^1 = h_0^0 w^1$. Es ist

$$h_1^\tau(p) = g^1(p) \quad \text{für} \quad p \in \overline{Y}_0 - Y_0 \quad \text{und} \quad 0 \leqq \tau \leqq 1. \tag{3}$$

Denn in allen (p, τ) mit $p \in \overline{Y}_0 - Y_0$ und $0 \leqq \tau \leqq 1$ ist $w^\tau(p) = p$ und $h_0^\tau(p) = g^1(p)$.

Wir wollen zeigen:

1. Für $0 \leqq \tau \leqq \frac{1}{2}$ ist der Punkt a der einzige Fixpunkt der Abbildung h_1^τ und bei h_1^τ linear.

2. Für $\frac{1}{2} < \tau \leqq 1$ ist der Punkt $q_0^{2\tau-1}$ der einzige Fixpunkt der Abbildung h_1^τ und bei h_1^τ linear.

Zu 1. Für $p \in \overline{Y} - \overline{Y}_0 < \overline{Y}$ ist $w^{2\tau}(p) \in X$, wegen (2) also $g^1 w^{2\tau}(p)$ in $S_0 + T_0$ gelegen und mithin, da $S_0 + T_0$ und $\overline{Y} - \overline{Y}_0$ zueinander fremd, $p \neq h_1^\tau(p)$. Für $p \in \overline{Y}_0$ ist $w^{2\tau}(p) = p$, also $h_1^\tau(p) = g^1(p)$ und daher $p = h_1^\tau(p)$ nur, wenn $p = a$. — Es ist a bei h_1^τ linear: Da a bei g^1 linear, gibt es eine in P offene Menge $Z \ni a$ und eine Strecke Z^1 mit $g^1(Z) < Z^1$. Hierauf sei Z' eine in P offene Menge $\ni a$ derart, daß $w^\sigma(p) \in Z$ für alle (p, σ) mit $p \in Z'$ und $0 \leqq \sigma \leqq 1$. Dann ist $h_1^\tau(Z') < Z^1$, also a bei h_1^τ linear.

Zu 2. Für $p \in \overline{Y} - \overline{Y}_0 < \overline{Y}$ ist $w^1(p) \in \overline{Y}_0$, der Erklärung der Abbildungen h_0^σ zufolge also $h_0^{2\tau-1} w^1(p) \in S_0 + T_0$, daher $p \neq h_1^\tau(p)$. Für $p \in \overline{Y}_0$ ist $w^1(p) = p$, also $h_1^\tau(p) = h_0^{2\tau-1}(p)$ und daher $p = h_1^\tau(p)$ nur, wenn p der Punkt $q^{2\tau-1}$ ist. —

Es ist $q^{2\tau-1}$ bei $h_1^{2\tau-1}$ linear: Da $q^{2\tau-1}$ bei $h_0^{2\tau-1}$ linear, gibt es eine in S_0+T_0 offene Menge $Z_0 \ni q^{2\tau-1}$ und eine Strecke Z_0^1 mit $h_0^{2\tau-1}(Z_0) \subset Z_0^1$. Hierauf sei Z_0' eine in P offene Menge $\ni q^{2\tau-1}$ derart, daß $w^1(p) \in Z_0$ für $p \in Z_0'$. Dann ist $h_1^\tau(Z_0') \subset Z_0^1$, also $q^{2\tau-1}$ bei h_1^τ linear.

Um drittens eine Schar $(h^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen h^τ von P in sich zu erklären, sei zunächst Y_1 eine in P offene Menge mit $Y_0 \subset Y_1 \subset Y$ und

$$\overline{Y}_1 \cdot (\overline{Y} - Y) = \overline{Y}_0 - Y_0; \tag{4}$$

ferner jedem Punkt p aus $\overline{Y}$ eine Zahl $\mu(p)$ aus $[0, 1]$ zugeordnet. Und zwar sei

$$\mu(p) = \varrho(p, \overline{Y} - \overline{Y})/(\varrho(p, \overline{Y} - Y) + \varrho(p, \overline{Y}_1)),$$

wenn $\varrho(p, \overline{Y} - Y) + \varrho(p, \overline{Y}_1) > 0$, sonst $= 0$. In allen (p, τ) mit $p \in \overline{Y}$ und $0 \leq \tau \leq 1$ sei hierauf

$$h^\tau(p) = h_1^{\mu(p)\tau}(p). \tag{5}$$

In den (p, τ) mit $p \in P - Y$ und $0 \leq \tau \leq 1$ setzen wir

$$h^\tau(p) = g^1(p). \tag{6}$$

Die Erklärungen (5) und (6) stimmen in den (p, τ) mit $p \in \overline{Y} - Y$ und $0 \leq \tau \leq 1$ überein; in diesen (p, τ) ist nämlich $\mu(p) = 0$ und daher $h_1^{\mu(p)\tau}(p) = h_1^0(p) = g^1 w^0(p) = g^1(p)$.

Mit H bezeichnen wir die durch $H(p, \tau) = h^\tau(p)$, $p \in P$ und $0 \leq \tau \leq 1$, bestimmte Abbildung. Zum Nachweis der Stetigkeit der Abbildung H genügt es dann, die Stetigkeit in den (p, τ) mit $p \in \overline{Y}$ und $0 \leq \tau \leq 1$ zu prüfen; und also weiter in denjenigen Punkten (p, τ) mit $p \in \overline{Y}$ und $0 \leq \tau \leq 1$, für die die Abbildung μ in dem Punkt p unstetig ist. Wegen (4) ist die Menge der Unstetigkeitspunkte von μ die Menge $\overline{Y}_0 - Y_0$. Daher folgt die Stetigkeit von H aus (3).

Wegen $g^1(p) = f(p)$, $p \in P - A$, und $Y \subset A$ sowie (6) ist $h^\tau(p) = f(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in P - A$ und $0 \leq \tau \leq 1$.

Da für $0 \leq \tau \leq 1$ die Abbildung h^τ auf der in P offenen Menge Y_1 mit h_1^τ übereinstimmt und auf $\overline{Y} - Y_1$ kein Fixpunkt von h^τ liegt, folgt aus 1. und 2.: Für $0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}$ ist der Punkt a der einzige Fixpunkt der Abbildung h^τ auf $\overline{Y}$ und bei h^τ linear; für $\frac{1}{2} < \tau \leq 1$ ist der Punkt $q_0^{2\tau-1}$ der einzige Fixpunkt von h^τ auf $\overline{Y}$ und bei h^τ linear.

Dann ist $(f^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1) = (g^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1;\ h^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ eine Abbildungsschar der in Satz 3 geforderten Art.

3. Abbildungsscharen mit linearen Fixpunkten.

Eine stetige Abbildung f eines endlichen Polyeders P in sich bezeichnen wir als „regulär", wenn jeder Fixpunkt von f regulär. Sind K eine simpliziale Zerlegung von P und f_1, f_2 stetige Abbildungen von P in sich derart,

daß für alle Punkte p aus P stets die beiden Punkte $f_1(p)$ und $f_2(p)$ in benachbarten Simplexen von K liegen, so bezeichnen wir f_1 und f_2 als „benachbarte" Abbildungen. Der vorliegende Abschnitt handelt im wesentlichen über die zur Identität benachbarten regulären simplizialen Abbildungen von P in sich. Auf die Einschränkung, die betrachteten Abbildungen seien regulär und simplizial, werden wir erst im nächsten Abschnitt auf Grund weiterer Überlegungen verzichten können. Näherhin untersuchen wir in dem vorliegenden Abschnitt diejenigen stetigen Abbildungen f, von denen gilt: 1. Es ist f zur Identität benachbart; 2. jeder Fixpunkt von f ist linear. Solche Abbildungen kann man aber in sehr übersichtlicher Weise in reguläre simpliziale Abbildungen überführen, und umgekehrt läßt sich jede reguläre simpliziale Abbildung auf übersichtliche Art in eine Abbildung mit nur linearen Fixpunkten überführen: Jede Abbildung f der einen Art kann man so durch eine Abbildungsschar $(f^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ in eine Abbildung der anderen Art deformieren, daß für $0 \leq \tau < 1$ die Fixpunkte der Abbildung f^τ gerade die Fixpunkte von f sind. Dies folgt leicht aus bekannten Sätzen.

Wir wollen zeigen:

Satz II. *Es sei K ein eindimensional zusammenhängender endlicher simplizialer Komplex in einem Euklidischen Zahlenraum und P das durch K bestimmte Polyeder; ferner f eine zur Identität benachbarte Abbildung von P in sich mit nur endlich vielen Fixpunkten, deren jeder überdies linear ist. Dann existieren Kurven $(q_i^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$, $i = 1, \ldots, m$, und eine Schar $(f^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ zur Identität benachbarter Abbildungen f^τ von P in sich mit $f^0 = f$ und den Eigenschaften: für $0 \leq \tau \leq 1$ sind die paarweis verschiedenen Punkte $q_1^\tau, \ldots, q_m^\tau$ die Fixpunkte der Abbildung f^τ; die Abbildung f^1 hat genau einen Fixpunkt q, und es ist $q_i^1 = q$ für $i = 1, \ldots, m$.*

Beweis. Man kann annehmen, daß jeder der Fixpunkte $q_1, \ldots, q_m$ der Abbildung f im Innern eines Grundsimplexes von K liegt. Dann seien α, β Zahlen mit $0 < \alpha < \beta < 1$ und S ein Grundsimplex von K. Wie man sich leicht überlegt, existieren eine simpliziale Unterteilung K' von K und in K' Grundsimplexe S_{ik}, $k = 1, \ldots, m_i$, $i = 1, \ldots, m$, mit den Eigenschaften:

$$q_i \in I(S_{i1}) \quad \text{und} \quad S_{im_i} < S \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, m;$$

für $i = 1, \ldots, m$ haben je zwei aufeinanderfolgende Simplexe der Kette $S_{i1}, \ldots, S_{im_i}$ einen Durchschnitt, dessen Dimension ≥ 1 ist; für $j \neq l$ hat kein Simplex aus K' gleichzeitig mit $\sum_k S_{jk}$ und $\sum_k S_{lk}$ gemeinsame Punkte.

Für $p \in P$ liegen die Punkte p und $f(p)$ in benachbarten Simplexen von K. Dem in Abschnitt 1 angeführten Hilfssatz zufolge gibt es daher eine für alle (p, τ), $p \in P$ und $0 \leq \tau \leq 1$, erklärte stetige Abbildung a in P mit den Eigenschaften:

(1) $$a(p, 0) = f(p) \quad \text{und} \quad a(p, 1) = p;$$

(2) $$a(p, \tau) = p \quad \text{für} \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad \text{wenn} \quad p = f(p);$$

(3) $$a(p, \tau_1) \neq a(p, \tau_2)$$

in allen (p, τ_1, τ_2) mit $p \neq f(p)$ und $\tau_1 \neq \tau_2$; ist T_0 das Trägersimplex von $a(p, 0)$ und T_1 das von $a(p, 1)$ in K, so gibt es im Innern des Simplexes $T_0 \cdot T_1$ einen Punkt q derart, daß $a(p, \tau)$ in $\overline{f(p)\,q} + \overline{q\,p}$ liegt für $0 \leq \tau \leq 1$.

Hierauf bezeichne ζ eine Zahl mit $0 < \zeta < 1$, so daß für $p \in P$ die Punkte p und $a(p, \zeta)$ in benachbarten Simplexen von K' liegen. Wegen (1), (2) und der Kompaktheit von P existiert eine solche Zahl. Es bezeichne ferner U_i und V_i, $i = 1, \ldots, m$, in P offene Mengen mit $q_i \in U_i$, $\overline{U}_i \subset V_i$ und $\overline{V}_i + f(\overline{V}_i) < I(S_{i1})$; weiter $\lambda(p)$ für $p \in P$ die Zahl

$$\varrho(p, \sum \overline{U}_i) / \left(\varrho(p, \sum \overline{U}_i) + \varrho(p, P - \sum V_i)\right).$$

Für $0 \leq \tau \leq \alpha$ sei dann f^τ die durch

$$f^\tau(p) = a\left(p, \frac{\zeta}{\alpha} \lambda(p)\, \tau\right), \qquad p \in P, \tag{4}$$

bestimmte Abbildung von P in sich.

Wegen (1) ist $f_0 = f$. Wegen (3) sind für $0 \leq \tau \leq \alpha$ die Punkte $q_1, \ldots, q_m$ die Fixpunkte der Abbildung f^τ. Aus der Erklärung von a folgt weiter: Für alle (p, τ) mit $p \in P$ und $0 \leq \tau \leq \alpha$ sind die Punkte p und $f^\tau(p)$ in benachbarten Simplexen von K gelegen. Schließlich folgt aus $f^\alpha(p) = a(p, \zeta)$, $p \in P - \sum V_i$, und der Erklärung von ζ und V_i, daß für $p \in P$ die Punkte p und $f^\alpha(p)$ in benachbarten Simplexen von K' liegen. Wegen $f^\alpha(p) = f^0(p)$, $p \in \sum U_i$, sind die Punkte q_i bei f^α linear.

Alsdann liefert eine wiederholte Anwendung von Satz 3 Kurven $(q_i^\tau, \alpha \leq \tau \leq \beta)$, $i = 1, \ldots, m$, und eine Fortsetzung von $(f^\tau, 0 \leq \tau \leq \alpha)$ über $(\alpha, \beta]$, von der gilt: Für alle (p, τ) mit $p \in P$ und $\alpha < \tau < \beta$ sind die Punkte p und $f^\tau(p)$ in benachbarten Simplexen von K' — und also erst recht in benachbarten Simplexen von K — gelegen; $q_i^\alpha = q_i$ und $q_i^\beta \in I(S)$ für $i = 1, \ldots, m$; für $\alpha < \tau \leq \beta$ sind die Punkte $q_1^\tau, \ldots, q_m^\tau$ paarweis verschieden und die Fixpunkte der Abbildung f^τ.

In den Punkten (p, τ) mit $p \in P - S$ und $\beta < \tau \leq 1$ sei $f^\tau(p) = f^\beta(p)$. Bezeichnen wir mit g die durch $g(p) = f^\beta(p)$, $p \in S$, bestimmte Abbildung von S in P, so bedarf es zum Beweis von Satz II nur noch des Nachweises, daß eine Schar $(g^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von S in P existiert, über die gilt: $g^\tau(p) = g(p)$ in allen (p, τ), für die entweder $p \in S$ und $\tau = 0$ oder $p \in B(S; P)$ und $0 \leq \tau \leq 1$ ist; für alle (p, τ) mit $p \in S$ und $0 \leq \tau \leq 1$ liegen die Punkte p und $g^\tau(p)$ in benachbarten Simplexen aus K; es gibt Kurven $(r_i^\tau, 0 \leq \tau \leq 1)$, $i = 1, \ldots, m$, mit $r_i^1 = q$, $i = 1, \ldots, m$, derart, daß für $0 \leq \tau < 1$ die Punkte $r_1^\tau, \ldots, r_m^\tau$ paarweis verschieden und die Fixpunkte der Abbildung g^τ sind; der einzige Fixpunkt der Abbildung g^1 ist der Punkt q.

Die Existenz der Abbildungen g^τ, $0 \leq \tau \leq 1$, ergibt sich wie folgt. Da für $p \in S$ die Punkte p und $g(p)$ in benachbarten Simplexen von K liegen, existiert eine für alle (p, τ), $p \in S$ und $0 \leq \tau \leq 1$, erklärte stetige Abbildung b in P, von der (1) bis (3), wenn man darin bzw. a, f durch b, g ersetzt, gilt und weiter: für alle (p, τ) mit $p \in S$ und $0 \leq \tau \leq 1$ liegen die Punkte p und $b(p, \tau)$ in benachbarten Simplexen von K.

Nun bezeichne T ein Simplex im Innern von S mit $\dim T = \dim S$ derart, daß die Punkte $q_1^\beta, \ldots, q_m^\beta$ im Innern von T liegen; und η eine Zahl mit $0 < \eta < 1$, so daß

$$b(p, \eta) \in I(S), \qquad p \in T. \tag{5}$$

Hierauf sei λ eine stetige Abbildung von S in $[0, 1]$ mit $\lambda(p) = 0$, $p \in B(S; P)$, und $\lambda(p) = 1$ für $p \in T$; ferner $g^\tau(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in S$ und $0 \leq \tau \leq \eta$ der Punkt $b(p, \eta\, \lambda(p)\, \tau)$.

Dann ist, wie sofort aus der Bedeutung der Abbildungen b, λ und der Zahl η hervorgeht, $(g^\tau,\ 0 \leq \tau \leq \eta)$ eine Schar stetiger Abbildungen g^τ von S in P, von der

$$g^\eta(T) < S \tag{6}$$

gilt und ferner: $g^\tau(p) = g(p)$ in allen (p, τ), für die entweder $p \in S$ und $\tau = 0$ oder $p \in B(S; P)$ und $0 \leq \tau \leq \eta$; für alle (p, τ) mit $p \in S$ und $0 \leq \tau \leq \eta$ liegen die Punkte p und $g^\tau(p)$ in benachbarten Simplexen von K; für $0 \leq \tau \leq \eta$ sind die Punkte $q_1^\beta, \ldots, q_m^\beta$ die Fixpunkte von g^τ.

Dann liefert eine Anwendung von Satz 2 eine stetige Fortsetzung von $(g^\tau,\ 0 \leq \tau \leq \eta)$ über $(\eta, 1]$ von der geforderten Art.

Damit ist Satz II bewiesen. Aus diesem folgt leicht nachstehender schon in der Einleitung angeführte

Satz II'. *Es sei K ein eindimensional zusammenhängender endlicher simplizialer Komplex in einem Euklidischen Zahlenraum und P das durch K bestimmte Polyeder; ferner f die Identität von P und ε eine positive Zahl. Dann gibt es Kurven $(q_i^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$, $i = 1, \ldots, m$, und eine Schar $(f^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen von P in sich mit $f^0 = f$, $\varrho(f, f^\tau) < \varepsilon$, $0 \leq \tau \leq 1$, und den weiteren Eigenschaften: für $0 < \tau < 1$ sind die paarweis verschiedenen Punkte $q_1^\tau, \ldots, q_m^\tau$ die Fixpunkte der Abbildung f^τ; die Abbildung f^1 hat genau einen Fixpunkt q, und es ist $q_i^1 = q$ für $i = 1, \ldots, m$.*

Beweis. Man kann annehmen, daß die Durchmesser der Simplexe von K kleiner als $\varepsilon/2$ sind. Dann sei f' eine zur Identität benachbarte Abbildung von P in sich mit nur endlich vielen Fixpunkten $q_1, \ldots, q_m$, deren jeder überdies linear ist. Eine Anwendung des Hilfssatzes aus Abschnitt 1 liefert eine Schar $(f^\tau,\ 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2})$ zur Identität benachbarter Abbildungen f^τ von P in sich mit $f^0 = f$, $f^{\frac{1}{2}} = f'$ und der Eigenschaft, daß für $0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}$ die Punkte $q_1, \ldots, q_m$ die einzigen Fixpunkte von f^τ sind.

Hierauf führt eine Anwendung von Satz II den Beweis zu Ende.

4. Normale Abbildungsscharen.

Eine zur Identität benachbarte Abbildung f, deren Fixpunkte linear sind, kann man, wie oben gezeigt wurde, derart durch eine Schar zur Identität benachbarter Abbildungen in eine Abbildung mit genau einem Fixpunkt überführen, daß die Fixpunkte der Abbildung f längs Kurven zum Vereinigungspunkt geführt werden. An diesem Ergebnis stört die Voraussetzung,

die Fixpunkte der Abbildung f seien linear. Wir werden aber im vorliegenden Abschnitt zeigen, daß man die in Rede stehende Voraussetzung entfernen kann. Wie in den voraufgegangenen Abschnitten nennen wir, wenn K einen simplizialen Komplex und P das durch K bestimmte Polyeder bezeichnet, eine stetige Abbildung von P in sich, bei der für alle Punkte aus P stets Punkt und Bildpunkt in benachbarten Simplexen von K liegen, eine „zur Identität benachbarte Abbildung".

Dann gilt, eine Verschärfung von Satz II, folgender

Satz III. *Es sei K ein eindimensional zusammenhängender endlicher simplizialer Komplex, der in einem Euklidischen Zahlenraum liegt, und P das zu K gehörige Polyeder; f eine zur Identität benachbarte Abbildung von P in sich mit nur endlich vielen Fixpunkten. Dann existiert eine Schar $(f^\tau,\ 0\leq\tau\leq 1)$ zur Identität benachbarter Abbildungen f^τ von P in sich mit den Eigenschaften: $f^0=f$; die Abbildung f^1 hat genau einen Fixpunkt q; es gibt Kurven $(q_i^\tau,\ 0\leq\tau\leq 1)$, $i=1,\ldots,m$, derart, daß für $0\leq\tau<1$ die paarweis verschiedenen Punkte $q_1^\tau,\ldots,q_m^\tau$ die Fixpunkte von f^τ.*

Wie eine Durchsicht des Beweises von Satz II ergibt, braucht es zum Beweis von Satz II nur den Nachweis der nachstehenden Sätze 4 und 5.

Wir beweisen zunächst einen

Hilfssatz. *Es seien N ein Nebensimplex von K, q ein Punkt im Innern von N und $S_1,\ldots,S_m$ die Grundsimplexe von K mit N als Seite; A das Innere bezüglich P von $\sum S_i$; A^0 die Menge der Punkte $q+\frac{1}{2}\overrightarrow{qp}$, $p\in A$, und a ein Punkt aus A^0; ferner f eine stetige Abbildung von $\bar{A}^0$ in A mit a als einzigem Fixpunkt. Dann gibt es eine Schar $(f^\tau,\ 0\leq\tau\leq 1)$ stetiger Abbildungen f^τ von $\bar{A}^0$ in A mit den Eigenschaften: $f^\tau(p)=f(p)$ in allen (p,τ), für die entweder $p\in\bar{A}^0$ und $\tau=0$ oder $p\in\bar{A}^0-A^0$ und $0\leq\tau\leq 1$; für $0\leq\tau\leq 1$ ist der Punkt $q+(1-\tau)\overrightarrow{qa}$ der einzige Fixpunkt der Abbildung f^τ; es ist $f^1(q)=q$ und*

$$f^1(p)=q+(1-\sigma)\overrightarrow{q\,f\,w(p)},$$

wenn p ein Punkt aus $\bar{A}^0-q$ mit $p=q+(1-\sigma)\overrightarrow{q\,w(p)}$ und $w(p)$ der Schnittpunkt des Halbstrahles aus q durch p mit $\bar{A}^0-A^0$ ist.

Beweis. Für $0\leq\tau<1$ werde die Menge der Punkte $q+(1-\tau)\overrightarrow{qp}$, $p\in A^0$, mit A^τ bezeichnet. In allen (p,τ) mit $p\in\bar{A}^0$ und $0\leq\tau<1$ sei $u^\tau(p)$ der Punkt $q+(1-\tau)\overrightarrow{qp}$. Für $0\leq\tau<1$ sei w^τ die Umkehrung der Abbildung u^τ, also

$$w^\tau(p)=q+\overrightarrow{qp}/(1-\tau),\qquad p\in\bar{A}^\tau.$$

Für $p\in\bar{A}^0-q$ bezeichne $w(p)$ den Schnittpunkt des Halbstrahles aus q durch p mit $\bar{A}^0-A^0$.

Es sei nun ζ eine Zahl aus $[0,1)$. Dann erklären wir die Abbildung f^ζ auf $\bar{A}^0$ wie folgt. Für $p\in\bar{A}^\sigma-A^\sigma$, $0\leq\sigma\leq\zeta$, sei

$$f^\zeta(p)=q+(1-\sigma)\overrightarrow{q\,f\,w(p)};\tag{1}$$

für $p \in \bar{A}^\zeta$ sei

$$f^\zeta(p) = q + (1-\zeta)\,\overrightarrow{q\, f\, w^\zeta(p)}. \tag{2}$$

Es sei $f^1(q) = q$ und für $p \in \bar{A}^\sigma - A^\sigma$, $0 \leq \sigma < 1$, weiter

$$f^1(p) = q + (1-\sigma)\,\overrightarrow{q\, f\, w(p)}. \tag{3}$$

Da für jeden Punkt p aus $\bar{A}^0$ alle Punkte der Strecke $\overline{q\, f(p)}$ in A liegen, ist $f^\tau(p)$ in allen (p, τ) mit $p \in \bar{A}^0$ und $0 \leq \tau \leq 1$ durch (1) bis (3) erklärt. Zum Beweis, daß $f^\tau(p)$ in allen (p, τ) eindeutig ist, genügt es zu zeigen, daß (1) und (2) auf der Menge $\bar{A}^\zeta - A^\zeta$ übereinstimmen. Für einen Punkt p dieser Menge ist aber $w^\zeta(p) = w(p)$ und also (1) mit (2) gleichbedeutend. Aus der Übereinstimmung von (1) und (2) auf $\bar{A}^\zeta - A^\zeta$ folgt weiter, daß für $0 \leq \tau < 1$ die Abbildung f^τ stetig ist; f^1 ist stetig nach (3). Schließlich ist, da (1) und (2) für $\zeta \to 1$ in (3) übergehen, $(f^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ sogar eine Abbildungsschar im Sinne der üblichen Erklärung einer solchen.

Von den an $(f^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ im Hilfssatz gestellten Forderungen ist offenbar nur nachzuweisen, daß für $0 \leq \tau \leq 1$ der Punkt $q + (1-\tau)\,\overrightarrow{q\, a}$ der einzige Fixpunkt von f^τ ist. Dies ergibt sich wie folgt.

Es sei wieder ζ eine Zahl aus $[0, 1)$. Ist dann erstens p ein Punkt aus $\bar{A}^\sigma - A^\sigma$ und $0 \leq \sigma \leq \zeta$, so ist $p = q + (1-\sigma)\,\overrightarrow{q\, w(p)}$. Aus $f^\zeta(p) = p$ und (1) folgte also

$$(1-\sigma)\, w(p) = (1-\sigma)\, f\, w(p)$$

oder $w(p) = f\, w(p)$, obschon doch $w(p) \in \bar{A}^0 - A^0$ und f auf der letzteren Menge keinen Fixpunkt hat. Zweitens liege p in A^ζ, und es sei $p = f^\zeta(p)$. Wegen

$$p = q + (1-\zeta)\,\overrightarrow{q\, w^\zeta(p)}$$

und (2) ist dann $w^\zeta(p) = f\, w^\zeta(p)$, also $w^\zeta(p) = a$. Mithin $p = u^\zeta(a) = q + (1-\zeta)\,\overrightarrow{q\, a}$, wie behauptet.

Wie für Satz 3 seien für den folgenden Satz K ein simplizialer Komplex, der in einem Euklidischen Zahlenraum gelegen ist, und P das durch K bestimmte Polyeder; S und T Grundsimplexe von K mit $\dim(S \cdot T) \geq 1$; weiter a, b und q bzw. ein innerer Punkt von S, T und $S \cdot T$; ferner A die Menge aller Punkte p aus P, deren Trägersimplex $S \cdot T$ enthält. Dann gilt:

Satz 4. *Ist f eine zur Identität benachbarte Abbildung von P in sich mit a als einzigem Fixpunkt auf $\bar{A}$, so gibt es eine Kurve $(q^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ und eine Schar $(f^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ zur Identität benachbarter Abbildungen f^τ von P in sich mit den Eigenschaften: $f^\tau(p) = f(p)$ in allen (p, τ), für die entweder $p \in P$ und $\tau = 0$ oder $p \in P - A$ und $0 \leq \tau \leq 1$; für $0 \leq \tau \leq 1$ ist der Punkt q^τ der einzige Fixpunkt der Abbildung f^τ auf A; es ist $q^0 = a$, $q^{\frac{1}{2}} = q$, $q^1 = b$, für $0 < \tau < \frac{1}{2}$ liegt q^τ in $I(S)$ und für $\frac{1}{2} < \tau < 1$ in $I(T)$.*

Beweis. Es sei α eine Zahl mit $0<\alpha<1$, so daß a und b in der Menge A^0 der Punkte $q+\alpha\overrightarrow{pq}$, $p\in A$, liegen; β die Zahl $\frac{1}{4}$ und γ die Zahl $\frac{1}{2}$.

Vermittels des in Abschnitt 1 hergeleiteten Hilfssatzes ergibt sich dann leicht eine Schar $(f^\tau,\ 0\leq\tau\leq\beta)$ zur Identität benachbarter Abbildungen f^τ von P in sich mit

$$f^\beta(\bar{A}^0)\subset A \tag{1}$$

und den Eigenschaften: $f^\tau(p)=f(p)$ in allen (p,τ), für die entweder $p\in P$ und $\tau=0$ oder $p\in P-A$ und $0\leq\tau\leq\beta$; für $0\leq\tau\leq\beta$ ist der Punkt a, den wir auch q^τ nennen, der einzige Fixpunkt von f^τ auf A.

Die Schar $(f^\tau,\ 0\leq\tau\leq\beta)$ kann man nach dem zuletzt bewiesenen Hilfssatz derart über $(\beta,\gamma]$ fortsetzen, daß

$$f^\gamma(p)=q+(1-\sigma)\overrightarrow{qf^\beta w(p)}, \tag{2}$$

wenn p ein Punkt aus $\bar{A}^0-q$ mit $p=q+(1-\sigma)\overrightarrow{qw(p)}$ und $w(p)$ wie im obigen Hilfssatz der Schnittpunkt des Halbstrahles aus q durch p mit $\bar{A}^0-A^0$ ist; und daß weiter gilt: Auch für $\beta<\tau\leq\gamma$ ist die Abbildung f^τ zur Identität benachbart; $f^\tau(p)=f^\beta(p)$ in allen (p,τ) mit $p\in P-A^0$ und $\beta<\tau\leq\gamma$; für $\beta<\tau\leq\gamma$ ist der Punkt $(2-4\tau)\,a+(4\tau-1)\,q$, den wir auch mit q^τ bezeichnen, der einzige Fixpunkt von f^τ auf A.

Wir wollen nun zeigen, daß eine stetige Abbildung f^1 von P in sich existiert, von der gilt: $f^1(p)=f^\beta(p)$ für $p\in P-A^0$; $f^1(\bar{A}^0)\subset A$; f^1 hat auf A genau einen Fixpunkt, und dies ist der in A^0 liegende Punkt b.

Die Existenz von f^1 ergibt sich wie folgt. Der im Innern von S gelegene Punkt a ist der einzige Fixpunkt der Abbildung f^β auf $\bar{A}^0$, und es gilt (1). Den regulären Fixpunkt a kann man leicht in lineare Fixpunkte zerlegen; es gibt also zunächst eine stetige Abbildung f' von P in sich, die auf $P-A^0$ mit f^β übereinstimmt und die Eigenschaften hat: $f'(\bar{A}^0)\subset A$; jeder Fixpunkt von f' auf A^0 ist linear und liegt im Innern von S. Mit Hilfe von Satz 3 zeigt man leicht weiter, daß sich die in $I(S)$ gelegenen linearen Fixpunkte von f' ins Innere von T verschieben lassen: Es gibt eine stetige Abbildung f'' von P in sich mit $f''(p)=f'(p)=f^\beta(p)$, $p\in P-A^0$, sowie $f''(\bar{A}^0)\subset A$ und der Eigenschaft, daß jeder in A^0 liegende Fixpunkt der Abbildung f'' sogar in $I(T)$ liegt. Schließlich kann man die Fixpunkte von f'' auf T in einen Fixpunkt zusammenziehen.

Den Punkt b nennen wir auch q^1.

Wegen (2) und $f^\gamma(p)=f^\beta(p)=f^1(p)$, $p\in P-A^0$, ergibt dann eine Anwendung des letzten Hilfssatzes auf f^1 eine Fortsetzung von $(q^\tau,\ 0\leq\tau\leq\gamma;\ q^1)$ und $(f^\tau,\ 0\leq\tau\leq\gamma;\ f^1)$ über $(\gamma,1)$, so daß $(f^\tau,\ 0\leq\tau\leq1)$ eine Abbildungsschar der verlangten Art ist.

Satz 5. *Es sei K ein simplizialer Komplex, der eindimensional zusammenhängt und in einem Euklidischen Raume liegt, P das durch K bestimmte Polyeder, V eine in P offene Menge, q ein Punkt aus V und f eine zur Identität benachbarte Abbildung von P in sich mit q als einzigem Fixpunkt auf $\bar{V}$. Dann existiert*

eine Kurve $(q^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ *und eine Schar* $(f^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ *zur Identität benachbarter Abbildungen* f^τ *von* P *in sich mit den Eigenschaften:* $f^\tau(p) = f(p)$ *in allen* (p, τ), *für die entweder* $p \in P$ *und* $\tau = 0$ *oder* $p \in P - V$ *und* $0 \leq \tau \leq 1$; *für* $0 \leq \tau \leq 1$ *ist der in* V *liegende Punkt* q^τ *der einzige Fixpunkt von* f^τ *auf* V; q^1 *liegt im Innern eines Grundsimplexes von* K.

Beweis. Das Trägersimplex von q in K heiße N; und es bezeichne A die Menge aller Punkte aus P, deren Trägersimplex in K das Simplex N enthält. Die Menge A ist offen in P.

Wegen $q = f(q)$ gibt es eine Zahl α mit $0 < \alpha < 1$, so daß, wenn wieder A^0 die Menge der Punkte $q + \alpha \overrightarrow{q\,p}$, $p \in A$, bedeutet, $f(\bar{A}^0)$ in A liegt. Wir wollen nun zunächst zeigen:

I. Es gibt eine stetige Abbildung g von P in sich mit den Eigenschaften: $g(p) = f(p)$ für $p \in P - A^0$; $g(A^0) \subset A$; jeder Fixpunkt von g auf A^0 ist isoliert und im Innern eines Grundsimplexes von K gelegen.

Beweis von I. Aus $f(\bar{A}^0) \subset A$, der Kompaktheit von $\bar{A}^0$ und der Offenheit von A folgt die Existenz einer Zahl $\varepsilon > 0$ derart, daß $f'(\bar{A}^0) \subset A$ für jede Abbildung f' von P in sich mit $\varrho(f, f') < \varepsilon$.

Aus $p \neq f(p)$, $p \in \bar{A}^0 - A^0$, und der Kompaktheit von $\bar{A}^0 - A^0$ folgt die Existenz von Zahlen η und ζ mit $\eta > 0$ und $0 < \zeta < 1$ derart, daß $\varrho(p, f(p)) > \eta$ in allen Punkten p aus $\bar{A}^0 - A^\zeta$.

Einem bekannten Satz zufolge existiert eine Schar $(g^\tau,\ 0 \leq \tau \leq 1)$ stetiger Abbildungen g^τ von P in sich mit $g^0 = f$, $\varrho(f, g^\tau) < \min(\varepsilon, \eta)$, $0 \leq \tau \leq 1$, und der Eigenschaft: jeder Fixpunkt der Abbildung g^1 ist isoliert und im Innern eines Grundsimplexes von K gelegen. Wegen $q = f(q)$ kann man überdies annehmen, daß g^1 auf A^0 wenigstens einen Fixpunkt besitzt.

Für $p \in P$ sei hierauf $\lambda(p)$ die Zahl

$$\varrho(p, P - A^0) / \left(\varrho(p, P - A^0) + \varrho(p, \bar{A}^\zeta)\right) \tag{1}$$

und $g(p)$ der Punkt $g^{\lambda(p)}(p)$. Die so bestimmte Abbildung g ist von der in I geforderten Art: In den Punkten p aus $P - A^0$ ist $\lambda(p) = 0$, also $g(p) = g^0(p) = f(p)$. Wegen $\varrho(f, g^\tau) < \varepsilon$, $0 \leq \tau \leq 1$, ist $\varrho(f, g) < \varepsilon$ und daher $g(\bar{A}^0) \subset A$. Für $p \in \bar{A}^0 - A^\zeta$ ist $\varrho(p, f(p)) > \eta$ und $\varrho(f(p), g(p)) < \eta$, also $p \neq g(p)$; und auf $\bar{A}^\zeta$ stimmen g und g^1 überein, mithin: Jeder Fixpunkt von g auf A^0 ist isoliert und im Innern eines Grundsimplexes von K gelegen.

Weiter gilt, wenn $S_1, \ldots, S_m$ die Grundsimplexe von K mit N als Seite:

II. Es gibt eine stetige Abbildung f^1 von P in sich mit den Eigenschaften: $f^1(p) = f(p)$ für $p \in P - A^0$; $f^1(\bar{A}^0) \subset A$; ein im Innern von S_1 gelegener Punkt q^1 ist der einzige Fixpunkt von f^1 auf A^0.

Man kann nämlich, da K eindimensional zusammenhängend, die in A^0 liegenden Fixpunkte von g vermöge Satz 4 von $S_2 + \cdots S_m$ ins Innere von S_1 verschieben, alsdann zusammenziehen.

Mit h bezeichnen wir die folgende Abbildung: $h(p)=f(p)$ für $p\in P-A^0$; $h(q)=q$;

$$h(p)=q+(1-\sigma)\overrightarrow{q\,f\,w(p)},$$

wenn $p=q+(1-\sigma)\overrightarrow{q\,w(p)}$ ein Punkt aus $\bar{A}^0-q$ und $w(p)$ den Schnittpunkt des Halbstrahles aus q durch p mit $\bar{A}^0-A^0$ bezeichnet.

Nach dem letzten Hilfssatz existiert eine Schar $(f^\tau,\ 0\leq\tau\leq\frac{1}{2})$ stetiger Abbildungen f^τ von P in sich mit den Eigenschaften: $f^\tau(p)=f(p)$ in allen (p,τ), für die entweder $p\in P$ und $\tau=0$ oder $p\in P-A^0$ und $0\leq\tau\leq\frac{1}{2}$; für $0\leq\tau\leq\frac{1}{2}$ ist $f^\tau(\bar{A}^0)$ in A gelegen und der Punkt q, den wir auch mit q^τ bezeichnen, der einzige Fixpunkt von f^τ auf $\bar{A}^0$; es ist $f^\tau=h$ für $\tau=\frac{1}{2}$.

Eine nochmalige Anwendung des letzten Hilfssatzes, und zwar auf f^1, liefert eine Fortsetzung von $(f^\tau,\ 0\leq\tau\leq\frac{1}{2};\ f^1)$ über $(\frac{1}{2},1)$, so daß gilt: Auch in den (p,τ) mit $p\in P-A^0$ und $\frac{1}{2}<\tau<1$ ist $f^\tau(p)=f(p)$; auch für $\frac{1}{2}<\tau<1$ ist $f^\tau(\bar{A}^0)\subset A$; für $\frac{1}{2}<\tau<1$ ist der Punkt $(2-2\tau)\,q+(2\tau-1)\,q^1$, den wir mit q^τ bezeichnen, der einzige Fixpunkt von f^τ auf $\bar{A}^0$.

Und damit ist Satz 5 bewiesen.

Fulda, Marienstr. 9.

(Eingegangen am 8. September 1953.)

HUCKEMANN, F.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 375–382 (1954)

Bestimmung der Wertverteilung der Gammafunktion aus ihrer Riemannschen Fläche.

Von

FRIEDRICH HUCKEMANN.

In Betrachtungen über die Wertverteilung analytischer Funktionen geht man in neuerer Zeit häufig von RIEMANNschen Flächen aus und fragt nach den Eigenschaften der Funktionen, die sie erzeugen, insbesondere nach ihrer Wertverteilung; denn diese ist, als Verhalten der Funktion im Großen, am ehesten zugänglich. Im Anschluß an eine Untersuchung über das Verschmelzen von Randstellen[1]) will ich hier Aussagen über die Gammafunktion gewinnen, indem ich von ihrer RIEMANNschen Fläche ausgehe. Die Gammafunktion erzeugt nämlich eine RIEMANNsche Fläche aus einer Klasse, die unter anderem in der Erforschung des Umkehrproblems der Wertverteilung[2]) betrachtet wird. Mit einer ähnlichen wie der hier angewandten Methode können diese Flächen untersucht werden, darauf will ich an anderer Stelle eingehen. Hier soll gerade an einem Beispiel, das in der einen Blickrichtung (Schluß von der Funktion auf die Fläche) bekannt ist, gezeigt werden, wie man *von der Fläche als Gegebenheit* ausgehend zu Aussagen über die Funktion gelangen kann[3]).

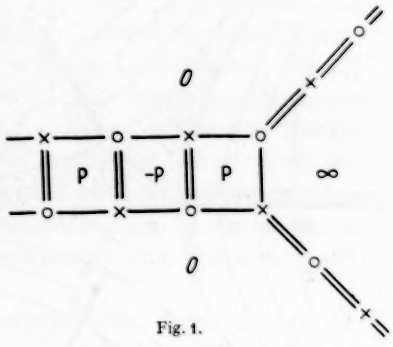

Fig. 1.

Sei p eine positive Zahl. Wir betrachten eine Fläche $\mathfrak{S}$, die verzweigt ist über den Grundpunkten $-p, 0, p, \infty$; sie habe *einen* logarithmischen Windungspunkt über ∞, *zwei* solche über 0, die durch ein Sinusende mit zweiblättrigen Windungspunkten über $p, -p$ getrennt werden; Fig. 1 zeigt den Streckenkomplex bezüglich der reellen Achse als Zerschneidungskurve. Schiebt man die algebraischen Windungspunkte weg von den Stellen p und $-p$ über gewisse Koordinaten $(-1)^\nu p_\nu$ ($p_\nu > 0$; $p_\nu \neq p_\mu$ für $\nu \neq \mu$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots$), wobei dem $(\nu+1)$-ten Elementargebiet im Sinusende der Windungspunkt über $(-1)^\nu p_\nu$ zugehört, so erhält man die von der Gammafunktion $\Gamma(z)$

[1]) HUCKEMANN [1].
[2]) ULLRICH [4].
[3]) ULLRICH [5] hebt diese Betrachtungsweise besonders hervor.

erzeugte Fläche, die *Gammafläche* $\mathfrak{W}$. Im Intervall

$$-\nu < x < -\nu + 1 \quad \text{für} \quad \nu > 0,$$
$$-\nu + 1 < x < -\nu + 2 \quad \text{für} \quad \nu = 0$$

gibt es genau eine Stelle ξ_ν mit $\Gamma'(\xi_\nu) = 0$, weitere Nullstellen hat $\Gamma'(z)$ nicht. Nach einem Satz von HERMITE[4]) ist $\xi_\nu = -\nu + \frac{1}{\log \nu} + o\left(\frac{1}{\log \nu}\right) = -\nu + \gamma_\nu$; für die verzweigten Sorten gilt

$$(1) \qquad p_\nu = (-1)^\nu \Gamma(\xi_\nu), \qquad \operatorname{Max}_\nu (p_\nu) = p_1, \qquad \lim_\nu p_\nu = 0.$$

$\mathfrak{W}$ hat zwei logarithmische Enden und ein *sinoides* Ende, wie wir das deformierte Sinusende bezeichnen; die beiden auf $\mathfrak{S}$ getrennt liegenden logarithmischen Windungspunkte über Null sind über das sinoide Ende zu einer einzigen unmittelbaren Randstelle verschmolzen. Fig. 2 zeigt das Netz der Gammafläche für die reelle Achse als Zerschneidungskurve.

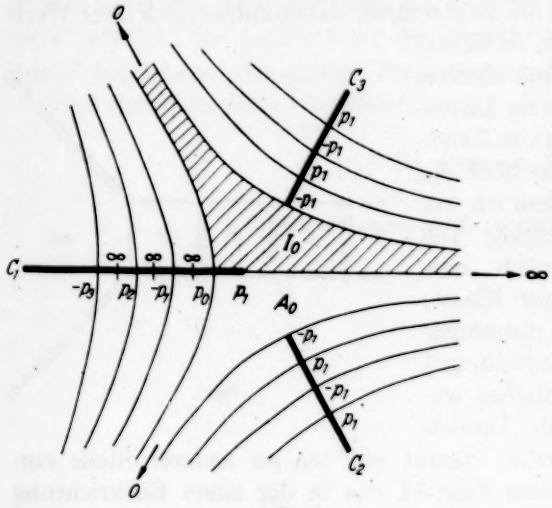

Fig. 2.

$\zeta(w)$ sei die Funktion, die die universelle Überlagerungsfläche der in $w_1 = 0$, $w_2 = p_1$, $w_3 = \infty$, $w_4 = -p_1$ punktierten Ebene in den Einheitskreis $\mathfrak{E}_\zeta$ abbildet. Dem in Fig. 2 schraffierten Viereck I_0 entspricht ein oberes Halbblatt $\mathfrak{I}_0$ von $\mathfrak{W}$; wir normieren $\zeta(w)$ so, daß ein Zweig $\underline{\zeta}(w)$ die Halbebene $\mathfrak{I}_0$ (im Sinne von Zielwerten) folgendermaßen abbildet

$$\underline{\zeta}(\infty) = 1, \qquad \underline{\zeta}(p_1) = -1,$$
$$\underline{\zeta}(0) = e^{2\pi i/3} = \varepsilon;$$

$\underline{\zeta}(-p_1) = a$, $|a| = 1$, ist dadurch festgelegt. Die Seiten werden in Orthokreisbogen des Einheitskreises abgebildet. Das Viereck I_0 und das über die Seite $\overline{p_0 \infty}$ anschließende Polygon A_0 bilden das Kernpolygon des Netzes der Gammafläche; über die Seite $\overline{0 - p_1 \infty}$ schließt sich sowohl an A_0 wie an I_0 je ein logarithmisches Ende an, über die Seiten $\overline{0 p_0}$ von A_0 und von I_0 das sinoide Ende der Gammafläche. Um $\underline{\zeta}(w)$ auf $\mathfrak{W}$ eindeutig zu machen, ziehen wir in den drei Enden je einen Schnitt C_j $(j = 1, 2, 3)$[5]) (stark ausgezogen in Fig. 2); C_1 beginnt im gemeinsamen Randpunkt p_1 von $\mathfrak{I}_0$ und $\mathfrak{A}_0$[6]), läuft

[4]) Siehe z. B. NIELSEN [2], S. 100.

[5]) j — ebenso der später einzuführende Index k — durchläuft die Zahlen 1, 2, 3, ν — ebenso der später einzuführende Index n — durchläuft die nichtnegativen ganzen Zahlen, wenn nichts anderes gesagt ist.

[6]) Die Kurvenpolygone des Netzes werden mit lateinischen Buchstaben bezeichnet, die Halbblätter von $\mathfrak{W}$ mit deutschen; zugeordnete Polygone und Halbblätter erhalten denselben Buchstaben.

über reelle Koordinaten zum Windungspunkt über p_0, von dort über reelle Koordinaten durch alle algebraischen Windungspunkte in das sinoide Ende hinein; der Schnitt C_2 bzw. C_3 beginnt in dem Randpunkt $-p_1$ von $\mathfrak{I}_0$ bzw. $\mathfrak{A}_0$ und läuft durch die Punkte über p_1 und $-p_1$ in der Weise in das logarithmische Ende hinein, daß die ζ-Bilder der Schnittufer Orthokreisbögen des Einheitskreises sind. Die aufgeschnittene Fläche werde $\underline{\mathfrak{W}}$ genannt. $\underline{\zeta}(w)$ bildet $\underline{\mathfrak{W}}$ ab in ein unendlich-vielseitiges Orthokreispolygon Q, es trägt Schnitte längs gewisser Orthokreisbogenstücke [weil die Windungspunkte von $\mathfrak{W}$ nicht alle über den singulären Stellen von $\zeta(w)$ liegen]; die Seiten häufen sich gegen die Punkte $\zeta = \varepsilon^k (k = 1, 2, 3)$. In den Punkten $\zeta_1 = -1, \zeta_2 = \bar{a}$, $\zeta_3 = a$ entspringen je zwei Seitenzüge, ζ_j entspricht dem Anfangspunkt von C_j, die von ihm ausgehenden Seitenzüge entsprechen den beiden Schnittufern; der von ζ_j nach ε^k führende Seitenzug sei S_{jk} — hier kann k nur Werte annehmen, die sich mod 3 von j um 0 oder $+1$ unterscheiden —. Die Eckpunkte von $S_{22}, S_{23}, S_{33}, S_{31}$ entsprechen den Punkten $-p_1$ und p_1 abwechselnd, die Eckpunkte von S_{11}, S_{12} den Punkten $p_1, \infty, -p_1$. Mit ζ_{jk}^{ln} bezeichnen wir den $(n+1)$-ten Bildpunkt von w_l $(l = 2, 3, 4)$ auf S_{jk}; ζ_1 werde auch mit ζ_{11}^{20} oder ζ_{12}^{20} bezeichnet. Die Einschnitte liegen dann auf den Orthokreisen, die ζ_{1k}^{2n} und ζ_{1k}^{4n} mit ε^k verbinden $(k \neq 3;\ n \neq 0$ für $l = 4)$. Ein zusammenhängendes Stück auf einem der Seitenzüge $S_{22}, S_{23}, S_{33}, S_{31}$, das die $\underline{\zeta}$-Bilder aller Punkte genau einmal enthält, über denen überhaupt der zugehörige Schnitt läuft, soll *Fundamentalstück* heißen. Der ganze Seitenzug geht aus einem Fundamentalstück durch Potenzen einer parabolischen Transformation T_k des Einheitskreises hervor, die den Häufungspunkt des Seitenzuges zum Fixpunkt hat[7]). Ähnliches gilt für die Seitenzüge S_{11}, S_{12}.

Für die folgenden Abschätzungen ist es zweckmäßig, durch lineare Abbildung $\omega_k(\zeta)$ den Einheitskreis in die obere ω_k-Halbebene überzuführen; $\omega_k(\zeta)$ ist eindeutig bestimmt durch die Forderungen

a) $\omega_k(\varepsilon^k) = \infty$,

b) T_k entspreche die Schiebung $\omega_k \to \omega_k + 1$,

c) $\omega_1(1) = \frac{1}{4}$, $\omega_2(1) = -\frac{1}{4}$, $\omega_3(-1) = 0$.

Hieraus folgen die Gleichungen $\omega_1(\zeta_1) = \omega_2(\zeta_1) = 0$, $\omega_1(\zeta_3) = \omega_3(\zeta_2) = \frac{1}{2}$, $\omega_2(\zeta_2) = \omega_3(\zeta_3) = -\frac{1}{2}$. Das ω_k-Bild von Q sei Q_k. In der ω_1- bzw. der ω_2-Ebene erhalten wir als Bild von S_{31} bzw. S_{22} die Halbkreisfolgen Σ_{31} bzw. Σ_{22}; als Bild von S_{11} bzw. S_{12} die Folge von Halbkreisen und Geradenstücken Σ_{11} bzw. Σ_{12}; die Geradenstücke sind der imaginären Achse parallel, wir nennen sie *Gräten*; die Figuren in der ω_1- und der ω_2-Ebene gehen durch Spiegelung an der imaginären Achse ineinander über. Σ_{23} und Σ_{33}, die Bilder von S_{23} und S_{33} in der ω_3-Ebene, sind einfache Halbkreisfolgen (Fig. 3a und b).

Für die Untersuchung der Wertverteilung von $\Gamma(z)$ ist es zunächst nötig, die Länge der Gräten in der ω_1- und der ω_2-Halbebene zu bestimmen; außer

[7]) T_k ist die primitive Transformation, bezüglich derer $\zeta(w)$ linear polymorph ist, das Vorzeichen setzen wir so fest, daß ihre positiven Potenzen den Rand des Einheitskreises in positiver Drehrichtung schieben.

der Kenntnis der verzweigten Sorten $(-1)^r p_\nu$ ist dazu die Kenntnis des asymptotischen Verhaltens der Funktionen $\omega_1(\zeta(w))$ und $\omega_2(\zeta(w))$ für $w \to 0$ erforderlich.

1. Man ersieht leicht, daß bei geeigneten Zweigfixierungen gilt:

$$\omega_1(\zeta(w)) = \frac{1}{4}\lambda^{-1}\left(\frac{w^2}{p_1^2}\right),$$

$$\omega_2(\zeta(w)) = \frac{1}{4}\left\{\lambda^{-1}\left(\frac{w^2}{p_1^2}\right)\right\}$$

— in beiden Zeilen sind natürlich verschiedene Zweige zu wählen —; λ^{-1} ist dabei die Umkehrung der bekannten Funktion $\lambda(\tau)$ aus der Theorie der

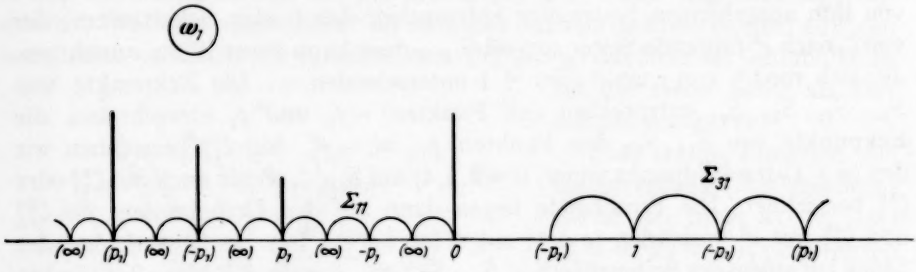

Fig. 3 a.

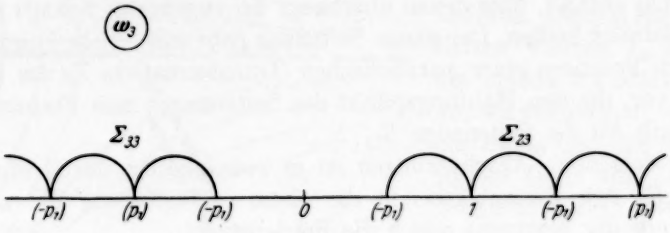

Fig. 3 b.

Modulfunktionen, deren Zusammenhang mit der absoluten Invariante $J(\tau)$ durch die Gleichung $J(\tau) = \frac{4}{27} \cdot \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}$ gegeben wird. Aus dem Zusammenhang mit den JACOBIschen ϑ-Funktionen und ihren Reihenentwicklungen folgt mit $e^{i\pi\tau} = h$

$$\lambda(\tau) = \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^4 = u(h) = 16h + O(h^2),$$

bzw.

$$h = \frac{1}{16}u + O(u^2)$$

für kleine u und h. Also ist

$$\tau = -\frac{i}{\pi}\log h = -\frac{i}{\pi}\log u + O(1).$$

Somit ist die Länge l_ν der ν-ten Gräte gegeben durch

$$l_\nu = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \log\frac{1}{p_\nu} + O(1). \tag{2}$$

2. Nach dem eingangs erwähnten Satz von HERMITE ist

$$p_\nu = (-1)^\nu \Gamma(\xi_\nu) = \frac{\pi}{\sin \pi y_\nu \cdot \Gamma(1+\nu-y_\nu)} = \frac{\log \nu\,(1+o(1))}{\Gamma(1+\nu+o(1))},$$

also

$$\log \frac{1}{p_\nu} = \nu \log \nu + O(\nu).$$

Damit erhalten wir aus (2) für die Längen der Gräten

$$l_\nu = \frac{1}{2\pi} \nu \log \nu + O(\nu).$$

Wir ziehen in der ω_k-Ebene Kreisbogen vom Radius ϱ mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt. Wir wählen P so groß, daß (für alle k) der Punkt $\omega_k = iP$ im Innern von Q_k liegt, im weiteren ist immer $\varrho > \mathrm{Max}(P, 1)$ anzunehmen. Das Kreisbogenstück vom Radius ϱ in der ω_k-Ebene, das ganz innerhalb Q_k liegt und die imaginäre Achse trifft, sei $B_\varrho^{(k)}$, seine Länge sei $\pi\,\lambda_k(\varrho)\cdot\varrho$; es ist

$$\lambda_3(\varrho) = 1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right). \tag{3}$$

Zur Bestimmung von $\lambda_1(\varrho)$ bzw. $\lambda_2(\varrho)$ betrachten wir den Winkel $\chi(\nu)$, den die imaginäre Achse in der ω_1- bzw. ω_2-Ebene mit dem Fahrstrahl zum ν-ten Grätenendpunkt ($\nu > 1$) einschließt, der Fahrstrahl selbst habe die Länge $\varrho(\nu)$. Dann gilt offenbar

$$\frac{\nu}{2\varrho(\nu)} \leq \chi(\nu) \leq \frac{\nu}{2l_\nu}.$$

Nun ist

$$\varrho(\nu) = \sqrt{\frac{1}{4\pi^2}\{\nu \log \nu + O(\nu)\}^2 + \frac{\nu^2}{4}} = \frac{1}{2\pi}\nu \log \nu + O(\nu), \tag{4}$$

also ist

$$\chi(\nu) = \frac{\pi}{\log \nu + O(1)}. \tag{5}$$

Um hier $\log \nu$ als Funktion von ϱ auszudrücken, sehen wir für den Augenblick in (4) ν als stetig veränderlich an, dann ist $\log \varrho = \log \nu + \log\log \nu + O(1)$, also $\log \nu = \log \varrho - \log\log \varrho + O(1)$. Es ist aber, wenn $\nu(\varrho)$ die Nummer der Gräte bezeichnet, auf der $B_\varrho^{(1)}$ bzw. $B_\varrho^{(2)}$ endet,

$$\lambda_1(\varrho) = \lambda_2(\varrho) = \chi\big(\nu(\varrho)\big) \cdot \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right),$$

also nach (5)

$$\lambda_1(\varrho) = \lambda_2(\varrho) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\log \varrho - \log\log \varrho + O(1)}. \tag{6}$$

Die w-Bilder der drei Bogen $B_\varrho^{(k)}$ fügen sich zu einer geschlossenen Kurve $B_{\varrho,w}$ auf $\mathfrak{W}$ zusammen, ihr entspricht durch $z = \Gamma^{-1}(w)$ eine geschlossene Kurve $B_{\varrho,z}$ in der z-Ebene. Wir setzen $\underset{B_{\varrho,z}}{\mathrm{Min}}\,|z| = u_1(\varrho)$, $\underset{B_{\varrho,z}}{\mathrm{Max}}\,|z| = u_2(\varrho)$. Der Modul des Vierecks $G_k(\varrho', \varrho'')$, das aus Q_k durch $B_{\varrho'}^{(k)}$ und $B_{\varrho''}^{(k)}$ als β-Bogen herausgehoben wird[8]), sei $\mu_k(\varrho', \varrho'')$, der Modul des Ringgebietes, das $B_{\varrho',z}$

[8]) Wir bilden $G_k(\varrho', \varrho'')$ so auf ein Rechteck ab, daß die „β-Bogen" $B_{\varrho'}^{(k)}$ und $B_{\varrho''}^{(k)}$ in parallele Seiten der Länge 2π übergehen, die Länge M der beiden anderen Seiten ist der obengenannte Modul. Vgl. hierzu und zum folgenden auch TEICHMÜLLER [3].

und $B_{\varrho'',z}$ einschließen, sei $M(\varrho', \varrho'')$. Es gilt dann

$$(7)\quad \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{\mu_k(\varrho', \varrho'')} \leq \frac{1}{M(\varrho', \varrho'')} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{\mu_k(\varrho, \varrho + d\varrho)} = \frac{1}{M(\varrho, \varrho + d\varrho)}.$$

Es ist aber

$$\mu_k(\varrho, \varrho + d\varrho) = \frac{2}{\lambda_k(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho},$$

bis auf die isolierten Unstetigkeitsstellen von $\lambda_k(\varrho)$. Aus der Gleichung

$$M(\varrho, \varrho + d\varrho) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{\mu_k(\varrho, \varrho + d\varrho)}} \geq \frac{2}{\sum_{k=1}^{3} \lambda_k(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho}$$

folgt nach Integration

$$(8)\quad M(\varrho', \varrho'') \geq \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{2}{\sum_{k=1}^{3} \lambda_k(\varrho)} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho},$$

und damit erhalten wir eine untere Schranke für den Modul des Ringgebietes zwischen $B_{\varrho',z}$ und $B_{\varrho'',z}$.

Zur Abschätzung des Moduls nach oben ziehen wir in der ω_k-Ebene zwei stückweise glatte Kurven, $b_1^{(k)}$ in $Re(\omega_k) > 0$, $b_2^{(k)}$ in $Re(\omega_k) < 0$, die folgenden Forderungen genügen sollen:

a) sie enthalten nur Punkte des Innern oder des Randes von Q_k,

b) sie schneiden jeden Kreis vom Radius $\varrho > \mathrm{Max}(P, 1)$ (genau einmal) unter positivem Winkel.

$b_1^{(k)}$ und $b_2^{(k)}$ schneiden aus $G_k(\varrho', \varrho'')$ ein neues Viereck $\tilde{G}_k(\varrho', \varrho'')$ aus. Der Teilbogen $\tilde{B}_\varrho^{(k)}$ von $B_\varrho^{(k)}$, der innerhalb $\tilde{G}_k(\varrho', \varrho'')$ liegt, habe die Länge $\pi \tilde{\lambda}_k(\varrho) \cdot \varrho$. Der Modul von $\tilde{G}_k(\varrho', \varrho'')$ bezüglich $\tilde{B}_{\varrho'}^{(k)}$ und $\tilde{B}_{\varrho''}^{(k)}$ als β-Bogen ist dann nicht kleiner als $\mu_k(\varrho', \varrho'')$.

Als b_1^1, b_1^3 bzw. b_2^2, b_2^3 können wir die Parallele zur reellen Achse im Abstand $d \geq \frac{1}{2}$ verwenden, soweit sie in der rechten bzw. der linken Halbebene liegt. In $Re(\omega_1) \leq 0$ und in $Re(\omega_2) \geq 0$ liegen Gräten, wir können für

b_2^1 die Kurve $\varphi(\varrho) = \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\log \varrho - \log\log \varrho + K}\right)$,

b_1^2 die Kurve $\varphi(\varrho) = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\log \varrho - \log\log \varrho + K}\right)$, (mit $\omega_k = \varrho e^{i\varphi}$)

wählen, wenn K hinreichend groß ist. Mit Hilfe quasikonformer Abbildung erhalten wir als Abschätzung nach oben [9])

$$(9)\quad \mu_k(\varrho', \varrho'') \leq \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{2}{\tilde{\lambda}_k} \left\{1 + \tau\left(\frac{d\tilde{\lambda}_k}{d\log \varrho}\right)^2\right\} \frac{d\varrho}{\varrho} + \varepsilon(\varrho'),$$

[9]) Vgl. z. B. HUCKEMANN [1], S. 23 bis 25 u. 30.

τ ist dabei eine geeignete Konstante, $\varepsilon(\varrho')$ eine mit $\varrho' \to \infty$ verschwindende Größe. Da nun

$$\tilde{\lambda}_3(\varrho) - \lambda_3(\varrho) = O\left(\frac{1}{\varrho}\right), \qquad \frac{d\tilde{\lambda}_3}{d\log\varrho} = O\left(\frac{1}{\varrho}\right),$$

$$\tilde{\lambda}_k(\varrho) - \lambda_k(\varrho) = O\left(\frac{1}{\log^2\varrho}\right), \qquad \frac{d\tilde{\lambda}_k}{d\log\varrho} = O\left(\frac{1}{\log^2\varrho}\right), \qquad (k = 1, 2),$$

ist, gilt an Stelle von (9) auch

$$\mu_k(\varrho', \varrho'') \leq \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{2}{\lambda_k(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho} + \varepsilon(\varrho'). \tag{10}$$

Wegen $\lambda_1(\varrho) = \lambda_2(\varrho)$ ist auch

$$\frac{1}{\int \frac{2}{\lambda_1} \frac{d\varrho}{\varrho}} + \frac{1}{\int \frac{2}{\lambda_2} \frac{d\varrho}{\varrho}} = \frac{1}{\int \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{d\varrho}{\varrho}}.$$

Der Satz vom harmonischen Mittel ergibt hiermit

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{\int \frac{2}{\lambda_k(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho}} \geq \frac{4}{\int \left\{\frac{2}{\lambda_1(\varrho) + \lambda_2(\varrho)} + \frac{2}{\lambda_3(\varrho)}\right\} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho}},$$

mit (7) gilt also

$$M(\varrho', \varrho'') \leq \frac{1}{2} \int_{\varrho'}^{\varrho''} \left\{\frac{1}{\lambda_1(\varrho) + \lambda_2(\varrho)} + \frac{1}{\lambda_3(\varrho)}\right\} \frac{d\varrho}{\varrho} + \varepsilon(\varrho'). \tag{11}$$

Man errechnet unmittelbar, daß

$$\frac{2}{\sum_{k=1}^{3} \lambda_k(\varrho)} - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\lambda_1(\varrho) + \lambda_2(\varrho)} + \frac{1}{\lambda_3(\varrho)}\right\} = O\left(\frac{1}{\log^2\varrho}\right)$$

ist. Wir vergleichen (8) mit (11) und erhalten nach Einsetzen der Werte von $\lambda_k(\varrho)$ die Beziehung

$$\left| M(\varrho', \varrho'') - \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{1}{1 + \frac{1}{\log\varrho - \log\log\varrho + O(1)}} \frac{d\varrho}{\varrho} \right| = \varepsilon(\varrho'). \tag{12}$$

Nach dem Modulsatz folgt hieraus[10])

$$u_i(\varrho) = C\, e^{f(\varrho)}\{1 + \varepsilon_i(\varrho)\} = C' \cdot \frac{\varrho}{\log\varrho}\{1 + \varepsilon_i(\varrho)\}, \qquad (i = 1, 2) \tag{13}$$

mit

$$f(\varrho) = \int^{\varrho} \frac{1}{1 + \frac{1}{\log\varrho - \log\log\varrho + O(1)}} \frac{d\varrho}{\varrho} = \log\varrho - \log\log\varrho + c + o(1),$$

wobei e^c, C, C' geeignete positive Zahlen sind.

Um die Wertverteilungsgrößen der Gammafunktion zu ermitteln, müssen wir die Funktion $n(r, a)$ bestimmen, die die Anzahl der a-Stellen im Kreis

[10]) Siehe z. B. TEICHMÜLLER [3].

$|z|<r$ angibt; wir können sie mit Hilfe von (13) aus der Anzahlfunktion $\nu(\varrho, a)$ berechnen, die die Zahl der a-Stellen innerhalb $B_{\varrho,z}$ mißt. Durch Übergang zu den ω_k-Ebenen entnehmen wir sogleich

$$(14)\qquad \begin{cases} \nu(\varrho, a) = 4\varrho\,(1 + o(1)) & \text{für} \quad a \neq 0, \infty \\ \nu(\varrho, 0) = 0, & \nu(\varrho, \infty) = O\left(\frac{\varrho}{\log \varrho}\right). \end{cases}$$

$\nu_1(\varrho, a)$, die Anzahl der mehrfachen a-Stellen innerhalb $B_{\varrho,z}$ ist beschränkt für alle a (sie ist ≤ 1), dasselbe folgt damit für $n_1(r, a)$, die Anzahl der mehrfachen a-Stellen in $|z|<r$. Die Funktion $u_i(\varrho)$ ist eigentlich monoton, möglicherweise aber unstetig, wir definieren daher daneben eine Funktion $\bar{u}_i(\varrho)$; sie soll mit $u_i(\varrho)$ bis auf die Sprungstellen übereinstimmen, an diesen soll sie jedoch alle Werte zwischen den beiden Sprungordinaten (diese eingeschlossen) annehmen. Die (eindeutige) Umkehrfunktion $\varrho_i(r)$ von $\bar{u}_i(\varrho)$ bezeichnen wir kurz als Umkehrfunktion von $u_i(\varrho)$. Es gilt dann

$$\nu\left(\varrho_2(r), a\right) \leq n(r, a) \leq \nu\left(\varrho_1(r) + 0, a\right) + O(1).$$

Nach (13) ist $\varrho_i(r) = C_1 r \cdot \log r\left(1 + \varepsilon_i(r)\right)$ mit $C_1 > 0$, also

$$(15)\qquad n(r, a) = \nu\left(C_1 r \cdot \log r\{1 + \varepsilon(r)\}, a\right) + O(1).$$

Das Wachstum der Charakteristik $T(r)$ ist gleich dem Wachstum von $n(r) = \operatorname{Max}_a n(r, a)$; nun folgt aus (14), (15) für die Wertverteilungsgrößen:

$$(16)\qquad \begin{aligned} T(r, \Gamma) &= C_2 r \cdot \log r\left(1 + \varepsilon(r)\right) \qquad (C_2 > 0), \\ \delta(a) &= 1 - \overline{\lim}\,\frac{n(r,a)}{T(r)} = 0 \quad \text{für} \quad a \neq 0, \infty, \\ \delta(0) &= \delta(\infty) = 1, \\ \vartheta(a) &= \underline{\lim}\,\frac{n_1(r, a)}{T(r)} = 0 \qquad \text{für alle } a. \end{aligned}$$

Ein besseres Ergebnis als (16), also etwa die ganze STIRLINGsche Formel, kann nicht erwartet werden, denn schon der Zahlwert der Konstanten C, die in (13) auftritt, ist aus dem Modulsatz TEICHMÜLLERs, der an wesentlicher Stelle der Überlegungen verwandt wurde, nicht zu entnehmen; dieser ergibt nur die Existenz einer Zahl C. Hierin liegt der Grund, daß auch $C_2 = 1$ nicht zu erschließen war.

Literatur.

[1] HUCKEMANN, F.: Verschmelzung von Randstellen RIEMANNscher Flächen. Mitt. Math. Sem. Gießen **41**, 1—36 (1952). — [2] NIELSEN, N.: Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Leipzig 1906. — [3] TEICHMÜLLER, O.: Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung. Dtsch. Math. **3**, 621—678 (1938). — [4] ULLRICH, E.: Zum Umkehrproblem der Wertverteilungslehre. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. I, N. F. **1**, 135—150 (1936). — [5] ULLRICH, E.: Flächenbau und Wachstumsordnung bei gebrochenen Funktionen. Jber. dtsch. Math. Ver. **46**, 232—274 (1936).

Gießen, Mathematisches Institut der Justus-Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 16. August 1953.)

HUCKEMANN, F.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 383—387 (1954)

Typusänderung bei Riemannschen Flächen durch Verschiebung von Windungspunkten.

Von
FRIEDRICH HUCKEMANN.

Wohl das allgemeinste bisher bekannte Kriterium, das aus dem Streckenkomplex einer RIEMANNschen Fläche auf deren Typ schließen läßt, gab WITTICH[1]); er setzte voraus, daß die Windungspunkte der Fläche über endlich vielen — etwa n — Grundpunkten liegen. Ihre spezielle Lage hat dann keinen Einfluß auf den Typus, vielmehr können sie durch eine quasikonforme Abbildung, die den Typus nicht ändert, über die n-ten Einheitswurzeln gebracht werden; die neue Fläche ist der analytischen Behandlung einfacher zugänglich, auf diese Weise kann der Typus der ursprünglichen Fläche bestimmt werden.

Verschiebt man die Windungspunkte nun ein wenig, jedoch in der Weise, daß sie nun über *unendlich vielen* Grundpunkten liegen, so gibt das WITTICHsche Kriterium keine Auskunft mehr. Ist die Verschiebung klein, so wird man annehmen, daß der Typus sich nicht ändert. Es stellt sich aber die Frage, ob eine Verschiebung unendlich vieler Windungspunkte den Typus einer RIEMANNschen Fläche überhaupt beeinflußt. Das ist tatsächlich der Fall: wir werden das Umspringen des Typus durch eine stetige Deformation erreichen.

Wir gehen aus von einer Fläche $\mathfrak{S}$ mit Verzweigungspunkten über -1, 0, 1, ∞, die im Bau verwandt ist der universellen Überlagerungsfläche der in diesen Punkten punktierten Ebene. Im Streckenkomplex ist — wie dort — jeder Knoten vollständig verzweigt, doch wird die Rolle der einfachen Glieder von viereckigen Elementargebieten übernommen. Den Streckenkomplex von $\mathfrak{S}$ bezüglich der reellen Achse als Zerschneidungskurve konstruieren wir folgendermaßen: Vier Sinusleitern werden kreuzförmig zusammengefügt, die zwei einander gegenüberliegenden werden gebildet aus vierseitigen Elementargebieten, die abwechselnd Windungspunkten über 0 und $+1$ bzw. über 0 und -1 entsprechen; alle vier Leitern treffen sich in einem der Null zugehörigen Elementargebiet (im folgenden kurz *Null-Elementargebiet* genannt), wir nennen sie *Sinusenden nullter Ordnung* (Fig. 1). In jedem der vier Enden nullter Ordnung, das Elementargebiete zu 0 und $(-1)^k$ ($k=0$ bzw. 1) trägt, hängen wir an jedes Null-Elementargebiet zwei weitere Sinusleitern an mit Elementargebieten zu 0 und $(-1)^{k+1}$, die *Sinusenden erster Ordnung*; an jedes freie Null-Elementargebiet der Sinusenden erster Ordnung fügen wir nach der oben angegebenen Vorschrift zwei weitere Sinusleitern an, die Sinusenden zweiter Ordnung, hier wieder an jedes freie Null-Elementargebiet die Sinusenden dritter Ordnung, und so fort. In der Grenze erhalten wir den Streckenkomplex

[1]) WITTICH [3].

der Fläche $\mathfrak{S}$, bei dem in jedem Null-Elementargebiet vier Sinusleitern zusammenstoßen. Die logarithmischen Elementargebiete sollen logarithmischen Windungspunkten über ∞ entsprechen. Die Funktion $s(z)$, die diese Fläche erzeugt, gewinnen wir durch analytische Fortsetzung derjenigen Funktion, die die Viertelebene $I(s) > 0, Re(s) < 0$ als Bild eines Polygons aus Orthokreisen des Einheitskreises E_z in der z-Ebene entwirft; es sollen die Eckpunkte $z = 1, (\sqrt{2}-1)e^{i\pi/4}, 0$ übergehen in $s = \infty, -1, 0$. Dem nullwinkligen Kreisbogenpolygon P_0 mit den Ecken in $1, i, -1, -i$ entsprechen zwei Blätter der s-Ebene, die im Nullpunkt durch einen zweiblättrigen Windungspunkt zusammengehalten werden, beide sind aufgeschnitten längs der Geraden $-\overline{1\,\infty}$ und $+\overline{1\,\infty}$. Bei der Abbildung der oben erwähnten universellen Überlagerungsfläche in E_z würde *eine* Halbebene in P_0 übergehen, hier sind es vier, die im Nullpunkt durch einen zweiblättrigen Windungspunkt zusammenhängen; das kennzeichnet die Verwandtschaft zwischen diesen beiden Flächen. $\mathfrak{S}$ hat unendlich viele (zweiblättrige) algebraische Windungspunkte über $-1, 0, 1$ und unendlich viele logarithmische über ∞; $s(z)$ bildet E_z ab auf $\mathfrak{S}$, also ist $\mathfrak{S}$ vom hyperbolischen Typ.

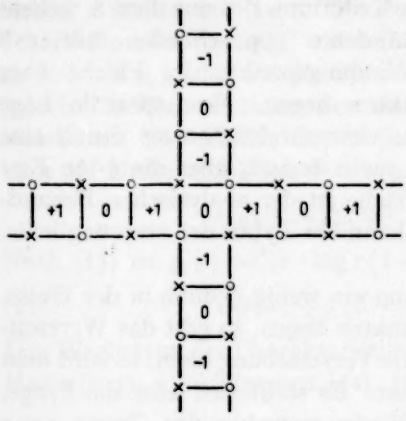

Fig. 1.

Wir schöpfen den Streckenkomplex aus durch die Generationenfolge der Elementargebiete; bei einem beliebigen Null-Elementargebiet (nullte Generation) fangen wir an zu zählen; die vier daran anschließenden algebraischen Elementargebiete (je zwei zu $+1$ und zu -1) bilden die erste Generation, die vier an diese anschließenden Null-Elementargebiete die zweite Generation, an sie schließen sich $3 \cdot 4$ Elementargebiete der dritten Generation usw. Allgemein enthält $(n \geq 1)$ die $2n$-te Generation $3^{n-1} \cdot 4$ Elementargebiete zu Null, die $(2n-1)$-te Generation $3^{n-1} \cdot 4$ Elementargebiete zu ± 1. Zur n-ten Knotengeneration fassen wir alle Knoten zusammen, die ein Null-Elementargebiet der $2n$-ten Generation beranden. Die Generationenfolge überträgt sich in bekannter Weise auf die Elemente der RIEMANNschen Fläche.

Schieben wir die algebraischen Windungspunkte der $(2\nu-1)$-ten Generation weg von den Koordinaten ± 1 nach $\pm p_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots; p_\nu \nearrow \infty$ [2]), so *verschmelzen die unendlich vielen logarithmischen Windungspunkte zu einer einzigen Randstelle über* ∞ und aus den Sinusenden werden *sinoide*; es entsteht eine RIEMANNsche Fläche $\mathfrak{W}$, die von $w(z)$ erzeugt werde.

Bei Flächen des parabolischen Typus kann ein Verschmelzen von Randstellen die Wachstumsordnung der erzeugenden Funktion herabdrücken[3]), es

[2]) Das Zeichen $\nearrow$ bedeutet: monoton wachsend. Die Monotonievoraussetzung wird der Einfachheit halber angenommen.

[3]) HUCKEMANN [1].

liegt nahe, die Frage aufzuwerfen, ob es möglich sei, auf dieselbe Weise vom hyperbolischen Typ zum parabolischen zu kommen.

Wir zerschneiden $\mathfrak{W}$ durch Schnitte, die von jedem Windungspunkt über Null aus in die vier anstoßenden (jetzt) sinoiden Enden über reellen Koordinaten hineinlaufen, dann zerfällt $\mathfrak{W}$ in unendlich viele Flächenstücke $F_{\mu\varkappa}$, jedes hat eine Randstelle über ∞, die ein logarithmischer Windungspunkt wäre, wenn wir die Sinusenden nicht deformiert hätten; jedes entspricht umkehrbar eindeutig der *ein* logarithmisches Elementargebiet berandenden Knotenfolge. In jedem $F_{\mu\varkappa}$ ist $\zeta = \log w$ eine eindeutige Funktion, die es in die endliche ζ-Ebene abbildet; die ζ-Ebene trägt außerdem Schnitte — die Bilder der auf $\mathfrak{W}$ gezogenen Schnitte sind — auf Parallelen zur reellen Achse im Abstand π. Die Figur ist symmetrisch zu einer Geraden, die wir durch Addition einer passenden Konstanten c zur reellen Achse machen (Fig. 2*)). Es sei F_μ die Menge aller Flächenstücke, die von Windungspunkten der Generation 2μ noch berührt werden, d.h. bei denen jeder algebraische Windungspunkt auf dem Rand einer Generation $\geq 2\mu$, jedoch wenigstens einer der Generation 2μ selbst angehört. Für $\mu \geq 1$ hat F_μ die Anzahl $k(\mu) = 2 \cdot 3^{\mu-1} \cdot 4$ von Elementen $F_{\mu\varkappa}$, F_0 hat $k(0) = 4$ Elemente $F_{0\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, k(\mu))$. Alle $F_{\mu\varkappa}$ mit gleichem μ sind kongruent. Das Bild, das $\tilde{\zeta} = \log w + c$ von $F_{\mu\varkappa}$ entwirft, sei $F^{\tilde{\zeta}}_{\mu\varkappa}$.

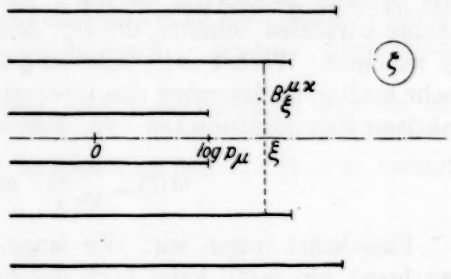

Fig. 2.

Wir setzen $\zeta = \xi + i\eta$ und bezeichnen, falls $\xi \neq \log p_\nu$ ist, mit $B^{\mu\varkappa}_\xi$ dasjenige zur reellen Achse symmetrische Stück der Geraden $Re(\zeta) = \xi$, das ganz innerhalb $F^{\tilde{\zeta}}_{\mu\varkappa}$ liegt; für $\xi = \log p_\nu$ sei $B^{\mu\varkappa}_\xi = \lim_{\xi \to \log p_\nu - 0} B^{\mu\varkappa}_\xi$; die Länge von $B^{\mu\varkappa}_\xi$ sei $\pi\, l_\mu(\xi)$. $l_\mu(\xi)$ ist stückweise konstant. Es ist

$$l_\mu(\xi) = 1 \qquad \text{für} \quad \xi \leq \log p_{\mu+1},$$
$$l_\mu(\xi) = 2(\nu - \mu) + 1 \quad \text{für} \quad \log p_\nu < \xi \leq \log p_{\nu+1}, \quad \nu \geq \mu + 1.$$

Es bezeichne $m(\xi)$ das kleinste μ, das die Ungleichung $\log p_{\mu+1} \geq \xi$ erfüllt. Dann ist $\tilde{\zeta}^{-1}\left(\sum_{\mu=0}^{m(\xi)} \sum_{\varkappa=1}^{k(\mu)} B^{\mu\varkappa}_\xi\right)$ eine geschlossene Kurve B_ξ auf $\mathfrak{W}$, und zwar ein mehrfach durchlaufener Kreis.

Die Zahlen $\xi_1 < \xi_2$ seien zunächst dem Intervall $\log p_{\nu-1} < \xi < \log p_\nu$ entnommen; dann gilt für den Modul $M(\xi_1, \xi_2)$ des Ringgebietes, das B_{ξ_1} und B_{ξ_2} begrenzen, die Beziehung

$$M(\xi_1, \xi_2) = \frac{2}{l(\xi)} \cdot (\xi_2 - \xi_1)$$

mit

$$l(\xi) = \sum_{\mu=0}^{m(\xi)} k(\mu) \cdot l_\mu(\xi) = 4 l_0(\xi) + 2 \cdot 4 \cdot \sum_{\mu=1}^{m(\xi)} 3^{\mu-1} \cdot l_\mu(\xi).$$

*) Corrigendum: In Fig. 2 ist $\log p_\mu$ durch $\log p_{\mu+1}$ zu ersetzen

Nun ist $l_\mu(\xi) = 2(m(\xi) - \mu) + 1$ für $\mu \leq m$, setzt man dies oben ein, so ergibt sich

$$l(\xi) = 3^{m(\xi)} \cdot 8 - 4,$$

und es ist also

$$M(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_2 - \xi_1}{2 \cdot (2 \cdot 3^{m(\xi)} - 1)}.$$

Aus den bekannten Eigenschaften des Moduls folgt nun für *beliebige* $\xi' < \xi''$[4]):

$$M(\xi', \xi'') \geq \frac{1}{2} \int_{\xi'}^{\xi''} \frac{d\xi}{2 \cdot 3^{m(\xi)} - 1}. \tag{1}$$

Es ist $m(\xi)$ gleichzeitig die um 1 verminderte halbe Anzahl der zur reellen Achse parallelen Schnitte, die $B_x^{0\varkappa}$ ($\varkappa = 1, 2, 3, 4$) trifft, wenn x von $-\infty$ bis ξ zunimmt. Wächst $m(\xi)$ sehr langsam, verschmelzen also die Randstellen sehr kräftig, so divergiert das Integral (1) mit $\xi'' \to \infty$, und die Fläche $\mathfrak{W}$ ist alsdann vom parabolischen Typ. Man kann etwa wählen

$$m(\xi) \leq \frac{\log \xi}{\log 3} \quad \text{oder} \quad \log p_\mu \geq e^{3^\mu}.$$

Umgekehrt fragen wir: Wie lange, also bis zu welcher Stärke des Anwachsens von $m(\xi)$, kann noch der hyperbolische Typ garantiert werden? Zur Beantwortung bilden wir $\mathfrak{W}$ quasikonform ab auf eine Fläche, die erwiesenermaßen hyperbolischen Typ hat, zweckmäßig wird das $\mathfrak{S}$ sein. Wir verbinden in $F_{\mu\varkappa}^*$ die Endpunkte zweier benachbarter Schnitte durch Geraden; der ganze Streckenzug, den man so erhält, sei gegeben durch $\xi = g(\eta)$; durch

$$\zeta^* = \xi - g(\eta) + i\eta$$

wird $F_{\mu\varkappa}^*$ quasikonform bezogen auf $F_{\mu\varkappa}^{**}$; der Dilatationsquotient der Abbildung ist $K + \sqrt{K^2 - 1}$, wo $K = 1 + \frac{g'^2}{2}$ ist. Die Funktion $z = s^{-1}(\zeta^*(\tilde{\zeta}(w)))$ bildet $\mathfrak{W}$ quasikonform in $|z| < 1$ ab. $C(z)$ sei eine Schranke für den Dilatationsquotienten im Punkte $z = x + iy$; konvergiert dann $\int_{|z|<1} C(z)\, dx\, dy$, so hat $\mathfrak{W}$ sicher hyperbolischen Typ.

Zur Abschätzung des Dilatationsquotienten müssen wir die Abbildung $\mathfrak{S} \longleftrightarrow E_z$ genauer betrachten. Die vier Halbblätter, die um den Windungspunkt Null der nullten Generation zusammenhängen, werden, werden abgebildet auf ein nullwinkliges Orthokreispolygon mit den Ecken in $1, i, -1, -i$. Fortgesetzte Spiegelung der Figur schöpft E_z durch vierseitige Orthokreispolygone aus, deren jedes vier Halbblättern von $\mathfrak{S}$ entspricht. Wir wollen den Rand des Polygons, das das s^{-1}-Bild aller Knoten bis zur n-ten Generation ist, $\mathfrak{R}_n$ nennen; auf $\mathfrak{R}_n$ liegen die Windungspunkte der $(2n+1)$-ten Generation. Im Gebiet zwischen $\mathfrak{R}_n$, $\mathfrak{R}_{n-1}$, für dessen Flächeninhalt man die elementare Abschätzung $O(n^{-2})$ findet, hat der Dilatationsquotient D einen Wert $\leq \left(\log \frac{p_{n+1}}{p_n}\right)^2 + 2$.

[4]) TEICHMÜLLER [2].

Es liegt also der hyperbolische Typus vor, solange

$$\sum^{\infty}\left(\log\frac{p_{n+1}}{p_n}\right)^2\cdot\frac{1}{n^2}$$

konvergiert, also beispielsweise wenn $p_n\leq e^{n^\alpha}$ und $\alpha<\frac{1}{2}$ ist.

Als Ergebnis formulieren wir den

Satz. Gegeben sei die durch Aneinanderfügen oberer und unterer Halbebenen entstandene vollständig verzweigte einfach zusammenhängende RIEMANNsche Fläche $\mathfrak{S}$ mit zweiblättrigen Windungspunkten über $-1, 0, 1$ und logarithmischen über ∞; die algebraischen Windungspunkte seien in Generationen geordnet. Verschiebt man die über ± 1 liegenden Windungspunkte der $(2n-1)$-ten Generation über andere Koordinaten $\pm p_n$ ($p_n\geq 1, p_n\nearrow\infty$), so verschmelzen die logarithmischen Windungspunkte zu einer einzigen Randstelle über ∞. Ist die Konvergenz $p_n\to\infty$ schwach — genauer: konvergiert $\sum_1^{\infty}\left(\log\frac{p_{n+1}}{p_n}\right)^2\cdot\frac{1}{n^2}$ — so hat die Fläche noch hyperbolischen Typ; ist sie stark — genauer: divergiert $\int^{\infty}\frac{d\xi}{3^{m(\xi)}}$ mit $m(\xi)=\operatorname{Max}_n(\log p_n<\xi)$ — so springt der Typ zum parabolischen.

Literatur.

[1] HUCKEMANN, F.: Verschmelzung von Randstellen RIEMANNscher Flächen. Mitt. Math. Sem. Gießen **41**, 1—36 (1952). — [2] TEICHMÜLLER, O.: Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung. Dtsch. Math. **3**, 621—678 (1938). — [3] WITTICH, H.: Über die konforme Abbildung einer Klasse RIEMANNscher Flächen. Math. Z. **45**, 642—668 (1939).

Gießen, Mathematisches Institut der Justus-Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 26. August 1953.)

MEINARDUS, G.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 388—398 (1954)

Asymptotische Aussagen über Partitionen.

Von
GÜNTER MEINARDUS.

Im Jahre 1941 bewies INGHAM [1] ein TAUBERsches Theorem, welches gestattet, für eine Anzahl von Partitionenfunktionen asymptotische Beziehungen herzuleiten. Man erhält jedoch im allgemeinen keine asymptotische Gleichung, sondern nur dann, wenn die Partitionenfunktion monoton wächst. Dies entspricht der Natur eines solchen TAUBERschen Theorems. Faßt man es nämlich als Umkehrung eines entsprechenden ABELschen Satzes auf, so wird man neben den funktionentheoretischen Voraussetzungen noch zusätzlich eine Annahme über ein monotones Wachstum einer gewissen summatorischen Funktion machen müssen.

Im folgenden soll ein Satz über Partitionen bewiesen werden, der ein monotones Wachstum der Anzahlfunktion nicht zur Voraussetzung hat. Betrachtet wird die Anzahl aller additiven Zerlegungen einer Zahl in natürliche Zahlen, welche noch mit einer Vielfachheit versehen sind. Ein Vergleich mit dem Theorem von INGHAM zeigt, daß hier die funktionentheoretischen Voraussetzungen etwas schärfer sind, abgesehen davon, daß der Satz von einer spezielleren Darstellung der erzeugenden Funktion ausgeht. Der Vorteil liegt in dem oben erwähnten Verzicht auf das monotone Wachstum. Ferner ergibt sich ein, wenn auch schwaches, additives Fehlerglied.

Als erste Anwendung erhält man eine asymptotische Gleichung für die Anzahl aller Partitionen einer Zahl in natürliche Zahlen einer teilerfremden Restklasse nach einem festen Modul. Es folgen weitere Anwendungen, bei denen für die Summanden der Zerlegungen ein fester Wert des LEGENDREschen Restsymbols bzw. des KRONECKER-Symbols vorgeschrieben wird. Endlich ergeben sich Limesbeziehungen für gewisse Quotienten von Partitionenfunktionen, wie sie zum Teil schon von H. PETERSSON auf anderem Wege gefunden worden sind (vgl. die Fußnote zum Satz 4).

Der Beweis des Satzes beruht auf der Sattelpunktmethode. Es werden keine Transformationseigenschaften der erzeugenden Funktion gegenüber den Substitutionen der Modulgruppe benutzt.

Satz 1. 1. Es sei das Produkt

$$f(\tau) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-n\tau})^{-a_n}$$

konvergent für $\Re(\tau) > 0$ und besitze die Entwicklung

$$f(\tau) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r(n)\, e^{-n\tau}.$$

Die Exponenten a_n seien reelle, nichtnegative Zahlen.

2. Es sei die DIRICHLETsche Reihe

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \qquad (s = \sigma + it)$$

konvergent für $\sigma > \alpha > 0$. Ferner sei $D(s)$ analytisch fortsetzbar bis zur Geraden $\sigma = -c_0$ mit $0 < c_0 < 1$. Für $\sigma \geq -c_0$ sei $D(s)$ regulär bis auf die Stelle $s = \alpha$, wo ein Pol erster Ordnung mit dem Residuum A vorliege, und es gelte gleichmäßig in σ die Abschätzung

$$D(s) = O(|t|^{c_1})$$

für $|t| \to \infty$, wobei c_1 eine positive Konstante sei.

3. Es sei $\tau = y + 2\pi i x$ die Zerlegung von τ in Real- und Imaginärteil, $y > 0$ und

$$g(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n\tau}.$$

Für $|\arg \tau| > \frac{\pi}{4}$, $|x| \leq \frac{1}{2}$ gelte

$$\Re(g(\tau)) - g(y) \leq -c_2 y^{-\varepsilon}$$

für hinreichend kleines y, mit beliebigem festen positiven ε und geeignetem $c_2 > 0$.

Dann folgt

$$r(n) = C \cdot n^{\varkappa} \cdot e^{n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \cdot \left(1+\frac{1}{\alpha}\right) \cdot (A\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1))^{\frac{1}{\alpha+1}}} \cdot \left(1 + O\left(n^{-\varkappa_1}\right)\right)$$

für $n \to \infty$. Hier ist $\zeta(s)$ die RIEMANNsche Zetafunktion und

$$C = e^{D'(0)} \cdot (2\pi(1+\alpha))^{-\frac{1}{2}} \cdot (A\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1))^{\frac{1-2D(0)}{2(1+\alpha)}}$$

$$\varkappa = \frac{2D(0) - 2 - \alpha}{2(1+\alpha)}$$

$$\varkappa_1 = \frac{\alpha}{\alpha+1} \operatorname{Min}\left(\frac{c_0}{\alpha} - \frac{\delta}{4}, \frac{1}{2} - \delta\right),$$

δ beliebig > 0.

Beweis. Aus der Entwicklung von $f(\tau)$ nach Potenzen von $e^{-\tau}$ entnehmen wir für $y > 0$ die Integraldarstellung

$$r(n) = e^{ny} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(y + 2\pi i x)\, e^{2\pi i n x}\, dx \qquad (n > 0). \tag{1}$$

Wir wählen

$$y = n^{-\frac{1}{\alpha+1}} \cdot (A\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1))^{\frac{1}{\alpha+1}} \tag{2}$$

Es ist $y > 0$, denn es ist $A > 0$, wie sich aus der Voraussetzung 2. des Satzes ergibt. Ferner führen wir noch die Abkürzungen ein

$$m = n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \cdot (A\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1))^{\frac{1}{\alpha+1}} \tag{3}$$

und

$$\beta = 1 + \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \quad \text{mit} \quad 0 < \delta < \frac{2}{3}. \tag{4}$$

Offenbar ist

$$1 + \frac{\alpha}{3} < \beta < 1 + \frac{\alpha}{2},$$

wovon wir später Gebrauch machen werden. Unter $c_3, c_4, \ldots$ sollen im folgenden stets geeignet wählbare positive Konstanten verstanden werden, die eventuell noch von $A, \alpha, c_0, c_1, c_2, \varepsilon$ und δ abhängen.

Aus (1) folgt

$$r(n) = e^m \cdot \int_{-y^\beta}^{+y^\beta} f(y + 2\pi i x)\, e^{2\pi i n x}\, dx + e^m R_1 \tag{5}$$

mit

$$R_1 = \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{-y^\beta} + \int_{+y^\beta}^{+\frac{1}{2}} \right\} f(y + 2\pi i x)\, e^{2\pi i n x}\, dx.$$

Hier sei $n \geq n_1$ und n_1 so groß, daß $y^\beta \leq \frac{1}{2}$ ist. Zur Approximation von $f(\tau)$ in den drei Integrationsintervallen benutzen wir den folgenden

Hilfssatz. Unter den Voraussetzungen von Satz 1 ist

a) für $|\arg \tau| \leq \frac{\pi}{4}$, $|x| \leq \frac{1}{2}$ gleichmäßig in x

$$f(\tau) = e^{\frac{A\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha+1)}{\tau^\alpha} - D(0)\log\tau + D'(0) + O(y^{\varepsilon_0})}$$

für $y \to 0$;

b) für ein gewisses $\varepsilon_1 > 0$, $y^\beta \leq |x| \leq \frac{1}{2}$ gleichmäßig in x

$$f(y + 2\pi i x) = O\left(e^{\frac{A\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha+1)}{y^\alpha} - c_0 y^{-\varepsilon_1}}\right)$$

für $y \to 0$.

Um diese Abschätzungen zu beweisen, beachten wir zunächst, daß

$$\log f(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\nu k \tau}$$

ist, was auf Grund der Produktdarstellung von $f(\tau)$ sofort festgestellt werden kann. Eine Anwendung der Formel

$$e^{-\tau} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \tau^{-s} \Gamma(s)\, ds \qquad (\Re(\tau) > 0,\ \sigma_0 > 0)$$

ergibt

$$\log f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\alpha-i\infty}^{1+\alpha+i\infty} \tau^{-s} \Gamma(s)\, \zeta(s+1)\, D(s)\, ds,$$

wobei die Vertauschungen von Summation und Integration wegen der absoluten Konvergenz der Doppelreihe erlaubt sind. Nun ist für $|\arg\tau| \leq \frac{\pi}{4}$ offenbar

$$|\tau^{-s}| \leq |\tau|^{-\sigma} \cdot e^{\frac{\pi}{4}|t|}.$$

Ferner gelten im Streifen $-c_0 \leq \sigma \leq 1+\alpha$ gleichmäßig in σ die Abschätzungen

$$D(s) = O\left(|t|^{c_1}\right), \qquad \zeta(s+1) = O\left(|t|^{c_1}\right)$$

und

$$\Gamma(s) = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|} \cdot |t|^{c_1}\right)$$

für $|t| \to \infty$. Es ist also gestattet, die Integrationsgerade im obigen Integral nach $\sigma = -c_0$ zu verschieben. Wegen $0 < c_0 < 1$ treten hierbei die Residuen des Integranden bei $s = \alpha$ und $s = 0$ auf. Es gilt für den Pol erster Ordnung bei $s = \alpha$ nach Voraussetzung

$$\operatorname*{Res}_{s=\alpha} \{\tau^{-s}\Gamma(s)\zeta(s+1)D(s)\} = \frac{A\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha+1)}{\tau^{\alpha}}$$

und für den Pol zweiter Ordnung bei $s = 0$, wie man leicht nachprüft,

$$\operatorname*{Res}_{s=0} \{\tau^{-s}\Gamma(s)\zeta(s+1)D(s)\} = D'(0) - D(0)\log\tau.$$

Weiter gilt auf Grund der angegebenen Abschätzungen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-c_0-i\infty}^{-c_0+i\infty} \tau^{-s}\Gamma(s)\zeta(s+1)D(s)\,ds = O\left(|\tau|^{c_1}\right) = O\left(y^{c_1}\right),$$

denn es ist $|\arg\tau| \leq \frac{\pi}{4}$. Daraus ergibt sich der Teil a) des Hilfssatzes.

Es sei nun y so klein angenommen, daß $y^{\beta} \leq \frac{y}{2\pi}$ ist. Für das Intervall $y^{\beta} \leq |x| \leq \frac{y}{2\pi}$ folgt aus dem eben Bewiesenen bereits

$$\begin{aligned}\log|f(y+2\pi i x)| &\leq \\ &\leq \frac{A\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha+1)}{y^{\alpha}} + \frac{A\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha+1)}{y^{\alpha}}\left(\frac{1}{(1+4\pi^2x^2y^{-2})^{\alpha/2}} - 1\right) + c_6|\log y| \\ &\leq \frac{A\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha+1)}{y^{\alpha}} - c_7\, y^{-\alpha+2(\beta-1)}\end{aligned}$$

für hinreichend kleines y. Nach (4) ist $-\alpha + 2(\beta-1) = \frac{-\alpha\delta}{2}$, so daß

$$\log|f(y+2\pi i x)| \leq \frac{A\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha+1)}{y^{\alpha}} - c_3\, y^{-\varepsilon_1}$$

wird. Für das restliche Intervall $\frac{y}{2\pi} \leq |x| \leq \frac{1}{2}$ ist

$$\log|f(y+2\pi i x)| \leq \log f(y) + \Re\left(g(\tau)\right) - g(y),$$

denn die a_ν sind ≥ 0. Nach Voraussetzung 3. von Satz 1 und Teil a) des Hilfssatzes ergibt sich wiederum

$$\log|f(y+2\pi i x)| \leq \frac{A\,\Gamma(\alpha)\,\zeta(\alpha+1)}{y^\alpha} - c_8\,y^{-\varepsilon} \leq \frac{A\,\Gamma(\alpha)\,\zeta(\alpha+1)}{y^\alpha} - c_3\,y^{-\varepsilon_1}.$$

Damit ist auch der Teil b) des Hilfssatzes bewiesen.

Nun zurück zum Beweis von Satz 1. Wir setzen wieder $y = m/n$ gemäß (2) und (3). Dann ergibt der Hilfssatz

$$R_1 = O\left(e^{\left(\frac{n}{m}\right)^\alpha A\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha+1) - c_3\left(\frac{n}{m}\right)^{\varepsilon_1}}\right)$$

für $n \to \infty$. Mit (3) folgt für ein festes $\varepsilon_2 > 0$ die Abschätzung

$$e^m \cdot R_1 = O\left(e^{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)m - c_9 m^{\varepsilon_2}}\right) \tag{6}$$

für $n \to \infty$. Es bleibt noch das erste Integral von (5) zu betrachten. Es sei $n \geq n_2 \geq n_1$, und n_2 so groß, daß $2\pi(m/n)^{\beta-1} \leq 1$ ist. Dann liefert der Hilfssatz

$$r(n) = e^{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)m + D'(0)} \cdot \int_{-(m/n)^\beta}^{+(m/n)^\beta} e^{\varphi_1(x)}\,dx + e^m \cdot R_1,$$

mit

$$\varphi_1(x) = \frac{m}{\alpha}\left\{\left(1 + \frac{2\pi i x n}{m}\right)^{-\alpha} - 1\right\} + 2\pi i n x - D(0)\log\left(\frac{m}{n} + 2\pi i x\right) + O\left(m^{-\frac{c_0}{\alpha}}\right)$$

für $n \to \infty$, wobei (3) benutzt wurde. Wir substituieren $2\pi x = \frac{m}{n} \cdot w$ und erhalten

$$r(n) = e^{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)m - (D(0)-1)\log\frac{m}{n} + D'(0) - \log 2\pi} \cdot I + e^m \cdot R_1 \tag{7}$$

mit

$$I = \int_{-c_{10}m^{-\frac{1-\beta}{\alpha}}}^{+c_{10}m^{-\frac{1-\beta}{\alpha}}} e^{\varphi_2(w)}\,dw$$

und

$$\varphi_2(w) = m\left\{\frac{1}{\alpha(1+iw)^\alpha} - \frac{1}{\alpha} + iw\right\} - D(0)\log(1+iw) + O\left(m^{-\frac{c_0}{\alpha}}\right)$$

für $m \to \infty$. Das Integral I berechnen wir asymptotisch in folgender Weise. Es ist

$$I = \int_{-c_{10}m^{-\frac{1-\beta}{\alpha}}}^{+c_{10}m^{-\frac{1-\beta}{\alpha}}} e^{\frac{-m(\alpha+1)}{2}w^2} + R_2 \tag{8}$$

mit

$$R_2 = \int_{-c_{10} m^{\frac{1-\beta}{\alpha}}}^{+c_{10} m^{\frac{1-\beta}{\alpha}}} e^{\frac{-m(\alpha+1)}{2} w^2} \cdot \{e^{\varphi_3(w)} - 1\}\, dw.$$

Dabei ist

$$\varphi_3(w) = m\left\{\frac{1}{\alpha(1+iw)^\alpha} - \frac{1}{\alpha} + iw + \frac{\alpha+1}{2} w^2\right\} - D(0)\log(1+iw) + O\left(m^{-\frac{c_0}{\alpha}}\right)$$

für $m \to \infty$. Für $n \geq n_3 \geq n_2$, n_3 hinreichend groß, ist im Integral R_2 sicher $|w| < 1$, wie man den Formeln (3) und (4) entnimmt. Deshalb gilt

$$m\left\{\frac{1}{\alpha(1+iw)^\alpha} - \frac{1}{\alpha} + iw + \frac{\alpha+1}{2} w^2\right\} = O(m \cdot |w|^3) = O\left(m^{\frac{\alpha+3(1-\beta)}{\alpha}}\right)$$

und

$$\log(1+iw) = O(|w|) = O\left(m^{\frac{1-\beta}{\alpha}}\right),$$

also

$$e^{\varphi_3(w)} - 1 = O\left(m^{\frac{\alpha+3(1-\beta)}{\alpha}} + m^{\frac{1-\beta}{\alpha}} + m^{-\frac{c_0}{\alpha}}\right) = O(m^{-\mu_1})$$

für $m \to \infty$ mit einem gewissen μ_1; nach (4) kann

$$\mu_1 = \operatorname{Min}\left(\frac{c_0}{\alpha}, \frac{1}{2} - \frac{3\delta}{4}\right)$$

gewählt werden. Da die Länge des Integrationsweges im Integral R_2 gleich $2c_{10} \cdot m^{\frac{1-\beta}{\alpha}}$ ist, erhalten wir

$$R_2 = O(m^{-\mu_2}) \tag{9}$$

für $m \to \infty$, wobei

$$\mu_2 = \operatorname{Min}\left(\frac{c_0}{\alpha} + \frac{1}{2} - \frac{\delta}{4}, 1 - \delta\right)$$

zu setzen ist. Für das Integral in (8) ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{-c_{10} m^{\frac{1-\beta}{\alpha}}}^{+c_{10} m^{\frac{1-\beta}{\alpha}}} e^{\frac{-m(\alpha+1)}{2} w^2} dw &= \sqrt{\frac{2}{m(\alpha+1)}} \cdot \int_{-c_{11} m^{\delta/4}}^{+c_{11} m^{\delta/4}} e^{-z^2} dz \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{m(\alpha+1)}} + O\left(m^{-\frac{1}{4}} e^{-c_{11} m^{\delta/4}}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Aus (8), (9) und (10) folgt

$$I = \sqrt{\frac{2\pi}{m(\alpha+1)}} \cdot (1 + O(m^{-\mu_3})) \tag{11}$$

für $m \to \infty$ mit

$$\mu_3 = \operatorname{Min}\left(\frac{c_0}{\alpha} - \frac{\delta}{4}, \frac{1}{2} - \delta\right).$$

Die Formeln (5), (6), (7) und (11) ergeben

$$(12)\quad r(n) = e^{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)m-(D(0)-1)\log\frac{m}{n}+D^*(0)} \cdot (2\pi m(\alpha+1))^{-\frac{1}{2}} \cdot (1+O(m^{-\mu_3}))$$

für $m \to \infty$. Berücksichtigt man nun die Bedeutung von m gemäß (3), so liefert (12) die Behauptung von Satz 1.

Anwendungen.

1. Es seien k und a feste natürliche Zahlen, $1 \leq a \leq k$ und $(a, k) = 1$. Es bedeute $q(n; k, a)$ die Anzahl der Partitionen der Zahl n in natürliche Zahlen $n_i \equiv a \pmod{k}$. Für $\Re(\tau) > 0$ gilt

$$f(\tau) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - e^{-(kn+a)\tau})^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q(n; k, a)\, e^{-n\tau}.$$

Ferner ist für $\sigma > 1$ die DIRICHLETsche Reihe

$$D(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (kn + a)^{-s} = k^{-s}\zeta\left(s, \frac{a}{k}\right)$$

und

$$g(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(kn+a)\tau} = \frac{e^{-a\tau}}{1 - e^{-k\tau}}$$

für $\Re(\tau) > 0$. Man prüft leicht nach, daß alle Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt sind. Weiter ist bekanntlich (vgl. [2], S. 271)

$$(13)\qquad \zeta\left(0, \frac{a}{k}\right) = \frac{1}{2} - \frac{a}{k}; \qquad \zeta'\left(0, \frac{a}{k}\right) = \log\Gamma\left(\frac{a}{k}\right) - \frac{1}{2}\log 2\pi,$$

so daß insgesamt

$$\alpha = 1; \qquad A = \frac{1}{k}; \qquad D(0) = \frac{1}{2} - \frac{a}{k}$$

und

$$D'(0) = \log\Gamma\left(\frac{a}{k}\right) - \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(\frac{a}{k} - \frac{1}{2}\right)\log k$$

wird. Somit ergibt sich der

Satz 2. Für $n \to \infty$ gilt

$$q(n; k, a) \sim C \cdot n^{\varkappa} \cdot e^{\pi\cdot\sqrt{2n/3k}}$$

mit

$$C = \Gamma\left(\frac{a}{k}\right) \cdot \pi^{\frac{a}{k}-1} \cdot 2^{-\frac{3}{2}-\frac{a}{2k}} \cdot 3^{-\frac{a}{2k}} \cdot k^{-\frac{1}{2}+\frac{a}{2k}}$$

und

$$\varkappa = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{k}\right).$$

In der letzten Formel sind die beiden bekannten Beziehungen (vgl. [1], S. 1075)

$$q(n;1,1)=p(n)\sim\frac{1}{4n\sqrt{3}}\cdot e^{\pi\cdot\sqrt{\frac{2}{3}n}}$$

und

$$q(n;2,1)=q(n)\sim\frac{1}{4\cdot n^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{\pi\cdot\sqrt{n/3}}$$

für $n\to\infty$ enthalten. Man erkennt ferner, daß für genügend großes n die Ungleichung

$$q(n;k,a_1)>q(n;k,a_2)$$

besteht, wenn a_1 und a_2 zwei natürliche Zahlen mit $1\leq a_1<a_2\leq k$, $(a_1,k)=1$ und $(a_2,k)=1$ sind.

2. Es sei d die Diskriminante eines quadratischen Zahlkörpers. Für $\nu=0$ oder $=1$ bedeute $r_\nu(n;d)$ die Anzahl aller Partitionen der Zahl n in natürliche Zahlen n_i mit $\left(\frac{d}{n_i}\right)=(-1)^\nu$, wobei $\left(\frac{d}{n_i}\right)$ das KRONECKER-Symbol bezeichnet. Es gilt

$$f_\nu(\tau)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{-n\tau})^{-a_n^{(\nu)}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}r_\nu(n;d)\cdot e^{-n\tau}$$

für $\Re(\tau)>0$. Dabei ist

$$a_n^{(\nu)}=\begin{cases}1 & \text{für } \left(\frac{d}{n_i}\right)=(-1)^\nu,\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}$$

also zusammengefaßt

$$a_n^{(\nu)}=\frac{1}{2}\left\{\chi_0(n)+(-1)^\nu\left(\frac{d}{n}\right)\right\}.$$

Unter $\chi_0(n)$ verstehen wir dabei den Hauptcharakter modulo $|d|$. Es ist demnach

$$D_\nu(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(\nu)}\cdot n^{-s}=\frac{1}{2}L(s,\chi_0)+\frac{(-1)^\nu}{2}L_d(s) \tag{14}$$

in der üblichen Bezeichnungsweise der DIRICHLETschen L-Reihen. Man sieht wiederum leicht ein, daß die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt sind. Mit

$$\alpha=1;\qquad A=\frac{\varphi(|d|)}{2|d|}\qquad(\varphi(k)=\text{EULERsche Funktion})$$

liefert daher der Satz 1 den

Satz 3. Für $n\to\infty$ gilt

$$r_\nu(n;d)\sim C_\nu\cdot n^{\varkappa_\nu}\cdot e^{\pi\cdot\sqrt{\frac{(|d|)\cdot n}{3|d|}}} \tag{15}$$

mit

$$C_\nu = e^{D'_\nu(0)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{\pi^2 \varphi(|d|)}{12 \cdot |d|}\right)^{\frac{1-2D_\nu(0)}{4}}$$

und

$$\varkappa_\nu = \frac{2D_\nu(0) - 3}{4}.$$

Es sei nun p eine ungerade Primzahl. Dann ist für $n > 0$ und $(n, p) = 1$ (vgl. [3], Satz 98)

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} \left(\frac{p}{n}\right) & \text{für} \quad p \equiv 1 \pmod 4, \\ \left(\frac{-p}{n}\right) & \text{für} \quad p \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Deshalb stellt die Funktion $r_\nu(n; \pm p)$ die Anzahl aller Partitionen von n in solche natürlichen Zahlen n_i mit $(n_i, p) = 1$ dar, welche quadratische Reste ($\nu = 0$) bzw. Nichtreste ($\nu = 1$) modulo p sind. Dabei steht in $r_\nu(n; \pm p)$ das positive Vorzeichen für $p \equiv 1 \pmod 4$, das negative Vorzeichen für $p \equiv 3 \pmod 4$.

Wir untersuchen noch den Quotienten von $r_0(n; d)$ und $r_1(n; d)$. Aus (14) und (15) ergibt sich

$$\frac{r_0(n; d)}{r_1(n; d)} \sim e^{L'_d(0)} \cdot \left(\frac{12 \cdot |d| \cdot n}{\pi^2 \cdot \varphi(|d|)}\right)^{\frac{1}{2} L_d(0)} \tag{16}$$

für $n \to \infty$. Nun gilt

$$L_d(s) = |d|^{-s} \cdot \sum_{m=1}^{|d|-1} \left(\frac{d}{m}\right) \zeta\left(s, \frac{m}{|d|}\right).$$

Nach (13) ist also

$$L_d(0) = \frac{-1}{|d|} \cdot \sum_{m=1}^{|d|-1} \left(\frac{d}{m}\right) \cdot m$$

und

$$L'_d(0) = \frac{\log |d|}{|d|} \cdot \sum_{m=1}^{|d|-1} \left(\frac{d}{m}\right) \cdot m + \sum_{m=1}^{|d|-1} \left(\frac{d}{m}\right) \log \Gamma\left(\frac{m}{|d|}\right).$$

Bekanntlich ist

$$\frac{-1}{|d|} \cdot \sum_{m=1}^{|d|-1} \left(\frac{d}{m}\right) \cdot m = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad d > 0, \\ \frac{2h}{w} & \text{für} \quad d < 0, \end{cases}$$

wobei w die Anzahl der Einheitswurzeln des imaginär-quadratischen Zahlkörpers $R(\sqrt{d})$ und h dessen Klassenzahl ist. Ferner ist für $d > 0$ offenbar

$$\sum_{m=1}^{d-1} \left(\frac{d}{m}\right) \log \Gamma\left(\frac{m}{d}\right) = -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{d-1} \left(\frac{d}{m}\right) \log \sin \frac{\pi m}{d} = h \cdot \log \varepsilon,$$

wobei ε die Grundeinheit > 1 des reell-quadratischen Zahlkörpers $R(\sqrt{d})$ und h dessen Klassenzahl bedeutet. Wir erhalten zunächst den

Satz 4[1]). Für $d>0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_0(n;d)}{r_1(n;d)}=\varepsilon^h.$$

Für negative Diskriminanten behaupten wir die Gültigkeit von

Satz 5. Für $d<0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{h}{w}}\cdot\frac{r_0(n;d)}{r_1(n;d)}=\left(\frac{12}{\pi^2\cdot|d|\varphi(|d|)}\right)^{h/w}\cdot\prod_{m=1}^{|d|-1}\left(\Gamma\left(\frac{m}{|d|}\right)\right)^{\left(\frac{d}{m}\right)}$$

oder

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{h}{w}}\cdot\frac{r_0(n;d)}{r_1(n;d)}=\left(\frac{48\cdot|d|}{\varphi(|d|)}\right)^{h/w}\cdot\prod_{\mathfrak{R}}\left(\frac{\eta^2\left(\frac{\overline{\beta}_2}{\overline{\beta}_1}\right)\eta^2\left(-\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)N\mathfrak{b}}{N\beta_1}\right)^{2/w}.$$

Im zweiten Ausdruck durchläuft $\mathfrak{R}$ die Idealklassen des Körpers $R(\sqrt{d})$, $\mathfrak{b}$ ist ein beliebiges Ideal der Klasse $\mathfrak{R}$ und β_1, β_2 bilden irgendeine Modulbasis von $\mathfrak{b}$, wobei $\overline{\beta}_2/\overline{\beta}_1$ einen positiven Imaginärteil haben möge. Ferner ist für $\Im(\tau)>0$

$$\eta(\tau)=e^{\frac{\pi i\tau}{12}}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i\nu\tau}).$$

Während der erste Ausdruck für den Grenzwert in Satz 5 bereits bewiesen ist, soll für den zweiten Ausdruck der Beweis kurz angedeutet werden. Es handelt sich um eine zweite Berechnung des Wertes von $L_d'(0)$ mit Hilfe der KRONECKERschen Grenzformel [4]. Ist $Z(s)$ die DEDEKINDsche Zetafunktion des Körpers $R(\sqrt{d})$, so gilt bekanntlich

$$Z(s)\doteq L_d(s)\cdot\zeta(s).$$

Hieraus und aus der Funktionalgleichung der DIRICHLETschen L-Reihen erhält man nach kurzer Rechnung

$$L_d'(0)=\frac{2h}{w}\cdot\left(-2\Gamma'(1)+\log\frac{2\pi}{|d|}\right)-\frac{\sqrt{|d|}}{\pi}\cdot A_0.$$

Dabei ist A_0 das konstante Glied der LAURENTschen Entwicklung von $Z(s)$ um den Punkt $s=1$. Die Bestimmung von A_0 erfolgt nun, indem man $Z(s)$ nach den Zetafunktionen für die einzelnen Idealklassen aufspaltet und auf jede dieser Funktionen die KRONECKERsche Grenzformel anwendet. Man erhält

$$A_0=-\frac{2\pi h\log|d|}{w\cdot\sqrt{|d|}}-\frac{4\pi h\Gamma'(1)}{w\cdot\sqrt{|d|}}-\frac{2\pi}{w\sqrt{|d|}}\cdot\sum_{\mathfrak{R}}\log\left(\frac{\eta^2\left(\frac{\overline{\beta}_2}{\overline{\beta}_1}\right)\eta^2\left(-\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)N\mathfrak{b}}{N\beta_1}\right).$$

[1]) Dieser Satz wurde zuerst von H. PETERSSON auf einer Tagung in Oberwolfach (14. 4. 53 bis 19. 4. 53) für den Fall $d=p=$ Primzahl mit $p\equiv 1 \pmod 4$ ausgesprochen. Wie mir Prof. PETERSSON kürzlich mitteilte, war ihm auch die allgemeine Aussage für beliebige positive Diskriminanten bekannt. Die Beweismethode von Prof. PETERSSON ist von der hier benutzten Methode verschieden.

Also wird

$$L_d'(0) = \frac{2h}{w} \log 2\pi + \frac{2}{w} \cdot \sum_{\mathfrak{R}} \log \left(\frac{\eta^2\left(\frac{\overline{\beta_2}}{\overline{\beta_1}}\right) \eta^2\left(-\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) N\mathfrak{b}}{N\beta_1} \right),$$

woraus sich mit (16) die zweite Form der Limesbeziehung in Satz 5 ergibt.

Literatur.

[1] INGHAM, A. E.: A Tauberian Theorem for Partitions. Ann. of Math. 42, 1075—1090 (1941). — [2] WHITTAKER, E. T., and G. N. WATSON: A Course of modern Analysis, 4. Aufl. Cambridge 1952. — [3] LANDAU, E.: Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. 1. Leipzig 1927. — [4] WEBER, H.: Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen, S. 455 bis 462. Braunschweig 1891.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 26. September 1953.)

KOECHER, M.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 399—416 (1954)

Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades. I.

Von
MAX KOECHER.

§ 1. Einleitung.

Die von C. L. SIEGEL [2] im Jahre 1939 als Verallgemeinerung der klassischen Modulformen eingeführten *Modulformen n-ten Grades* sind seither verschiedentlich untersucht worden. Abgesehen von den zahlentheoretischen Anwendungen, die bekanntlich den Anstoß zu dieser Theorie gaben, sind die Modulformen n-ten Grades — als eine Klasse von Funktionen von $\frac{n}{2}(n+1)$ komplexen Variablen mit speziellen Invarianzeigenschaften bei einer Substitutionsgruppe — vom Standpunkt der allgemeinen Funktionentheorie von Interesse. In allen bisher untersuchten Fällen zeigte sich eine vollständige Analogie zum klassischen Fall einer komplexen Variablen.

Unbefriedigend war allerdings, daß man eine — in gewissem Sinne abgeschlossene — Theorie nur für die *ganzen* Modulformen n-ten Grades, d.h. für diejenigen Modulformen, die im Definitionsgebiet regulär analytisch sind und bei Unendlich gewissen starken Regularitätsforderungen genügen, durchführen konnte; unbefriedigend deshalb, weil ja im klassischen Falle eine möglichst schwache Forderung bei Unendlich erst die wichtigsten Fälle — man denke an die „absolute Invariante" $j(\tau)$ der Modulgruppe — einschließt. Durch diese Überlegungen war eigentlich der Weg zur Ausdehnung der Theorie auf „nicht-ganze" Modulformen vorgezeichnet: Man hatte zu prüfen, welche Aussagen noch beweisbar sind, wenn man zunächst bei Unendlich keine Forderung stellt, d.h. dort (und nur dort) eine beliebige Singularität für die zu betrachtenden Funktionen zuläßt, um dann durch Einschränkung der Singularität (z.B. auf Pole) zu einer Übertragung der klassischen Theorie zu kommen. Ein Blick auf den klassischen Fall, in dem man bei Unendlich ja stets eine Forderung stellen muß (die Funktion darf höchstens einen Pol in der Ortsuniformisierenden haben), ließ Aussagen im ersten Falle (beliebige Singularität bei Unendlich) aussichtslos erscheinen. Erstaunlicherweise zeigte eine nähere Untersuchung für $n > 1$, daß eine Einschränkung der Singularität bei Unendlich durch eine Beschränktheitsforderung, wie sie SIEGEL [2] stellt, überflüssig ist. Das soll heißen: Die durch die beiden Forderungen

1. Regularität der Funktionen im Innern des Definitionsgebietes H_n,
2. Invarianz der Funktionen (bis auf einen multiplikativen elementaren Faktor) bei einer diskontinuierlichen Substitutionsgruppe K der analytischen Automorphismen von H_n

definierte lineare Funktionenschar stimmt mit der Schar der gewöhnlichen Modulformen n-ten Grades überein, sobald K die Modulgruppe n-ten Grades ist und $n > 1$ angenommen wird. Es wird ausdrücklich betont, daß diese

Aussage bei $n=1$ natürlich falsch ist. Ferner führt selbst eine gewisse Abschwächung von 1. nicht über die Modulformen n-ten Grades im bisherigen Sinne hinaus. Da die komplexe Dimension von Unendlich gleich $\frac{n}{2}(n+1)-1$ ist, kann dieser Satz selbst dann nicht aus allgemeinen Sätzen der Funktionentheorie von mehreren Variablen gefolgert werden, wenn man den durch Randsubstitutionen geschlossenen Fundamentalbereich von K als kompakte analytische Mannigfaltigkeit ansehen dürfte.

Der Beweis dieser Behauptung wird in der vorliegenden Arbeit gleich für eine allgemeine Klasse von diskontinuierlichen Untergruppen K der Automorphismengruppe von H_n geführt, da durch diese erwünschte Verallgemeinerung keine neuen Schwierigkeiten auftreten und die Beweisführung an Klarheit gewinnt. Die Verallgemeinerung der zugelassenen Substitutionsgruppen hat aber nicht nur formale Bedeutung, denn es werden dadurch alle in der Theorie der allgemeinen abelschen Funktionen von n Variablen auftretenden Gruppen erfaßt, die innerhalb der Theorie der abelschen Funktionen den gleichen Platz einnehmen, den die gewöhnliche Modulgruppe innerhalb der Theorie der elliptischen Funktionen inne hat. Diese Gruppen sind andererseits für eine Ausdehnung der HECKEschen Operatorentheorie über den bekannten MAASSschen Ansatz hinaus von wesentlicher Bedeutung. Da der Fundamentalbereich dieser Substitutionsgruppen relativ zu H_n nicht kompakt ist — der kompakte Fall ist durch SIEGEL [3] ja seit langem vollständig geklärt —, kommt man einen Schritt weiter in Richtung auf eine Theorie der allgemeinen automorphen Formen in H_n.

Zum Schluß wird der Körper $P\{K\}$ derjenigen bei K vollinvarianten meromorphen Funktionen untersucht, die sich als Quotienten zweier Formen der durch 1. und 2. definierten Schar darstellen lassen. Ist K_0 eine geeignete Untergruppe von endlichem Index in K und $P\{K_0\}$ der zugehörige Funktionenkörper, so wird insbesondere bewiesen werden, daß $P\{K_0\}$ eine einfache algebraische Erweiterung von $P\{K\}$ ist.

In § 2 wird zuerst eine ausführliche Übersicht über die Bezeichnungen und Ergebnisse gegeben, während die §§ 3 und 4 nur Beweise enthalten. Diese Trennung in Textteil und Beweise erschien aus Gründen der Übersichtlichkeit zweckmäßig. Den Hinweis auf die Notwendigkeit einer Untersuchung der „nicht-ganzen" Modulformen n-ten Grades und ihre eventuelle Konstruktion durch geeignete POINCARÉsche Reihen sowie wertvolle Ratschläge verdanke ich Herrn Prof. Dr. H. PETERSSON. Durch die vorliegende Arbeit wird gleichzeitig klargestellt, daß die analog zu einem MAASSschen Ansatz [1] formal gebildeten POINCARÉschen Reihen mit nicht halbpositiver Exponentenmatrix nicht konvergieren können.

§ 2. Bezeichnungen und Ergebnisse.

1. Mit Ausnahme der Nullmatrix werden Matrizen stets mit deutschen Buchstaben[1]) bezeichnet, wobei obere Indizes wie üblich Zeilen- und Spalten-

[1]) Kleine deutsche Buchstaben sind für Spalten (Vektoren) vorbehalten.

anzahl angeben. Für Nullmatrizen steht immer 0, Zeilen- und Spaltenanzahl ergibt sich dabei aus dem Zusammenhang. Ist $\mathfrak{A}^{(m)}$ eine quadratische Matrix, so wird mit $|\mathfrak{A}|$ ihre Determinante, mit $\|\mathfrak{A}\|$ deren absoluter Betrag und mit $\sigma(\mathfrak{A})$ die Spur von $\mathfrak{A}$ bezeichnet. $r(\mathfrak{A})$ bedeutet den Rang von $\mathfrak{A}$. Zur Abkürzung sei weiter $\mathfrak{E}$ die Einheitsmatrix,

$$\mathfrak{S}[\mathfrak{A}] = \mathfrak{A}'\mathfrak{S}\mathfrak{A} \quad \text{und} \quad [d_1, d_2, \ldots, d_n]$$

eine Diagonalmatrix mit $d_1, d_2, \ldots, d_n$ als Diagonalelementen. Die Schreibweise

$$(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}), \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 & * \\ \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 \end{pmatrix}$$

gibt die Zerlegung einer Matrix in „Kästchen". Eine Verwechselung von $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B})$ mit dem Produkt von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$ ist wohl nicht zu befürchten. Bei $\mathfrak{A} = (a_{kl})$ wird stets $a_{kk} = a_k$ abgekürzt.

Sind Γ_m und Γ_n zwei multiplikative Gruppen von m- (bzw. n-) reihigen Matrizen, so heißen zwei Matrizen $\mathfrak{A}^{(m,n)}$ und $\mathfrak{B}^{(m,n)}$ *linksassoziiert* nach Γ_m (bzw. *rechtsassoziiert* nach Γ_n), wenn

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{U}\mathfrak{B}, \qquad \mathfrak{U} \text{ aus } \Gamma_m \text{ (bzw. } \mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{V},\ \mathfrak{V} \text{ aus } \Gamma_n)$$

erfüllt ist. Durch die Angabe

$$\mathfrak{X}\, l\, \Gamma_m \quad (\text{bzw. } \mathfrak{X}\, r\, \Gamma_n)$$

unter einem Summenzeichen soll vermerkt werden, daß die Summe nur über ein volles System von nach Γ_m nicht linksassoziierten (bzw. nach Γ_n nicht rechtsassoziierten) Matrizen $\mathfrak{X}^{(m,n)}$ erstreckt werden soll. Selbstverständliche Voraussetzung dabei ist, daß die einzelnen Glieder der Summe nicht von der speziellen Auswahl der Vertreter abhängen. Zwei symmetrische Matrizen $\mathfrak{S}^{(n)}$ und $\mathfrak{T}^{(n)}$ heißen außerdem *äquivalent* nach Γ_n, wenn $\mathfrak{S} = \mathfrak{T}[\mathfrak{U}]$ mit einem $\mathfrak{U}$ aus Γ_n gilt. Mit

$$\mathfrak{S} \bmod \Gamma_n$$

wird dann ein volles System von Matrizen bezeichnet, die nach Γ_n nicht äquivalent sind.

Eine Matrix wird *rational* (bzw. *ganz*, *reell* oder *komplex*) genannt, wenn alle ihre Elemente rationale (bzw. ganz rationale, reelle oder komplexe) Zahlen sind; eine symmetrische Matrix $\mathfrak{S} = (s_{kl})$ heißt ferner *halbganz*, wenn die s_k und $2s_{kl}$ ganz rational sind. Sind $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^{-1}$ ganz, dann heißt $\mathfrak{U}$ *unimodular*; $\mathfrak{P}^{(n,p)}$ heißt *primitiv*, wenn $\mathfrak{P}$ zu einer unimodularen Matrix ergänzt werden kann, d.h. wenn es bei $n > p$ (bzw. $n < p$) eine Matrix $\mathfrak{P}^{(n,n-p)}$ (bzw. $\mathfrak{Q}^{(p-n,p)}$) derart gibt, daß

$$(\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}) \quad \left(\text{bzw. } \begin{pmatrix} \mathfrak{P} \\ \mathfrak{Q} \end{pmatrix}\right)$$

unimodular ist. Die n-reihigen unimodularen Matrizen bilden bei Multiplikation eine Gruppe Ω_n. Diejenigen Matrizen aus Ω_n, für die

$$\mathfrak{U} \equiv \pm \mathfrak{E} \pmod{q}$$

mit natürlichem q gilt, werden zur Gruppe $\Omega_n[q]$ zusammengefaßt. Bei

$$\omega_n(q) = [\Omega_n : \Omega_n[q]]$$

wird in Hilfssatz 1

$$\omega_{n_2}(q) = q^{n^2-1} \prod_{\substack{p/q \\ 2 \le k \le n}} (1 - p^{-k})$$

bewiesen werden. p hat dabei alle verschiedenen Primteiler von q zu durchlaufen.

Für rationales symmetrisches $\mathfrak{S}^{(n)}$ wird ferner die Gruppe der Einheiten $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{S}$ mit $\Gamma(\mathfrak{S})$ bezeichnet. $\mathfrak{U}$ heißt dabei eine *Einheit* von $\mathfrak{S}$, wenn $\mathfrak{U}$ ganz ist und der Gleichung $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}[\mathfrak{U}]$ genügt. Schließlich wird noch

$$\Gamma_q(\mathfrak{S}) = \Omega_n[q] \cap \Gamma(\mathfrak{S})$$

gesetzt.

Ist $\mathfrak{S}^{(n)}$ symmetrisch und reell, dann gibt es ein reelles $\mathfrak{X}^{(n)}$ mit

$$\mathfrak{S}[\mathfrak{X}] = \begin{pmatrix} \mathfrak{E}^{(\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathfrak{E}^{(\mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau(\mathfrak{S}) = \nu + \mu,$$

und man nennt $s(\mathfrak{S}) = (\nu, \mu)$ die *Signatur* von $\mathfrak{S}$. Bei $\mu = 0$, $\nu \geqq 0$ soll $\mathfrak{S}$ *halbpositiv* ($\mathfrak{S} \geqq 0$), bei $\nu = n$ soll $\mathfrak{S}$ *positiv* ($\mathfrak{S} > 0$) und bei $\nu\mu > 0$ soll $\mathfrak{S}$ *indefinit* heißen. Für $\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2 > 0$ wird $\mathfrak{S}_1 > \mathfrak{S}_2$ abgekürzt.

Bei der Abbildung $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}[\mathfrak{U}]$, $\mathfrak{U}$ aus Ω_n, geht die Menge aller reellen symmetrischen positiven Matrizen in sich über, und es existiert ein offener Fundamentalbereich aller positiven Matrizen bei der Gruppe dieser Abbildungen. Als Fundamentalbereich kann dabei die Menge R_n aller nach MINKOWSKI *reduzierten* symmetrischen positiven Matrizen gewählt werden. Der Reduktionstheorie der quadratischen Formen entnimmt man die folgenden wichtigen Ungleichungen: Liegt $\mathfrak{S} = (s_{kl})$ in R_n, dann gilt

$$(2.1) \qquad \begin{cases} s_1 \leqq s_2 \leqq \cdots \leqq s_n, & -s_k \leqq 2s_{kl} \leqq s_k, \\ c_1 \leqq \dfrac{|\mathfrak{S}|}{s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_n} \leqq c_2, \\ \mathfrak{S} > c_3[s_1, s_2, \ldots, s_n], \end{cases}$$

wobei die positiven Konstanten c_1, c_2 und c_3 nur von n abhängen.

2. Unter der *symplektischen Gruppe n-ten Grades* Σ_n wird nach SIEGEL [4] die multiplikative Gruppe aller $2n$-reihigen reellen Matrizen $\mathfrak{M}$ verstanden, die der Bedingung

$$\mathfrak{J}[\mathfrak{M}] = \mathfrak{J}, \qquad \mathfrak{J}^{(2n)} = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{E}^{(n)} \\ -\mathfrak{E} & 0 \end{pmatrix}$$

genügen. In Verallgemeinerung der oberen Halbebene betrachtet man die offene Menge H_n aller komplexen symmetrischen Matrizen $\mathfrak{Z}^{(n)} = (z_{kl}) = \mathfrak{X} + i\mathfrak{Y}$, für die $\mathfrak{Y} > 0$ erfüllt ist. Setzt man dann für alle $\mathfrak{Z}$ aus H_n

$$\mathfrak{M}\langle\mathfrak{Z}\rangle = (\mathfrak{A}\mathfrak{Z} + \mathfrak{B})(\mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D})^{-1}, \qquad \mathfrak{M}^{(2n)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^{(n)} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix},$$
$$\mathfrak{M}\{\mathfrak{Z}\} = \mathfrak{C}\mathfrak{Z} + \mathfrak{D},$$

dann gelten die Rechenregeln

$$(2.2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}_1\langle\mathfrak{M}_2\langle\mathfrak{Z}\rangle\rangle = (\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)\langle\mathfrak{Z}\rangle, \\ \mathfrak{M}_1\{\mathfrak{M}_2\langle\mathfrak{Z}\rangle\} = (\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)\{\mathfrak{Z}\}\cdot(\mathfrak{M}_2\{\mathfrak{Z}\})^{-1}, \\ \quad \operatorname{Im}\mathfrak{M}\langle\mathfrak{Z}\rangle = (\mathfrak{M}\{\mathfrak{Z}\})'^{-1}\cdot\operatorname{Im}\mathfrak{Z}\cdot\overline{(\mathfrak{M}\{\mathfrak{Z}\})}^{-1}. \end{cases}$$

Durch

$$\mathfrak{Z}\to\mathfrak{M}\langle\mathfrak{Z}\rangle,\quad \mathfrak{M}\text{ aus }\Sigma_n,$$

wird H_n auf sich abgebildet, und die gleiche Abbildung liefern nur $\mathfrak{M}$ und $-\mathfrak{M}$. Als wichtigste Untergruppe von Σ_n ist die *Modulgruppe n-ten Grades* M_n anzusehen, d.h. die Gruppe aller ganzen symplektischen Matrizen, und in Analogie zum klassischen Fall $n=1$ wird durch

$$M_n[q] = M_n\cap\Omega_{2n}[q]$$

die *Hauptkongruenzgruppe* der Stufe q definiert. Eine beliebige Untergruppe von Σ_n heißt dann *Kongruenzgruppe* der Stufe q, wenn in ihr mit endlichem Index die Hauptkongruenzgruppe der Stufe q enthalten ist. Die Modulgruppe n-ten Grades ist dann Kongruenzgruppe zu jeder Stufe, und in Hilfssatz 1 wird

$$\mu_n(q) = [M_n : M_n[q]] = \varepsilon(q)\cdot q^{n(2n+1)}\cdot\prod_{1\le k\le n}^{p\mid q}(1-p^{-2k})$$

mit

$$\varepsilon(q) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } q=2 \\ \frac{1}{2}, & \text{wenn } q>2 \end{cases}$$

bewiesen werden.

3. Ist $f(\mathfrak{Z})$ eine eindeutige Funktion für alle $\mathfrak{Z}$ aus H_n, so setzt man zur Abkürzung für ganzes k in Verallgemeinerung einer Bezeichnung von PETERSSON

$$f(\mathfrak{Z})\underset{(k)}{/}\mathfrak{M} = f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M} = |\mathfrak{M}\{\mathfrak{Z}\}|^k\cdot f(\mathfrak{M}\langle\mathfrak{Z}\rangle)$$

und faßt $\mathfrak{M}$ als Operator auf. Man rechnet wegen (2.2) leicht

$$(f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M}_1)/\mathfrak{M}_2 = f(\mathfrak{Z})/(\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)$$

nach.

Die weiteren Ergebnisse dieser Arbeit sind Aussagen über Formen zu Kongruenzuntergruppen K von Σ_n. An dieser Stelle werden daher Bezeichnung und allgemeine Voraussetzung zusammenfassend formuliert:

(V) Es sei k ganz und $n>1$, K eine Kongruenzgruppe in Σ_n, d.h.

$$M_n[q]\subseteq K\subseteq\Sigma_n$$

mit endlichem Index $[K:M_n[q]]$. $v=v(\mathfrak{M})$ sei ferner ein Multiplikatorsystem von K vom Betrage eins mit der zusätzlichen Forderung

$$v(\mathfrak{M}) = 1 \quad\text{für alle } \mathfrak{M} \text{ aus } M_n[q].$$

Unter dieser Voraussetzung (V) versteht man dann unter einer *Form* aus der linearen Schar $\{K, k, v\}$ eine Funktion $f(\mathfrak{Z})$ mit folgenden Eigenschaften:

(A) $\begin{cases} f(\mathfrak{Z}) \text{ ist in } H_n \text{ eine reguläre analytische Funktion der } \frac{n}{2}(n+1) \text{ unabhängigen Variablen } z_{kl}=z_{lk}. \end{cases}$

(B) $\begin{cases} \text{Für jedes } \mathfrak{M} \text{ aus } K \text{ gilt} \\ \qquad f(\mathfrak{Z})|_{(k)}\mathfrak{M} = v(\mathfrak{M})\, f(\mathfrak{Z}), \\ \text{wobei } v(\mathfrak{M}) \text{ der zu } \mathfrak{M} \text{ gehörige Multiplikator ist.} \end{cases}$

Der Unterschied zum bekannten SIEGELschen Ansatz besteht darin, daß *erstens* eine größere Klasse von Untergruppen der symplektischen Gruppe betrachtet wird, *zweitens* — und das ist sehr wesentlich — keine Forderung über das Verhalten der Funktionen bei Annäherung an Unendlich gestellt wird.

Gilt für ein $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$ noch:

(C) $\begin{cases} \text{Für jedes } c>0 \text{ ist } f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R} \text{ beschränkt für alle rationalen } \mathfrak{R} \text{ aus } \Sigma_n \text{ und} \\ \text{alle } \mathfrak{Z} \text{ aus } H_n \text{ mit } \operatorname{Im}\mathfrak{Z} > c\mathfrak{E}, \end{cases}$

dann wird $f(\mathfrak{Z})$ eine *ganze Form* aus $\{K, k, v\}$ genannt. Ist $K=M_n$ die Modulgruppe n-ten Grades, dann stellt der folgende Satz die Verbindung zu den bekannten Modulformen n-ten Grades her.

Satz 1. *Für ganzes k stimmt die lineare Schar der ganzen Formen aus $\{M_n, k, 1\}$ mit der Schar der Modulformen n-ten Grades überein.*

4. Bezeichnet man bei rationaler Matrix $\mathfrak{A}$, $|\mathfrak{A}| \neq 0$, mit $g(\mathfrak{A})$ die kleinste natürliche Zahl g, für die $g\mathfrak{A}$ und $g\mathfrak{A}^{-1}$ ganz sind, dann kann die wesentliche Aussage der vorliegenden Arbeit in der folgenden Form als Satz formuliert werden:

Satz 2. *Unter der Voraussetzung* (V) *gilt*:

a) *Für jedes $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$ und jedes rationale $\mathfrak{R}$ aus Σ_n existiert eine Fourierentwicklung der Form*

$$f(\mathfrak{Z})|_{(k)}\mathfrak{R} = \sum_{\mathfrak{T}\geq 0} a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})\, e^{\frac{2\pi i}{Q}\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{Z})}, \qquad Q = q\cdot g^2(\mathfrak{R}),$$

wobei die Summe über alle symmetrischen halbpositiven halbganzen Matrizen $\mathfrak{T}^{(n)}$ zu erstrecken ist. Für die Koeffizienten hat man

$$a(\mathfrak{T}[\mathfrak{U}], \mathfrak{R}) = a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R}), \qquad \mathfrak{U} \text{ aus } \Omega_n[Q],$$
$$a(\mathfrak{T}, \mathfrak{M}\mathfrak{R}) = v(\mathfrak{M})\, a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R}), \qquad \mathfrak{M} \text{ aus } K.$$

b) *$\{K, k, v\}$ besteht nur aus ganzen Formen.*

Teil b dieses Satzes besagt, daß aus den Bedingungen (A) und (B) für $n>1$ schon (C) folgt, d.h. zum Beispiel, daß in der grundlegenden Arbeit von SIEGEL [2] die (C) analoge Bedingung überflüssig ist. Für $n=1$ ist der Satz natürlich falsch. Ersetzt man (A) durch die Forderung, daß $f(\mathfrak{Z})$ in H_n meromorph und nicht ganz ist, dann zeigt der Beweis von Satz 2, daß es

keinen „Horizontalstreifen" $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} + i\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{X}$ beliebig reell, $\mathfrak{Y}$ aus einem abgeschlossenen Bereich G (in dem $\mathfrak{Y}$ durchweg positiv ist) geben kann, in dem $f(\mathfrak{Z})$ regulär analytisch ist. Da es nach Satz 2b nur ganze Formen gibt, kann die Unterscheidung zwischen Formen und ganzen Formen wieder fortgelassen werden.

Satz 3. *Unter der Voraussetzung* (V) *gilt:*

a) *Für* $k > 0$ *sind alle Formen aus* $\{K, k, v\}$ *identisch Null.*

b) *Für* $k = 0$ *sind alle Formen aus* $\{K, 0, v\}$ *identisch konstant.*

c) *Für* $k < 0$ *sei* $\sigma_n = 2n(\sqrt{3}\, c_3)^{-1}$. *Sind dann alle Koeffizienten* $a(\mathfrak{T}, \mathfrak{E})$ *nach Satz 2a eines* $f(\mathfrak{Z})$ *aus* $\{K, k, v\}$ *Null für*

$$\sigma(\mathfrak{T}) \leq \frac{-k}{2\pi}\, \mu_n(q)\, \sigma_n,$$

dann ist $f(\mathfrak{Z})$ *identisch Null.*

Aus Satz 3a folgt sofort, daß es für $n > 1$ kein Analogon zur Diskriminante $\Delta(z)$, d.h. keine Funktion $f(\mathfrak{Z})$, die (B) genügt und deren Inverses in H_n regulär analytisch ist, gibt. Aus Satz 3b folgt entsprechend: Es gibt für $n > 1$ kein Analogon zur „Modulfunktion" $j(z)$, d.h. keine nicht konstante Funktion $f(\mathfrak{Z})$, die bei den Substitutionen aus einer Gruppe K vollinvariant und im Innern von H_n regulär analytisch ist. Zum Beweis von Satz 3 benötigt man an mehreren Stellen wesentlich den Satz 2. Dadurch gelingt es, die Behauptungen a) bis c) auf die entsprechenden richtigen Aussagen über die SIEGELschen Modulformen n-ten Grades zurückzuführen, so daß nicht einmal eine Übertragung dieser Beweise nötig ist.

Satz 4. *Unter der Voraussetzung* (V) *im Falle* $k < 0$ *ist der Rang der linearen Schar* $\{K, k, v\}$ *höchstens gleich*

$$\frac{\omega_n(q)}{n!}\, (-k \cdot \mu_n(q) \cdot \sigma_n)^h, \qquad h = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ist $f_j(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k_j, 1\}$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$, dann wird mit

$$\sum_{j=1}^{s} \alpha_j k_j, \qquad \alpha_j \geq 0,$$

das *Gewicht* des Potenzproduktes

$$\prod_{j=1}^{s} (f_j(\mathfrak{Z}))^{\alpha_j}$$

bezeichnet. Ein Polynom in den $f_j(\mathfrak{Z})$ wird wie üblich *isobar* genannt, wenn alle seine Potenzprodukte das gleiche Gewicht haben.

Satz 5. *Unter der Voraussetzung* (V) *besteht zwischen je* $h+2$ *beliebigen Formen* $f_j(\mathfrak{Z})$ *aus* $\{K, k_j, 1\}$ $(k_j < 0)$ *eine isobare algebraische Gleichung vom Gewicht*

$$-c_4 \cdot |k_1 \cdot k_2 \cdot \cdots \cdot k_{h+2}| \cdot \omega_n(q) \cdot (\mu_n(q))^h, \qquad h = \frac{n(n+1)}{2},$$

wobei die Konstante c_4 *nur von* n *abhängt.*

5. Betrachtet man nun in Verallgemeinerung der *Modulfunktionen n-ten Grades* [2] die Funktionen $f(\mathfrak{Z})$, die Quotient zweier Formen aus $\{K, k, v\}$ mit geeignetem ganzen $k<0$ sind, dann bilden diese Funktionen einen Körper $P\{K\}$. Satz 5 besagt, daß für den Transzendenzgrad $h(K)$ von $P\{K\}$ über dem Körper P der komplexen Zahlen

$$h(K) \leq h = \frac{n(n+1)}{2}$$

gilt. Nach SIEGEL [2] ist $h(M_n) = h$ und wegen

$$P\{K_1\} \geqq P\{K_2\} \quad \text{für} \quad K_1 \leqq K_2$$

folgt $h(K_1) \geq h(K_2)$, so daß für jede zugelassene Gruppe K der Transzendenzgrad

$$h(K) = h = \frac{n(n+1)}{2}$$

von $P\{K\}$ über P nicht von K abhängt. Damit hat man als Ergänzung zu Satz 5, daß es h Funktionen aus $P\{K\}$ gibt, die algebraisch unabhängig sind.

Sind K_1 und K_2 mit $K_1 \leqq K_2$ zwei Gruppen, die eine gemeinsame Hauptkongruenzuntergruppe enthalten, dann gibt der folgende Satz über die algebraische Struktur von $P\{K_1\}$ über $P\{K_2\}$ Auskunft.

Satz 6. *$P\{K_1\}$ ist eine einfache algebraische Erweiterung m-ten Grades von $P\{K_2\}$ mit $m \leq [K_2 : K_1]$.*

Mit den hier zur Verfügung stehenden Mitteln scheint es jedoch nicht möglich zu sein, den genauen Körpergrad anzugeben.

§ 3. Beweis der Sätze 1 bis 6.

In den Beweisen wird zur Abkürzung

$$e_q(\mathfrak{W}) = e^{\frac{2\pi i}{q}\sigma(\mathfrak{W})}$$

für jedes natürliche q gesetzt. Die Beweise der benötigten Hilfssätze findet man in § 4.

1. *Beweis von Satz 1.* Für alle $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} + i\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y} = (y_{kl})$, aus dem von SIEGEL [2], § 2, angegebenen Fundamentalbereich $F(M_n)$ von H_n ist

$$\mathfrak{Y} \text{ reduziert und } y_1 \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Wegen (2.1) folgt für $\mathfrak{Z}$ aus $F(M_n)$

$$\mathfrak{Y} > c_5 \mathfrak{E}, \qquad c_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} c_3,$$

und daher ist jede ganze Form aus $\{M_n, k, 1\}$ eine SIEGELsche Modulform. Ist umgekehrt $f(\mathfrak{Z})$ eine SIEGELsche Modulform, dann gibt es zu beliebigem rationalen $\mathfrak{R}$ aus Σ_n ein $\mathfrak{M}$ aus M_n mit

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{M}\,\mathfrak{H}, \qquad \mathfrak{H} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}' & \mathfrak{S}\mathfrak{A}^{-1} \\ 0 & \mathfrak{A}^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}',$$

und für den Nachweis von (C) muß nur bewiesen werden, daß $f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{H}$ für alle $\mathfrak{Z}$ aus H_n mit $\operatorname{Im}\mathfrak{Z} > c\mathfrak{E}$ beschränkt ist. Aus der Existenz der Fourierreihe für $f(\mathfrak{Z})$,

$$f(\mathfrak{Z}) = \sum_{\mathfrak{T} \geq 0} b(\mathfrak{T})\, e_1(\mathfrak{T}\mathfrak{Z})$$

mit Summation über alle halbganzen halbpositiven symmetrischen Matrizen, folgt dann eine Entwicklung der Form

$$f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{H} = \sum_{\mathfrak{T} \geq 0} a(\mathfrak{T})\, e_q(\mathfrak{T}\mathfrak{Z})$$

mit geeignetem natürlichen q. Hilfssatz 3 vollendet dann den Beweis.

2. *Beweis von Satz 2.* Wegen Hilfssatz 3 folgt Teil b sofort aus Teil a. Für $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$ hat man in der Bezeichnung des Satzes sofort:

$$f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R} \in \{M_n[Q], k, 1\}.$$

Da

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{E} & Q \cdot \mathfrak{S} \\ 0 & \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}' \text{ ganz},$$

zu $M_n[Q]$ gehört, folgt aus (B) sofort $f(\mathfrak{Z} + Q\mathfrak{S}) = f(\mathfrak{Z})$, und wegen (A) existiert daher eine in jedem abgeschlossenen Bereich von H_n gleichmäßig absolut konvergente Fourierentwicklung der Form

$$f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R} = \sum_{\mathfrak{T}} a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})\, e_Q(\mathfrak{T}\mathfrak{Z}), \tag{3.1}$$

bei der über alle symmetrischen halbganzen Matrizen $\mathfrak{T}^{(n)}$ zu summieren ist. Außerdem gehört auch

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{U}' & 0 \\ 0 & \mathfrak{U}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{U} \text{ aus } \Omega_n[Q],$$

zu $M_n[Q]$, und daher ist $f(\mathfrak{Z}[\mathfrak{U}]) = f(\mathfrak{Z})$ für jedes $\mathfrak{U}$ aus $\Omega_n[Q]$. Die Entwicklung (3.1) ist eindeutig, also

$$a(\mathfrak{T}[\mathfrak{U}], \mathfrak{R}) = a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R}), \quad \mathfrak{U} \text{ aus } \Omega_n[Q],$$

und mit

$$g_Q(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T}) = \sum_{\substack{\mathfrak{U} \in \Omega_n[Q] \\ \mathfrak{U} \neq \Gamma_Q(\mathfrak{T})}} e_Q(\mathfrak{U}'\mathfrak{T}\mathfrak{U}\mathfrak{Z}) \tag{3.2}$$

schreibt sich (3.1)

$$f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R} = \sum_{\mathfrak{T} \bmod \Omega_n[Q]} a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})\, g_Q(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T}) \tag{3.3}$$

mit Summation über alle symmetrischen halbganzen $\mathfrak{T}^{(n)} \bmod \Omega_n[Q]$.

In (3.3) betrachte man nun diejenigen Teilreihen $g_Q(\mathfrak{Z}, \mathfrak{T})$, für die $\mathfrak{T}$ nicht halbpositiv ist. Es wird gezeigt werden, daß dann $g_Q(i\mathfrak{E}, \mathfrak{T})$ divergiert, d.h. der zugehörige Koeffizient $a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})$ muß Null sein, da ja die ganze Reihe (3.3) für alle $\mathfrak{Z}$ aus H_n absolut konvergent ist. Bezeichnet man mit $u(\mathfrak{T}, m)$ die

Anzahl der $\mathfrak{U}$ aus $\Omega_n[Q]$, die nach $\Gamma_Q(\mathfrak{T})$ nicht linksassoziiert sind und der Gleichung

$$\sigma(\mathfrak{U}'\mathfrak{T}\mathfrak{U}) = m$$

genügen, so folgt

$$g_Q(i\mathfrak{E},\mathfrak{T}) = u(\mathfrak{T},0) + \sum_{m=1}^{\infty}\{u(\mathfrak{T},m)\,t^{-m} + u(\mathfrak{T},-m)\,t^m\},\quad t = e^{\frac{2\pi}{Q}}.$$

Es muß dabei natürlich angenommen werden, daß $u(\mathfrak{T},m)$ endlich ist. Sollte aber nur ein m unendlich oft in der angegebenen Weise dargestellt werden, so ist die Divergenz von $g_Q(i\mathfrak{E},\mathfrak{T})$ augenfällig. Nach Hilfssatz 4 sind aber für indefinites $\mathfrak{T}$ die $u(\mathfrak{T},m)$ und $u(\mathfrak{T},-m)$ für unendlich viele natürliche m positiv, d.h. $g_Q(i\mathfrak{E},\mathfrak{T})$ kann nicht konvergieren. Ist dagegen $-\mathfrak{T} \geq 0$, dann folgt $u(\mathfrak{T},m) = 0$ für $m > 0$ und

$$g_Q(i\mathfrak{E},\mathfrak{T}) = u(\mathfrak{T},0) + \sum_{m=1}^{\infty} u(-\mathfrak{T},m)\,t^m \geq \sum_{m=1}^{\infty} u(-\mathfrak{T},m), \tag{3.4}$$

so daß (3.4) divergieren muß, wenn $\mathfrak{T} \neq 0$ ist, da die Reihe nicht abbricht. Damit ist Satz 2a vollständig bewiesen, denn die Behauptungen über die Fourierkoeffizienten folgen aus der Eindeutigkeit der Entwicklung (3.1).

3. *Beweis von Satz 3.* Jedes $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$ liegt sicher auch in $\{M_n[q], k, 1\}$ und da in Satz 3 keine Aussage explizit von K abhängt, genügt es, den Satz für $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{M_n[q], k, 1\}$ zu beweisen. Für die Fourierkoeffizienten $a(\mathfrak{T},\mathfrak{E})$ von $f(\mathfrak{Z})$ nach Satz 2a gelte

$$a(\mathfrak{T},\mathfrak{E}) = 0 \quad \text{für} \quad \sigma(\mathfrak{T}) \leq \frac{-k}{2\pi}\mu_n(q)\,\sigma_n \tag{3.5}$$

im Falle $k \leq 0$. Ist nun K^* die Gruppe aller $\mathfrak{M}$ aus M_n mit

$$f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M} = f(\mathfrak{Z}),$$

dann sei $\mathfrak{M}_\mu$ ein Vertretersystem von M_n bezüglich Linksassoziation nach K^* ($\mu = 1, 2, \ldots, [M_n : K^*] = \mu_n^*$). Bildet man

$$f_\mu(\mathfrak{Z}) = f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M}_\mu,$$

dann permutieren sich die $f_\mu(\mathfrak{Z})$ bei Anwendung eines $\mathfrak{M}$ aus M_n untereinander. Bei

$$g(\mathfrak{Z}) = \Big(\prod_\mu f_\mu(\mathfrak{Z})\Big)^2$$

ist $g(\mathfrak{Z})$ in H_n regulär analytisch, denn nach Satz 2a ist diese Behauptung für jeden Faktor richtig. Außerdem ist

$$g(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M} = g(\mathfrak{Z}), \qquad k^* = 2\cdot k\cdot \mu_n^*,$$
$$(k^*)$$

für jedes $\mathfrak{M}$ aus M_n, d.h. $g(\mathfrak{Z})$ liegt in $\{M_n, k^*, 1\}$. Nach Satz 1 ist $g(\mathfrak{Z})$ eine gewöhnliche SIEGELsche Modulform n-ten Grades der Dimension k^*, und

wegen (3.5) folgt für ihre Fourierkoeffizienten $b(\mathfrak{T})$ bei $k \leq 0$

$$b(\mathfrak{T}) = 0 \quad \text{für} \quad \sigma(\mathfrak{T}) \leq \frac{-k^*}{4\pi} \frac{\mu_n(q)}{\mu_n^*} \sigma_n,$$

d.h. sicher

$$b(\mathfrak{T}) = 0 \quad \text{für} \quad \sigma(\mathfrak{T}) \leq \frac{-k^*}{4\pi} \sigma_n.$$

Daher ist

$$g(\mathfrak{Z}) \equiv 0 \quad \text{nach} \quad \begin{cases} [2], \text{ Seite } 637/638, & \text{wenn } k > 0 \\ [1], \text{ Satz } 7, & \text{wenn } k \leq 0 \end{cases}$$

und daher auch $f(\mathfrak{Z}) \equiv 0$.

4. *Beweis von Satz 4.* Es genügt wieder, wenn der Satz für $\{M_n[q], k, 1\}$ bewiesen wird. Sei dazu $A_q(t)$ die Anzahl der nach $\Omega_n[q]$ inäquivalenten halbganzen halbpositiven $\mathfrak{T}^{(n)}$ mit $\sigma(\mathfrak{T}) \leq t$. Da die Fourierkoeffizienten eines $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{M_n[q], k, 1\}$ für diejenigen Matrizen $\mathfrak{T}$, die nach $\Omega_n[q]$ äquivalent sind, übereinstimmen, gibt es höchstens

$$A_q\left(\frac{-k}{2\pi} \mu_n(q)\, \sigma_n\right)$$

linear unabhängige Formen aus $\{M_n[q], k, 1\}$. Man hat aber

$$A_q(t) \leq A_1(t) \cdot \omega_n(q)$$

und

$$A_1(t) \leq \sum_{\substack{t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \\ t_1 + t_2 + \cdots + t_n \leq t}} \prod_{j=1}^{n} (4t_j + 1)^{n-j},$$

denn die Anzahl der reduzierten halbganzen halbpositiven $\mathfrak{T}^{(n)}$ mit gegebenen Diagonalelementen $t_1, \ldots, t_n$ ist höchstens

$$\prod_{j=1}^{n} (4t_j + 1)^{n-j}.$$

Also gilt

$$A_1(t) < \sum_{0 \leq t_j \leq t} \prod_{j=1}^{n} (4t_j + 1)^{n-j} = \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{s=0}^{t} (4s + 1)^{n-j} \right),$$

$$A_1(t) < \frac{1}{n!} (5t)^h, \quad h = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{3.6}$$

wenn $t > 0$ ist. Damit ist aber Satz 4 schon bewiesen.

5. *Beweis von Satz 5.* Wie bisher genügt es wieder, den Beweis $\{M_n[q], k, 1\}$ zu führen. Man setzt

$$h = \frac{n(n+1)}{2}$$

und

$$c_4 = \left[\frac{1}{n!} \left(\frac{5}{\pi} \sigma_n (h+1) \right)^h + 1 \right], \quad d = c_4 \cdot \omega_n(q) \cdot (\mu_n(q))^h.$$

Anzahl der $\mathfrak{U}$ aus $\Omega_n[Q]$, die nach $\Gamma_Q(\mathfrak{T})$ nicht linksassoziiert sind und der Gleichung

$$\sigma(\mathfrak{U}'\mathfrak{T}\mathfrak{U}) = m$$

genügen, so folgt

$$g_Q(i\mathfrak{E},\mathfrak{T}) = u(\mathfrak{T},0) + \sum_{m=1}^{\infty}\{u(\mathfrak{T},m)\,t^{-m} + u(\mathfrak{T},-m)\,t^m\}, \quad t = e^{\frac{2\pi}{Q}}.$$

Es muß dabei natürlich angenommen werden, daß $u(\mathfrak{T},m)$ endlich ist. Sollte aber nur ein m unendlich oft in der angegebenen Weise dargestellt werden, so ist die Divergenz von $g_Q(i\mathfrak{E},\mathfrak{T})$ augenfällig. Nach Hilfssatz 4 sind aber für indefinites $\mathfrak{T}$ die $u(\mathfrak{T},m)$ und $u(\mathfrak{T},-m)$ für unendlich viele natürliche m positiv, d.h. $g_Q(i\mathfrak{E},\mathfrak{T})$ kann nicht konvergieren. Ist dagegen $-\mathfrak{T} \geq 0$, dann folgt $u(\mathfrak{T},m) = 0$ für $m > 0$ und

$$(3.4) \qquad g_Q(i\mathfrak{E},\mathfrak{T}) = u(\mathfrak{T},0) + \sum_{m=1}^{\infty} u(-\mathfrak{T},m)\,t^m \geq \sum_{m=1}^{\infty} u(-\mathfrak{T},m),$$

so daß (3.4) divergieren muß, wenn $\mathfrak{T} \neq 0$ ist, da die Reihe nicht abbricht. Damit ist Satz 2a vollständig bewiesen, denn die Behauptungen über die Fourierkoeffizienten folgen aus der Eindeutigkeit der Entwicklung (3.1).

3. *Beweis von Satz 3.* Jedes $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$ liegt sicher auch in $\{M_n[q], k, 1\}$ und da in Satz 3 keine Aussage explizit von K abhängt, genügt es, den Satz für $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{M_n[q], k, 1\}$ zu beweisen. Für die Fourierkoeffizienten $a(\mathfrak{T},\mathfrak{E})$ von $f(\mathfrak{Z})$ nach Satz 2a gelte

$$(3.5) \qquad a(\mathfrak{T},\mathfrak{E}) = 0 \quad \text{für} \quad \sigma(\mathfrak{T}) \leq \frac{-k}{2\pi}\,\mu_n(q)\,\sigma_n$$

im Falle $k \leq 0$. Ist nun K^* die Gruppe aller $\mathfrak{M}$ aus M_n mit

$$f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M} = f(\mathfrak{Z}),$$

dann sei $\mathfrak{M}_\mu$ ein Vertretersystem von M_n bezüglich Linksassoziation nach K^* ($\mu = 1, 2, \ldots, [M_n : K^*] = \mu_n^*$). Bildet man

$$f_\mu(\mathfrak{Z}) = f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M}_\mu,$$

dann permutieren sich die $f_\mu(\mathfrak{Z})$ bei Anwendung eines $\mathfrak{M}$ aus M_n untereinander. Bei

$$g(\mathfrak{Z}) = \Big(\prod_\mu f_\mu(\mathfrak{Z})\Big)^2$$

ist $g(\mathfrak{Z})$ in H_n regulär analytisch, denn nach Satz 2a ist diese Behauptung für jeden Faktor richtig. Außerdem ist

$$g(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M} = g(\mathfrak{Z}), \qquad k^* = 2 \cdot k \cdot \mu_n^*,$$
$$(k^*)$$

für jedes $\mathfrak{M}$ aus M_n, d.h. $g(\mathfrak{Z})$ liegt in $\{M_n, k^*, 1\}$. Nach Satz 1 ist $g(\mathfrak{Z})$ eine gewöhnliche SIEGELsche Modulform n-ten Grades der Dimension k^*, und

wegen (3.5) folgt für ihre Fourierkoeffizienten $b(\mathfrak{T})$ bei $k \leq 0$

$$b(\mathfrak{T}) = 0 \quad \text{für} \quad \sigma(\mathfrak{T}) \leq \frac{-k^*}{4\pi} \frac{\mu_n(q)}{\mu_n^*} \sigma_n,$$

d.h. sicher

$$b(\mathfrak{T}) = 0 \quad \text{für} \quad \sigma(\mathfrak{T}) \leq \frac{-k^*}{4\pi} \sigma_n.$$

Daher ist

$$g(\mathfrak{Z}) \equiv 0 \quad \text{nach} \quad \begin{cases} [2], \text{ Seite 637/638, wenn } k > 0 \\ [1], \text{ Satz 7, wenn } k \leq 0 \end{cases}$$

und daher auch $f(\mathfrak{Z}) \equiv 0$.

4. *Beweis von Satz 4.* Es genügt wieder, wenn der Satz für $\{M_n[q], k, 1\}$ bewiesen wird. Sei dazu $A_q(t)$ die Anzahl der nach $\Omega_n[q]$ inäquivalenten halbganzen halbpositiven $\mathfrak{T}^{(n)}$ mit $\sigma(\mathfrak{T}) \leq t$. Da die Fourierkoeffizienten eines $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{M_n[q], k, 1\}$ für diejenigen Matrizen $\mathfrak{T}$, die nach $\Omega_n[q]$ äquivalent sind, übereinstimmen, gibt es höchstens

$$A_q\left(\frac{-k}{2\pi} \mu_n(q)\, \sigma_n\right)$$

linear unabhängige Formen aus $\{M_n[q], k, 1\}$. Man hat aber

$$A_q(t) \leq A_1(t) \cdot \omega_n(q)$$

und

$$A_1(t) \leq \sum_{\substack{t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \\ t_1 + t_2 + \cdots + t_n \leq t}} \prod_{j=1}^{n} (4t_j + 1)^{n-j},$$

denn die Anzahl der reduzierten halbganzen halbpositiven $\mathfrak{T}^{(n)}$ mit gegebenen Diagonalelementen $t_1, \ldots, t_n$ ist höchstens

$$\prod_{j=1}^{n} (4t_j + 1)^{n-j}.$$

Also gilt

$$A_1(t) < \sum_{0 \leq t_j \leq t} \prod_{j=1}^{n} (4t_j + 1)^{n-j} = \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{s=0}^{t} (4s + 1)^{n-j} \right),$$

$$A_1(t) < \frac{1}{n!} (5t)^h, \quad h = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{3.6}$$

wenn $t > 0$ ist. Damit ist aber Satz 4 schon bewiesen.

5. *Beweis von Satz 5.* Wie bisher genügt es wieder, den Beweis $\{M_n[q], k, 1\}$ zu führen. Man setzt

$$h = \frac{n(n+1)}{2}$$

und

$$c_4 = \left[\frac{1}{n!} \left(\frac{5}{\pi} \sigma_n(h+1) \right)^h + 1 \right], \quad d = c_4 \cdot \omega_n(q) \cdot (\mu_n(q))^h.$$

Für die Anzahl $a(k^*)$ der verschiedenen Potenzprodukte in $h+2$ Variablen vom Gewicht

$$k^* = -|k_1 \cdot k_2 \cdot \cdots \cdot k_{h+2}| \cdot d \cdot (2h+2)$$

gilt nach SIEGEL [2], S. 639,

$$a(k^*) > d^{h+1} |k_1 \cdot k_2 \cdot \cdots \cdot k_{h+2}|^h. \tag{3.7}$$

Diese Potenzprodukte mögen in einer beliebigen Reihenfolge mit $F_0(\mathfrak{Z})$, $F_1(\mathfrak{Z})$, ... bezeichnet werden. Durch geeignete Wahl von ϱ_ν kann man dann in

$$F(\mathfrak{Z}) = \sum_{\nu=0}^{a(k^*)-1} \varrho_\nu F_\nu(\mathfrak{Z}) \in \{M_n[q], k^*, 1\}$$

erreichen, daß die Fourierkoeffizienten $b(\mathfrak{T})$ von $F(\mathfrak{Z})$ für $a(k^*)-1$ beliebig vorgegebene, nach $\Omega_n[q]$ nicht äquivalente Matrizen $\mathfrak{T}$ verschwinden. Nach (3.7) hat man

$$(-k^*)^h < (2h+2)^h \frac{a(k^*)}{d},$$

und wegen (3.6) folgt

$$\begin{aligned} A_q\left(\frac{-k^*}{2\pi}\mu_n(q)\,\sigma_n\right) &< \frac{\omega_n(q)}{n!}\left(\frac{-5k^*}{2\pi}\mu_n(q)\,\sigma_n\right)^h \\ &< \frac{\omega_n(q)}{n!}\left(\frac{5}{\pi}\mu_n(q)\,\sigma_n(h+1)\right)^h \frac{a(k^*)}{d} \\ &= \frac{1}{c_4}\frac{1}{n!}\left(\frac{5}{\pi}(h+1)\,\sigma_n\right)^h a(k^*) \leq a(k^*). \end{aligned}$$

Mit Satz 3c ist Satz 5 bewiesen.

6. *Beweis von Satz 6.* Sei $f(\mathfrak{Z})$ aus $P\{K_1\}$, K^* die Gruppe aller $\mathfrak{M}$ aus K_2 mit

$$f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M} = f(\mathfrak{Z})$$
$$(0)$$

und $\mathfrak{M}_\mu (\mu = 1, 2, \ldots, \mu^* = [K_2 : K^*])$ ein Vertretersystem von K_2 nach K^* bezüglich Linksassoziation. Bei

$$F(X, \mathfrak{Z}) = \prod_{\mu=1}^{\mu^*} (X - f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M}_\mu), \qquad \mu^* \leq [K_2 : K_1],$$

gilt für jedes $\mathfrak{M}$ aus K_2

$$F(X, \mathfrak{Z})/\mathfrak{M} = F(X, \mathfrak{Z}),$$
$$(0)$$

d.h. $F(X, \mathfrak{Z})$ liegt im Polynomring einer Unbestimmten über $P\{K_2\}$. Die Nullstellen von $F(X, \mathfrak{Z})$ sind nach Wahl von K^* alle verschieden, d.h. jedes $f(\mathfrak{Z})$ aus $P\{K_1\}$ ist separabel von einem Grad $\leq [K_2 : K_1]$ in bezug auf $P\{K_2\}$. Man nehme nun an, es gibt in $P\{K_1\}$ $l = 1 + [K_2 : K_1]$ über $P\{K_2\}$ linear unabhängige Funktionen $f_\nu(\mathfrak{Z})$. Dann ist $P\{K_2\}(f_1, f_2, \ldots, f_l)$ eine separable endliche Erweiterung von $P\{K_2\}$ in $P\{K_1\}$, die nach dem Satz vom primitiven Element einfach ist. Das primitive Element habe dann über $P\{K_2\}$ den

Grad $m_0 \geq l$. Wegen $l > [K_2 : K_1]$ ist das ein Widerspruch. Es gibt also höchstens $[K_2 : K_1]$ über $P\{K_2\}$ linear unabhängige Funktionen aus $P\{K_1\}$, d.h. der Körpergrad von $P\{K_1\}$ über $P\{K_2\}$ ist höchstens $[K_2 : K_1]$.

§ 4. Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Wird*

$$\varepsilon(q) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } q = 2 \\ \frac{1}{2}, & \text{wenn } q > 2 \end{cases}$$

gesetzt, dann gilt

$$\omega_n(q) = [\Omega_n : \Omega_n[q]] = q^{n^2-1} \prod_{p|q} \prod_{k=2}^{n} (1 - p^{-k}),$$

$$\mu_n(q) = [M_n : M_n[q]] = \varepsilon(q)\, q^{n(2n+1)} \prod_{p|q} \prod_{k=1}^{n} (1 - p^{-2k})',$$

wobei p in beiden Fällen alle verschiedenen Primteiler von q zu durchlaufen hat.

Beweis. Der Beweis wird in beiden Fällen durch Induktion nach n geführt. Es ist

$$\mu_1(q) = \varepsilon(q)\, \omega_2(q) = \varepsilon(q)\, q^3 \prod_{p|q} (1 - p^{-2})$$

wohlbekannt[2]).

a) Sei zuerst $a_n(q)$ die Anzahl der Vektoren des Systems der

$$(4.1) \quad \begin{cases} (\mathrm{mod}\ q) \text{ inkongruenten ganzen Vektoren } \mathfrak{x}' = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \text{für die es ein } \mathfrak{U} \text{ aus } \Omega_n \text{ mit } \mathfrak{U} \equiv (\mathfrak{x}\, *) \ (\mathrm{mod}\ q) \text{ gibt.} \end{cases}$$

Es wird behauptet: $a_n(q)$ ist gleich der Anzahl der Vektoren des Systems der

$$(4.2) \quad \begin{cases} (\mathrm{mod}\ q) \text{ inkongruenten ganzen Vektoren } \mathfrak{x}, \\ \text{für die es ein ganzes } \mathfrak{a} \text{ mit } \mathfrak{a}'\mathfrak{x} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ q) \text{ gibt.} \end{cases}$$

Sei dazu $\mathfrak{x}$ aus der Menge (4.1), dann gibt es also ein $\mathfrak{U}$ aus Ω_n mit $\mathfrak{U} \equiv (\mathfrak{x}\, *)$ $(\mathrm{mod}\ q)$, daher $|(\mathfrak{x}\, *)| \equiv \pm 1 \ (\mathrm{mod}\ q)$, was die Existenz eines ganzen $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}'\mathfrak{x} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ q)$ einschließt, d.h. die Menge (4.1) ist in der Menge (4.2) enthalten. Andererseits sei bei gegebenen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{a}$ die Kongruenz $\mathfrak{a}'\mathfrak{x} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ q)$ erfüllt. Bei g.g.T. $(x_1, q) = d$ gibt es dann sicher ein k $(1 \leq k \leq n)$ mit g.g.T. $(x_k, d) = 1$. Die Kongruenz

$$x_k + q z \equiv 1 \left(\mathrm{mod} \prod_{p|x_1,\ p \nmid d} p\right)$$

im Falle $k > 1$, bzw.

$$x_2 + q z \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ x_1)$$

im Falle $k = 1$, ist dann sicher nach z auflösbar. Der g.g.T. der Elemente von

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + q z \mathfrak{e}_k \quad (k > 1), \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{x} + q z \mathfrak{e}_2 \quad (k = 1),$$

ist dann sicher gleich 1, denn es gilt ja auch $\mathfrak{a}'\mathfrak{y} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ q)$. $\mathfrak{y}$ ist primitiv, es gibt eine Ergänzung $(\mathfrak{y}\, *)$ in Ω_n. Damit ist nachgewiesen, daß die Menge (4.1) die Menge (4.2) umfaßt, d.h. die Behauptung über $a_n(q)$ ist richtig.

[2]) Man überlegt sich zuerst, daß $\omega_n(q)$ für teilerfremde Argumente multiplikativ ist, so daß man o. E. q als Primzahlpotenz annehmen kann.

Man sieht nun leicht, daß das System (4.2) mit dem System der

$$(4.3) \qquad \begin{cases} \pmod q \text{ inkongruenten ganzen Vektoren } \mathfrak{x} \text{ mit} \\ \text{g.g.T. } (x_1, x_2, \ldots, x_n, q) = 1 \end{cases}$$

identisch ist. Damit ist

$$(4.4) \qquad a_n(q) = q^n \prod_{p|q} (1 - p^{-n}),$$

denn die Anzahl von (4.3) ist nach bekannten elementaren Schlüssen gleich der rechten Seite von (4.4).

b) Mit

$$\omega_n^*(q) = \frac{\omega_n(q)}{\varepsilon(q)}, \qquad \omega_1(q) = 1,$$

ist $\omega_n^*(q)$ gleich der Anzahl der $(\bmod q)$ inkongruenten $\mathfrak{U}$ aus Ω_n, so daß

$$(4.5) \qquad \frac{\omega_n^*(q)}{a_n(q)}$$

die Anzahl der $(\bmod q)$ inkongruenten $\mathfrak{U}$ aus Ω_n darstellt, deren erste Spalten $(\bmod q)$ kongruent sind. Sind $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ zwei solche Matrizen, dann gilt bei

$$\mathfrak{U}_\nu = (\mathfrak{x}_\nu, *), \quad \mathfrak{U}_1^{-1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{y}' \\ \mathfrak{Q} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{y}'\mathfrak{x}_1 = 1, \quad \mathfrak{Q}\mathfrak{x}_1 = 0$$

sofort

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{U}_1^{-1}\mathfrak{U}_2 = \begin{pmatrix} \mathfrak{y}'\mathfrak{x}_2 & * \\ \mathfrak{Q}\mathfrak{x}_2 & * \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod q$$

und $\mathfrak{W}$ liegt in Ω_n. (4.5) ist also gleich der Anzahl der inkongruenten

$$\mathfrak{W} \text{ aus } \Omega_n, \ \mathfrak{W} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod q,$$

also gleich dem q^{n-1}-fachen der Anzahl der inkongruenten

$$\mathfrak{W} \text{ aus } \Omega_n, \quad \mathfrak{W} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{W}_0 \end{pmatrix} \pmod q.$$

Hier ist $|\mathfrak{W}_0| \equiv \pm 1 \pmod q$, und man zeigt durch Induktion nach der Zeilenzahl von $\mathfrak{W}_0$ leicht, daß es dann unimodulares $\mathfrak{V}^{(n-1)}$ mit

$$\mathfrak{W}_0 \mathfrak{V}^{-1} \equiv \mathfrak{E} \pmod q$$

gibt. Daher

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{U}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{V} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \mathfrak{V} \end{pmatrix} \pmod q, \quad \mathfrak{U} \text{ aus } \Omega_n[q], \quad \mathfrak{V} \text{ aus } \Omega_{n-1}.$$

ist somit gleich der Anzahl der (mod q) inkongruenten $\mathfrak{B}$ aus Ω_{n-1}, und die ist $\omega^*_{n-1}(q)$. Zusammen folgt

$$\omega^*_n(q) = \omega^*_1(q) \prod_{k=2}^{n} a_k(q)\, q^{k-1},$$

so daß mit (4.4) die erste Behauptung des Hilfssatzes bewiesen ist.

c) Ganz analog a) kann man nachweisen, daß $a_{2n}(q)$ gleichzeitig die Anzahl der (mod q) inkongruenten Vektoren $\mathfrak{x}$ ist, für die es ein $\mathfrak{M}$ aus M_n mit $\mathfrak{M} \equiv (\mathfrak{x}\ *)$ (mod q) gibt, denn aus dem Beweis von Satz C in [5] entnimmt man, daß es für beliebiges primitives $\mathfrak{y}$ ein $\mathfrak{M}$ aus M_n mit $\mathfrak{y}'\mathfrak{M} = (1, 0, \ldots, 0)$ gibt.

$$\mu^*_n(q) = \frac{\mu_n(q)}{\varepsilon(q)}, \qquad n \geq 1,$$

sei wieder die Anzahl der (mod q) inkongruenten $\mathfrak{M}$ aus M_n, also

$$\frac{\mu^*_n(q)}{a_{2n}(q)}$$

die Anzahl der (mod q) inkongruenten $\mathfrak{M}$ aus M_n mit $\mathfrak{M} \equiv (\mathfrak{e}_1\ *)$ (mod q). $\mathfrak{J}[\mathfrak{M}] = \mathfrak{J}$ liefert für diese $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{a}' & b & \mathfrak{b}' \\ 0 & \mathfrak{A} & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{B} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{C} & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{D} \end{pmatrix} \pmod{q}.$$

Durch rechtsseitige Multiplikation mit geeigneten Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{g}' & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathfrak{g} & \mathfrak{E} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & u & \mathfrak{u}' \\ 0 & \mathfrak{E} & \mathfrak{u} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathfrak{E} \end{pmatrix}$$

erkennt man, daß

$$\frac{\mu^*_n(q)}{a_{2n}(q) \cdot q^{2n-1}}$$

gleich der Anzahl der (mod q) inkongruenten Matrizen $\mathfrak{M}$ aus M_n mit

$$\mathfrak{M} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{A} & 0 & \mathfrak{B} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{C} & 0 & \mathfrak{D} \end{pmatrix} \pmod{q}$$

ist. Diese ist aber analog b) $\mu^*_{n-1}(q)$, so daß

$$\mu^*_n(q) = a_{2n}(q)\, q^{2n-1}\, \mu^*_{n-1}(q), \qquad n \geq 2,$$

folgt. Ein Induktionsschluß vollendet den Beweis.

Hilfssatz 2. *Sind y_k die Diagonalelemente der reduzierten positiven Matrix $\mathfrak{Y}^{(n)} = \operatorname{Im} \mathfrak{Z}$, und ist*

$$K_q(\mathfrak{Z}) = \sum_{\mathfrak{T} \geq 0} e_q(\mathfrak{T}\mathfrak{Z})$$

mit Summation über alle symmetrischen halbganzen halbpositiven $\mathfrak{T}^{(n)}$, dann ist

$$c_5 \prod_{k=1}^{n} \left(1 + y_k^{-\frac{n+1}{2}}\right)$$

eine Majorante der Reihe der Beträge von $K_q(\mathfrak{Z})$.

Beweis. $\mathfrak{Y}$ war reduziert, es folgt daher wegen (2.1)

$$\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{Y}) \geq c_3(t_1 y_1 + \cdots + t_n y_n).$$

Da die Anzahl der halbganzen halbpositiven $\mathfrak{T}$ mit festen Diagonalelementen $t_1, t_2, \ldots, t_n$ höchstens gleich

$$\prod_{k<l} (4\sqrt{t_k t_l} + 1) \leq \prod_{k<l} (4\sqrt{t_k} + 1)(4\sqrt{t_l} + 1) = \prod_{k=1}^{n} (4\sqrt{t_k} + 1)^{n-1}$$

ist, folgt

$$K_q(i\mathfrak{Y}) \leq \prod_{k=1}^{n} h(y_k),$$

wobei

$$h(y) = \sum_{t=0}^{\infty} (4\sqrt{t} + 1)^{n-1} e^{-c_6 t y}, \quad c_6 = \frac{2\pi}{q} c_3,$$

gesetzt ist. Die bekannte Abschätzung

$$h(y) \leq c_7 \left(1 + y_k^{-\frac{n+1}{2}}\right)$$

liefert dann die Behauptung.

Hilfssatz 3. *Ist*

$$h(\mathfrak{Z}) = \sum_{\mathfrak{T} \geq 0} a(\mathfrak{T})\, e_q(\mathfrak{T}\mathfrak{Z})$$

mit Summation über alle symmetrischen halbganzen halbpositiven $\mathfrak{T}^{(n)}$ gleichmäßig absolut in jedem abgeschlossenen ganz in H_n liegenden Bereich konvergent, dann ist $h(\mathfrak{Z})$ für alle $\mathfrak{Z}$ aus H_n mit $\operatorname{Im} \mathfrak{Z} \geq c\mathfrak{E}$ beschränkt.

Beweis. Der Beweis benutzt wesentlich eine auf SIEGEL zurückgehende Integraldarstellung von periodischen Funktionen, die als Verallgemeinerung der CAUCHYschen Integralformel aufgefaßt werden kann. Ist $W_n(q)$ der Würfel der $\mathfrak{X}^{(n)} = \mathfrak{X}' = (x_{kl})$ mit $-\frac{q}{2} \leq x_{kl} \leq \frac{q}{2}$ und $d\mathfrak{X}$ das euklidische Volumenelement,

$$d\mathfrak{X} = \prod_{k \leq l} dx_{kl},$$

dann gilt

$$(4.6) \qquad h(\mathfrak{Z}) = q^{-\frac{n(n+1)}{2}} \int_{W_n(q)} K_q(\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_0)\, h(\mathfrak{Z}_0)\, d\mathfrak{X}_0, \qquad \mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{X}_0 + i\,\mathfrak{Y}_0,$$

sofern $\mathrm{Im}(\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_0) > 0$ erfüllt ist.

Zum Beweis von (4.6) ist in der Bezeichnung des Hilfssatzes

$$a(\mathfrak{T}) = q^{-\frac{n(n+1)}{2}} \int_{W_n(q)} h(\mathfrak{Z}_0)\, e_q(-\mathfrak{T}\,\mathfrak{Z}_0)\, d\mathfrak{X}_0.$$

Ersetzt man in $h(\mathfrak{Z})$ alle Koeffizienten $a(\mathfrak{T})$ durch diese Integrale, dann kann man wegen Hilfssatz 2 Summation und Integration vertauschen, sobald nur $\mathrm{Im}(\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_0)$ positiv ist. Das ist aber schon (4.6).

$c > 0$ sei jetzt vorgegeben. Man setzt in (4.6) $\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{X}_0 + \frac{i}{2} c\,\mathfrak{E}$ und wählt $\mathrm{Im}\,\mathfrak{Z} \geq c\,\mathfrak{E}$, so daß

$$\mathfrak{Y}_1 = \mathrm{Im}(\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_0) = \mathfrak{Y} - \frac{c}{2}\mathfrak{E} \geq \frac{c}{2}\mathfrak{E}$$

folgt. $\mathfrak{U}$ aus Ω_n wird jetzt derart bestimmt, daß

$$\mathfrak{Y}_2 = \mathfrak{Y}_1[\mathfrak{U}] = (y_{kl})$$

reduziert ist. Hilfssatz 2 und (4.6) liefern sodann

$$|h(\mathfrak{Z})| \leq \max_{\mathfrak{X} \in W_n(q)} \left| h\left(\mathfrak{X} + \frac{i}{2} c\,\mathfrak{E}\right) \right| \cdot K_q(i\,\mathfrak{Y}_1)$$

$$\leq c_8 K_q(i\,\mathfrak{Y}_2) \leq c_9 \prod_{k=1}^{n} \left(1 + y_k^{-\frac{n+1}{2}}\right),$$

denn für unimodulares $\mathfrak{U}$ ist $K_q(\mathfrak{U}'\mathfrak{Z}\,\mathfrak{U}) = K_q(\mathfrak{Z})$. Bei

$$\mathfrak{U} = (\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \ldots, \mathfrak{u}_n)$$

ist

$$y_k = \mathfrak{Y}_1[\mathfrak{u}_k] \geq \frac{c}{2}\, \mathfrak{u}_k' \mathfrak{u}_k \geq \frac{c}{2},$$

so daß

$$|h(\mathfrak{Z})| \leq c_{10}$$

für alle $\mathfrak{Z}$ mit $\mathrm{Im}\,\mathfrak{Z} \geq c\,\mathfrak{E}$ folgt. c_{10} hängt nur von c, n, q und der Funktion $h(\mathfrak{Z})$ ab.

Hilfssatz 4. *Ist für rationales symmetrisches indefinites* $\mathfrak{T}^{(n)}$ $(n > 1)$ $u(\mathfrak{T}, m)$ *die Anzahl der* $\mathfrak{U}$ *aus* $\Omega_n[q]$, *die nach* $\Gamma_q(\mathfrak{T})$ *nicht linksassoziiert sind und der Bedingung*

$$\sigma(\mathfrak{U}'\mathfrak{T}\,\mathfrak{U}) = m$$

genügen, dann ist $u(\mathfrak{T}, m) > 0$ *für unendlich viele positive* m *und unendlich viele negative* m.

Beweis. $\mathfrak{T}$ war indefinit, es gibt also ganze $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ mit

$$\mathfrak{T}[\mathfrak{g}_1] > 0, \quad \mathfrak{T}[\mathfrak{g}_2] < 0.$$

Aus den Matrizen

$$\mathfrak{A}_\nu^{(n)} = (\mathfrak{g}_\nu, \mathfrak{g}_\nu, \ldots, \mathfrak{g}_\nu), \quad \mathfrak{D} = [d_1, d_2, \ldots, d_n] \quad (\nu = 1, 2)$$

mit beliebigen ganzen d_k bildet man

$$\mathfrak{U}_\nu = \mathfrak{E} + q\,\mathfrak{A}_\nu \mathfrak{D},$$

dann ist $\mathfrak{U}_\nu \equiv \mathfrak{E} \pmod q$ und

$$|\mathfrak{U}_\nu| = 1 + q\,\sigma(\mathfrak{A}_\nu \mathfrak{D}),$$

denn die Hauptunterdeterminanten in $\mathfrak{A}_\nu \mathfrak{D}$ von mehr als einer Zeile sind sämtlich Null. Bei $\mathfrak{g}'_\nu = (g_{1\nu}, g_{2\nu}, \ldots, g_{n\nu})$ ist

$$\sigma(\mathfrak{A}_\nu \mathfrak{D}) = \sum_{k=1}^{n} d_k g_{k\nu} \qquad (\nu = 1, 2),$$

und wegen $n > 1$ gibt es $\mathfrak{D}_\nu \neq 0$ mit $\sigma(\mathfrak{A}_\nu \mathfrak{D}) = 0$. Für jedes natürliche d liegen also bei $\mathfrak{D} = d\mathfrak{D}_\nu$ die $\mathfrak{U}_\nu$ in $\Omega_n[q]$, man hat

$$\sigma(\mathfrak{U}'_\nu \mathfrak{T} \mathfrak{U}_\nu) = \sigma(\mathfrak{T}) + 2q\,d\,\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{A}_\nu \mathfrak{D}_\nu) + (q\,d)^2 \sigma(\mathfrak{D}_\nu \mathfrak{D}_\nu) \cdot \mathfrak{T}[\mathfrak{g}_\nu].$$

Durch Wahl von d kann sodann

$$\sigma(\mathfrak{U}'_1 \mathfrak{T} \mathfrak{U}_1) > m,$$
$$\sigma(\mathfrak{U}'_2 \mathfrak{T} \mathfrak{U}_2) < -m$$

für alle natürlichen $m \geq m_0$ erreicht werden, wobei m_0 nur von $\mathfrak{T}$ abhängt.

Literatur.

[1] MAASS, H.: Über die Darstellung der Modulformen n-ten Grades durch POINCARÉsche Reihen. Math. Ann. **123**, 125—151 (1951). — [2] SIEGEL, C. L.: Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades. Math. Ann. **116**, 617—657 (1939). — [3] SIEGEL, C. L.: Note on automorphic funktions of several variables. Ann. of Math. (1) **43**, 613—616 (1942). — [4] SIEGEL, C. L.: Symplectic geometry. Amer. J. Math. **65**, 1—86 (1943). — [5] WITT, E.: Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades. Abh. math. Seminar Hansische Univ. **14**, 321—327 (1941).

Münster i. W., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 3. Oktober 1953.)

PEYERIMHOFF, A.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 417—424 (1954)

Summierbarkeitsfaktoren für absolut Cesàro-summierbare Reihen.

Von
ALEXANDER PEYERIMHOFF.

Es ist das Ziel dieser Arbeit, alle Summierbarkeitsfaktoren beim Übergang von $|C_\alpha|$-summierbaren Reihen zu $|C_\beta|$-summierbaren Reihen anzugeben.

Wir nennen eine Reihe $\sum_0^\infty a_n$ $|C_\alpha|$-summierbar ($\alpha > -1$), wenn die durch

$$\alpha_0 = a_0, \quad \alpha_n = \frac{1}{n A_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} \nu a_\nu, \quad (n \geq 1), \qquad A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n}$$

erklärte Reihe $\sum_0^\infty \alpha_n$ absolut konvergiert. Ist $\{x_n\}$ eine Zahlenfolge, so wird die $\varkappa$-te Differenz der x_n erklärt durch

$$\Delta^\varkappa x_n = \sum_{\varrho=n}^{\infty} A_{\varrho-n}^{-\varkappa-1} x_\varrho,$$

falls diese Reihe konvergiert. Ist $\varkappa \geq 0$ und $x_n = O(1)$, so existiert $\Delta^\varkappa x_n$.

Nach diesen Vorbereitungen können wir den zu beweisenden Satz folgendermaßen formulieren.

Satz 1. *Für alle $|C_\alpha|$-summierbaren Reihen ($\alpha \geq 0$) $\sum_0^\infty a_n$ ist die Reihe $\sum_0^\infty a_n \varepsilon_n$ genau dann $|C_\beta|$-summierbar ($\beta \geq 0$), wenn gilt*

$$\varepsilon_n = \begin{cases} O(n^{\beta-\alpha}) & \text{für } \beta \leq \alpha \\ O(1) & \text{für } \beta > \alpha \end{cases} \tag{1}$$

und

$$\Delta^\alpha \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \tag{2}$$

[Wegen (1) ist stets $\varepsilon_n = O(1)$, so daß $\Delta^\alpha \varepsilon_n$ existiert.]

Für die speziellen Faktoren $\varepsilon_n = \frac{1}{(n+1)^{\alpha-\beta}}$, $\varepsilon_n = \frac{1}{A_n^{\alpha-\beta}}$ gab KOGBETLIANTZ [5] (für den hinreichenden Teil von Satz 1) einen Beweis. Ein vereinfachter Beweis wurde vom Verfasser angegeben [7]. Für ganze Zahlen α und β wurde Satz 1 von BOSANQUET [2] bewiesen. Hier wie auch im entsprechenden Fall bei gewöhnlicher CESÀRO-Summierbarkeit treten naturgemäß beim Übergang zu nicht ganzen α und β erhebliche Schwierigkeiten auf (vgl. hierzu BOSANQUET [3]).

Im folgenden werden in § 1 verschiedene Hilfssätze aufgestellt, in § 2 werden zwei Spezialfälle von Satz 1 bewiesen. Diese Spezialfälle liefern einen Induktionsanfang für den Beweis des Satzes in § 3.

1. Hilfssätze.

Lemma 1. *Es sei* $\varkappa > 0$, $\beta \geq \alpha \geq 0$, $\tau(\varrho) = \operatorname{Max}(\varrho + \beta - \varkappa, \alpha)$ *für* $0 < \varrho \leq \varkappa$. *Erfüllt eine Folge* $\{\varepsilon_n\}$ *die Bedingungen*

$$\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \qquad \Delta^\varkappa \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right),$$

so ist

$$\Delta^\varrho \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^{\tau(\varrho)}}\right) \quad \text{für} \quad 0 < \varrho \leq \varkappa.$$

Beweis. Wegen $\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ist $\Delta^\varrho \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ für[1]) $\varrho \geq 0$. Der Beweis ist erbracht, wenn im Falle $\alpha < \beta$ gilt

$$\Delta^\varrho \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^{\varrho+\beta-\varkappa}}\right) \tag{3}$$

für alle ϱ aus dem Intervall

$$\operatorname{Max}(0, \varkappa + \alpha - \beta) < \varrho \leq \varkappa. \tag{4}$$

Ist (3) richtig für ein $\varrho = \varrho_0$ aus (4), so auch für alle ϱ mit $\varrho_0 - 1 < \varrho \leq \varrho_0$ die in (4) liegen. Nach einem Lemma von ANDERSEN[2]) ist nämlich

$$\Delta^\varrho \varepsilon_n = \Delta^{\varrho-\varrho_0} \Delta^{\varrho_0} \varepsilon_n,$$

da $\varepsilon_n = 0(1)$, $\varrho > 0$, $\varrho_0 > 0$, $\varrho - \varrho_0 > -1$ ist. Wegen[3])

$$\Delta^{\varrho-\varrho_0} \frac{O(1)}{n^{\varrho_0+\beta-\varkappa}} = O(1) \frac{1}{n^{\varrho+\beta-\varkappa}}$$

ist (3) erfüllt für die in Rede stehenden Werte von ϱ. Da (3) für $\varrho = \varkappa$ nach Voraussetzung gilt, ist diese Beziehung für alle ϱ aus (4) erfüllt.

Lemma 2. *Erfüllt eine Folge* $\{\varepsilon_n\}$ *die Bedingung*

$$\varepsilon_n = O(1), \quad \Delta^\alpha \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \qquad \alpha \geq 0, \tag{5}$$

so ist

$$\varepsilon_n = O(1), \quad \Delta^\alpha \left(\frac{\varepsilon_n}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \qquad \alpha \geq 0. \tag{6}$$

---

[1]) Für $\varrho \geq 0$ ist $\sum_{n=\nu}^{\infty} |A_{n-\nu}^{-\varrho-1}| < \infty$.

[2]) Ist $\varepsilon_n = O(1)$ $(= o(1))$, so existieren $\Delta^{\alpha+\beta}\varepsilon_n$ und $\Delta^\beta(\Delta^\alpha \varepsilon_n)$ für alle Zahlen $\alpha > 0$, $\beta > -1$, $\alpha + \beta > 0$ $(\alpha \geq 0,\ \beta \geq -1,\ \alpha + \beta \geq 0)$ und sind einander gleich. Vgl. ANDERSEN [1], BOSANQUET [3].

[3]) Ist $\gamma \leq 0$ und $\delta > |\gamma|$, so ist $\Delta^\gamma \frac{O(1)}{n^\delta} = \frac{O(1)}{n^{\delta+\gamma}}$. Dies folgt unmittelbar aus der für $\alpha \geq -1$, $\beta > \alpha$ gültigen Beziehung $\sum_{\mu=n}^{\infty} \frac{A_{\mu-n}^\alpha}{\mu A_\mu^\beta} = \frac{1}{n A_n^{\beta-\alpha-1}}$ $(n \geq 1)$, da hier $A_{\mu+n}^\alpha \geq 0$ ist.

Beweis für $\alpha > 0$ ($\alpha = 0$ ist trivial). Es sei k ganz und $0 \leq k < \alpha \leq k+1$. Nach dem Lemma von ANDERSEN ist für $n \geq 1$

$$\Delta^{\alpha} \frac{\varepsilon_n}{n} = \Delta^{\alpha-(k+1)} \Delta^{k+1} \frac{\varepsilon_n}{n}.$$

Die Richtigkeit von (6) ist bewiesen, wenn gilt[4])

$$\Delta^{\alpha-(k+1)} \left(\frac{O(1)}{n^{k+2-l}} \Delta^l \varepsilon_n \right) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}} \right) \quad \text{für} \quad l = 0, 1, \ldots, k \tag{7}$$

und

$$\Delta^{\alpha-(k+1)} \left(\frac{\Delta^{k+1} \varepsilon_n}{n+k+1} \right) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}} \right). \tag{8}$$

Nach Lemma 1 folgen aus (5) die Abschätzungen $\Delta^l \varepsilon_n = O(1/n^l)$ für $l = 0, 1, \ldots k$ und daraus folgt (7) unmittelbar[3]).

Nach dem Lemma von ANDERSEN ist $\Delta^{k+1} \varepsilon_n = \Delta^{k+1-\alpha}(\Delta^{\alpha} \varepsilon_n)$ und deshalb wegen (5) mit $\beta_n = O(1)$

$$\Delta^{\alpha-(k+1)} \left(\frac{\Delta^{k+1} \varepsilon_n}{n+k+1} \right) = \sum_{\varrho=n}^{\infty} \frac{A_{\varrho-n}^{k-\alpha}}{\varrho+k+1} \sum_{\mu=\varrho}^{\infty} A_{\mu-\varrho}^{\alpha-k-2} \frac{\beta_\mu}{\mu^{\alpha}}$$

$$= \sum_{\mu=n}^{\infty} \frac{\beta_\mu}{\mu^{\alpha}} \sum_{\varrho=n}^{\mu} A_{\mu-\varrho}^{\alpha-k-2} A_{\varrho-n}^{k-\alpha} \frac{1}{\varrho+k+1} \qquad (n \geq 1).$$

Nun ist

$$\sum_{\varrho=n}^{\mu} A_{\mu-\varrho}^{\alpha-k-2} A_{\varrho-n}^{k-\alpha} \frac{1}{\varrho+k+1} = \frac{1}{\mu+k+1} \left(\sum_{\varrho=n}^{\mu} A_{\mu-\varrho}^{\alpha-k-2} A_{\varrho-n}^{k-\alpha} \left\{ 1 + \frac{\mu-\varrho}{\varrho+k+1} \right\} \right)$$

$$= \frac{\delta_{\mu,n}}{\mu+k+1} + \frac{O(1)}{\mu \cdot n}$$ [5]) (es ist $A_{\mu-\varrho}^{\alpha-k-2}(\mu-\varrho) = c\, A_{(\mu-1-\varrho)}^{\alpha-k-1}$ für $\varrho < \mu$).

Aus dieser Abschätzung ergibt sich die Gültigkeit von (8).

Lemma 3. *Erfüllt eine Folge* $\{\varepsilon_n\}$ *die Bedingung* (6), *so ist*

$$\varepsilon_n = n \Delta^{-\alpha} \left(\Delta^{\alpha} \frac{\varepsilon_n}{n} \right) = n \Delta^{-\alpha} \frac{O(1)}{n^{\alpha+1}} \qquad \alpha \geq 0 \quad (n \geq 1) \tag{9}$$

Beweis für $\alpha > 0$ ($\alpha = 0$ ist trivial). Wir zeigen zunächst: Ist

$$\frac{\varepsilon_n}{n} = \Delta^{-\delta} \left(\Delta^{\delta} \frac{\varepsilon_n}{n} \right) \tag{10}$$

für ein δ mit $0 \leq \delta \leq \alpha$, so gilt (10) auch, wenn δ durch $\delta+1$ ersetzt wird, falls noch $\delta+1 \leq \alpha$ ist. Wegen $\frac{\varepsilon_n}{n} = O(1)$ ist zunächst nach dem Lemma von ANDERSEN

$$\Delta^{\delta} \frac{\varepsilon_n}{n} = \Delta^{-1} \left(\Delta^{1+\delta} \frac{\varepsilon_n}{n} \right).$$

---

[4]) Für ganzes $p \geq 0$ ist $\Delta^p x_n y_n = \sum_{\lambda=0}^{p} \binom{p}{\lambda} \Delta^{\lambda} x_n \, \Delta^{p-\lambda} y_{n+\lambda}$.

[5]) $\delta_{\mu,n} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \mu = n \\ 0 & \text{für} \quad \mu \neq n. \end{cases}$

Nach Lemma 1 ist $\Delta^{\delta+1}\frac{\varepsilon_n}{n}=O\left(\frac{1}{n^{\delta+2}}\right)$ $(\delta+1\leq\alpha)$ und deshalb[6])

$$\frac{\varepsilon_n}{n}=\Delta^{-\delta}\left(\Delta^{-1}\left\{\Delta^{\delta+1}\frac{\varepsilon_n}{n}\right\}\right)=\Delta^{-(\delta+1)}\left(\Delta^{\delta+1}\frac{\varepsilon_n}{n}\right).$$

Ist $k<\alpha\leq k+1$, so ist (10) nach dem Lemma von ANDERSEN erfüllt für $\delta=\alpha-k\leq 1$ und dies zieht nach der eben durchgeführten Überlegung die Gültigkeit von (10) für $\delta=\alpha$ nach sich.

Lemma 4. *Erfüllt eine Folge* $\{\varepsilon_n\}$ *die Bedingung* (9) $\left(\text{mit } \Delta^{\alpha}\frac{\varepsilon_n}{n}=O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)\right)$, *so erfüllt sie auch* (5).

Beweis für $\alpha>0$ ($\alpha=0$ ist trivial). Zunächst folgt aus (9) unmittelbar, daß $\varepsilon_n=O(1)$ ist[3]). Ferner ist mit $\beta_n=O(1)$

$$\Delta^{\alpha}\varepsilon_n=\sum_{\varrho=n}^{\infty}A_{\varrho-n}^{-\alpha-1}\,\varrho\sum_{\mu=\varrho}^{\infty}A_{\mu-\varrho}^{\alpha-1}\frac{\beta_\mu}{\mu^{\alpha+1}}=\sum_{\mu=n}^{\infty}\frac{\beta_\mu}{\mu^{\alpha+1}}\sum_{\varrho=n}^{\mu}A_{\mu-\varrho}^{\alpha-1}A_{\varrho-n}^{-\alpha-1}\,\varrho\qquad(n\geq 1),$$

woraus wegen

$$\sum_{\varrho=n}^{\mu}A_{\mu-\varrho}^{\alpha-1}A_{\varrho-n}^{-\alpha-1}\{(\varrho-n)+n\}=O(1)+n\,\delta_{\mu,n}$$

die Behauptung abgelesen werden kann.

Der für das folgende wesentliche Inhalt der Lemmata 2—4 besagt, daß die Bedingungen (5), (6) und (9) gleichbedeutend sind. Dabei kann (9) folgendermaßen formuliert werden: *Es gibt eine Folge* $\beta_n=O(1)$, *so daß* (*für ein* $\alpha\geq 0$) *gilt*[7])

$$\varepsilon_n=\sum_{\varrho=n}^{\infty}\beta_\varrho\frac{A_{\varrho-n}^{\alpha-1}\,n}{A_\varrho^{\alpha}\,\varrho}\qquad\text{für } n\geq 1. \tag{11}$$

Lemma 5. *Ist* $\sum a_n$ *eine* $|C_\alpha|$*-summierbare Reihe, so ist für* $\alpha>0$ *die Reihe* $\sum_1^{\infty}\frac{\delta_n}{n}$ *mit* $\delta_n=\frac{1}{(n+1)}\sum_{\nu=1}^{n}\nu\,a_\nu$ $(n\geq 1)$ $|C_{\alpha-1}|$*-summierbar und die Reihe* $\sum_1^{\infty}(n\,a_n-(n-1)\,a_{n-1})$ *ist* $|C_{\alpha+1}|$*-summierbar für* $\alpha>-1$.

Beweis. Es ist $\sum\frac{\delta_n}{n}$ die C_1-transformierte Reihe von $\sum_1^{\infty}a_n$, während $\sum_1^{\infty}a_n$ die C_1-transformierte Reihe von $\sum_1^{\infty}((n+1)\,a_n-(n-1)\,a_{n-1})$ ist. Die Behauptungen folgen nun unmittelbar aus dem bekannten Äquivalenzsatz[8]) $|C_{\alpha-1}C_1|\approx|C_\alpha|$ $(\alpha>0)$.

---

[6]) Ist $\varepsilon_n=O\left(\frac{1}{n^{\delta'+1}}\right)$, $\delta'>\delta\geq 0$, so ist $\Delta^{-\delta}(\Delta^{-1}\varepsilon_n)=\Delta^{-1-\delta}\varepsilon_n$.

[7]) Hier ist zu beachten, daß für $\alpha>-1$ $\varrho A_\varrho^{\alpha}=c\,\varrho^{\alpha+1}+o(\varrho^{\alpha+1})$ ist mit $c\neq 0$.

[8]) Vgl. [4], Satz 5.

2. Die Fälle $0 \leq \alpha \leq 1$, $\beta \geq 0$ und $0 \leq \beta \leq 1$, $\alpha \geq 0$.

Lemma 6. *Es sei* $0 \leq \alpha \leq 1$, $\beta \geq 0$. *Ist* $\sum a_n$ *eine* $|C_\alpha|$*-summierbare Reihe und erfüllt eine Folge* $\{\varepsilon_n\}$ *die Bedingungen* (1) *und* (11), *so ist die Reihe* $\sum a_n \varepsilon_n$ $|C_\beta|$*-summierbar*[9]).

Beweis. Bezeichnen wir die C_α-Transformation der Reihe $\sum a_n$ mit $\sum \alpha_n$ und die C_β-Transformation der Reihe $\sum a_n \varepsilon_n$ mit $\sum \beta_n$, so ist[10])

$$\beta_0 = \varepsilon_0 \alpha_0, \quad \beta_n = \frac{1}{n A_n^\beta} \sum_{\mu=1}^{n} \mu A_\mu^\alpha \alpha_\mu \sum_{\nu=\mu}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1} A_{\nu-\mu}^{-\alpha-1} \varepsilon_\nu \quad \text{für} \quad n \geq 1$$

und die Behauptung ist genau dann richtig, wenn gilt

$$\mu^{\alpha+1} \sum_{n=\mu}^{\infty} \frac{1}{n A_n^\beta} \left| \sum_{\nu=\mu}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1} A_{\nu-\mu}^{-\alpha-1} \varepsilon_\nu \right| = O(1) \qquad (\mu \to \infty, \ \mu \geq 1). \tag{12}$$

Es ist

$$\sum_{\nu=\mu}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1} A_{\nu-\mu}^{-\alpha-1} (\varepsilon_\mu + (\varepsilon_\nu - \varepsilon_\mu)) = \varepsilon_\mu A_{n-\mu}^{\beta-\alpha-1} + \sum_{\nu=\mu}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1} A_{\nu-\mu}^{-\alpha-1} (\varepsilon_\nu - \varepsilon_\mu). \tag{13}$$

Ist $\beta = 0$, so geht die rechte Seite über in $\varepsilon_n A_{n-\nu}^{-\alpha-1}$ und (12) ist dann erfüllt wegen (1) und $\sum_{n=\mu}^{\infty} |A_{n-\mu}^{-\alpha-1}| < \infty$. Wir dürfen im folgenden also annehmen, daß $\beta > 0$ ist. Setzt man das erste Glied auf der rechten Seite von (13) für die innere Summe in (12) ein, so ist (12) erfüllt wegen (1) und $\sum_{n=\mu}^{\infty} |A_{n-\mu}^{\beta-\alpha-1}| < \infty$ für $\beta \leq \alpha$ bzw. Fußnote [3]) für $\beta > \alpha$[11]). Trägt man im zweiten Glied rechts für ε_ν und ε_μ die Darstellung (11) ein, so gilt nach einer einfachen Umformung

$$\begin{aligned}
A_{n,\mu} &= \sum_{\nu=\mu}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1} A_{\nu-\mu}^{-\alpha-1} (\varepsilon_\nu - \varepsilon_\mu) \\
&= \sum_{\varrho=\mu}^{n} \frac{\beta_\varrho}{\varrho A_\varrho^\alpha} \left(\left\{ \sum_{\nu=\mu}^{\varrho} A_{\varrho-\nu}^{\alpha-1} A_{\nu-\mu}^{-\alpha-1} A_{n-\nu}^{\beta-1} \nu \right\} - A_{n-\mu}^{\beta-\alpha-1} A_{\varrho-\mu}^{\alpha-1} \mu \right) + \\
&\quad + \sum_{\varrho=n+1}^{\infty} \frac{\beta_\varrho}{\varrho A_\varrho^\alpha} \sum_{\nu=\mu}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1} A_{\nu-\mu}^{-\alpha-1} (A_{\varrho-\nu}^{\alpha-1} \nu - A_{\varrho-\mu}^{\alpha-1} \mu) \\
&= \sum_{\varrho=\mu}^{n} \frac{\beta_\varrho}{\varrho A_\varrho^\alpha} (\mathrm{I} - A_{n-\mu}^{\beta-\alpha-1} A_{\varrho-\mu}^{\alpha-1} \mu) + \sum_{\varrho=n+1}^{\infty} \frac{\beta_\varrho}{\varrho A_\varrho^\alpha} \mathrm{II}.
\end{aligned} \tag{14}$$

[9]) Für $\beta \geq \alpha$ ist die Bedingung (1) nach Lemma 4 eine Folge aus (11).

[10]) Vgl. hierzu [7] S. 263.

[11]) Diese Fallunterscheidung kann vermieden werden, wenn man beachtet, daß es genügt, wenn Lemma 6 für den Fall $\beta \leq \alpha$ bewiesen wird; dies folgt unmittelbar aus der Beziehung $|C_k| \subseteq |C_{k'}|$ für $-1 < k \leq k'$ (vgl. [4]) und der Tatsache, daß die Bedingungen (1) und (11) für $\beta > \alpha$ und $\beta = \alpha$ gleich sind. Diese Bemerkung bringt jedoch keine weitere Vereinfachung des folgenden Beweises.

Zur Abschätzung von I und II verwenden wir die folgenden Ungleichungen: $0 \leq A^{\gamma}_{n-\nu_1}\nu_1 \leq A^{\gamma}_{n-\nu_2}\nu_2$ für $-1 \leq \gamma \leq 0$, $0 \leq \nu_1 \leq \nu_2 \leq n$, $A^{-\alpha-1}_{\nu-\mu} \leq 0$ für $0 \leq \alpha \leq 1$ und $\nu > \mu$, $A^{\delta}_{n-\nu} \geq 0$ für $\delta \geq -1$, $\nu \leq n$. Unter Verwendung dieser Ungleichungen erkennt man die Richtigkeit der Abschätzungen

$$\mathrm{I} \leq A^{\beta-1}_{n-\mu}\,\mu \sum_{\nu=\mu}^{\varrho} \cdot A^{\alpha-1}_{\varrho-\nu} A^{-\alpha-1}_{\nu-\mu} = 0 \quad \text{für} \quad \varrho > \mu$$

und $\mathrm{II} \leq 0$. Aus (14) folgt also (mit $|\beta_\varrho| \leq K$) die Beziehung

$$(15)\quad \begin{cases} |A_{n,\mu}| \leq K \left\{ \sum_{\varrho=\mu}^{n} \frac{1}{\varrho A^{\alpha}_{\varrho}} (-\mathrm{I} + A^{\beta-\alpha-1}_{n-\mu} A^{\alpha-1}_{\varrho-\mu}\mu) + \sum_{\varrho=n+1}^{\infty} \frac{-\mathrm{II}}{\varrho A^{\alpha}_{\varrho}} \right\} \\ \qquad + 2K \frac{A^{\beta-1}_{n-\mu}\mu}{\mu A^{\alpha}_{\mu}} + 2K |A^{\beta-\alpha-1}_{n-\mu}| \mu \sum_{\varrho=\mu}^{n} \frac{A^{\alpha-1}_{\varrho-\mu}}{\varrho A^{\alpha}_{\varrho}} = O(1) \frac{(n+1-\mu)^{\beta-1}}{\mu^{\alpha}}; \end{cases}$$

der Ausdruck in { } verschwindet nämlich, da er mit $-A_{n,\mu}$ für $\varepsilon_\nu = 1$ [wegen $\beta_\varrho = 1$; beachte die Formel in Fußnote [3])] übereinstimmt, ferner ist

$$\sum_{\varrho=\mu}^{n} \frac{A^{\alpha-1}_{\varrho-\mu}}{\varrho A^{\alpha}_{\varrho}} \leq \frac{A^{\alpha}_{n-\mu}}{\mu A^{\alpha}_{\mu}} \quad \text{und} \quad |A^{\beta-\alpha-1}_{n-\mu}| A^{\alpha}_{n-\mu} = O(1)\,(n+1-\mu)^{\beta-1}.$$

Aus der Abschätzung (15) geht nun hervor, daß (12) auch für $\beta > 0$ erfüllt ist; dies folgt unmittelbar aus der Beziehung

$$\mu^{\alpha+1} \sum_{n=\mu}^{\infty} \frac{1}{n A^{\beta}_{n}} \frac{(n+1-\mu)^{\beta-1}}{\mu^{\alpha}} = O(1) \quad (\beta > 0).$$

Lemma 7. *Es sei $0 \leq \beta \leq 1$, $\alpha \geq 0$. Ist $\sum a_n$ eine $|C_\alpha|$-summierbare Reihe und erfüllt eine Folge $\{\varepsilon_n\}$ die Bedingungen (1) und (11), so ist die Reihe $\sum a_n \varepsilon_n$ $|C_\beta|$-summierbar.*

Beweis. Es sei k ganz und $0 \leq k < \alpha \leq k+1$. Wir erbringen den Beweis durch Induktion nach k. Für $k = 0$ ist die Behauptung nach Lemma 6 richtig. Wir nehmen an, daß sie bereits für alle $k \leq p$, d.h. für alle α aus $0 < \alpha \leq p+1$ ($p \geq 0$) richtig ist. Es sei nun $p+1 < \alpha \leq p+2$. Für $n \geq 1$ ist

$$(16)\quad \sum_{1}^{n} a_\nu \varepsilon_\nu = \varepsilon_{n+1} \delta_n + \sum_{1}^{n} \varepsilon_\nu \frac{\delta_\nu}{\nu} + \sum_{1}^{n} (\nu \Delta \varepsilon_\nu) \frac{\delta_\nu}{\nu} = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III},$$

wo $\sum_{1}^{\infty} \frac{\delta_n}{n}$ nach Lemma 5 $|C_{\alpha-1}|$-summierbar ist. Wir zeigen zunächst, daß II und III $|C_\beta|$-limitierbar sind. Dabei machen wir Gebrauch von der Äquivalenz der Bedingungen (5), (6) und (11).

Die Folge $\{\varepsilon_n\}$ erfüllt (11), nach Lemma 4 ist also $\varepsilon_n = O(1)$, $\Delta^{\alpha}\varepsilon_n = O(1/n^{\alpha})$, und daraus nach Lemma 1

$$(17)\quad \varepsilon_n = O(1), \quad \Delta^{\alpha-1}\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$$

und $\Delta\varepsilon_n = O(1/n)$, so daß gilt

$$(18) \qquad n\,\Delta\varepsilon_n = O(1), \qquad \Delta^{\alpha-1}\left(\frac{n\,\Delta\varepsilon_n}{n}\right) = \Delta^{\alpha}\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

Wegen (1) ist schließlich

$$(19) \qquad \varepsilon_n = O(n^{\beta-(\alpha-1)}), \qquad n\,\Delta\varepsilon_n = O(n^{\beta-(\alpha-1)}).$$

Die Folgen $\{\varepsilon_n\}$ und $\{n\Delta\varepsilon_n\}$ erfüllen wegen (17), (18) und (19) die Bedingungen (1) und (11), wenn dort α durch $\alpha-1$ ersetzt wird. Auf Grund der Induktionsvoraussetzung sind also die Reihen $\sum_1^{\infty}\varepsilon_\nu\frac{\delta_\nu}{\nu}$ und $\sum_1^{\infty}(\nu\,\Delta\varepsilon_\nu)\frac{\delta_\nu}{\nu}$ $|C_\beta|$-summierbar, d.h. die Folgen II und III sind $|C_\beta|$-limitierbar. Wir bemerken noch, daß auch die Reihe $\sum_1^{\infty}\varepsilon_{\nu+1}\frac{\delta_\nu}{\nu}$ $|C_\beta|$-summierbar ist [wegen (17) und (19)]; ferner ist $\sum_1^{\infty}\left|\frac{\delta_\nu}{\nu}\frac{1}{\nu^{\alpha-1}}\right| < \infty$, denn die Folge $\varepsilon_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 7 wenn $\beta = 0$ ist und α durch $\alpha-1$ ersetzt wird (für diese Werte ist Lemma 7 nach der Induktionsvoraussetzung richtig).

Um die $|C_\beta|$-Limitierbarkeit von I nachzuweisen, gehen wir aus von der Beziehung

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1}\,\nu(\varepsilon_{\nu+1}\delta_\nu - \varepsilon_\nu\delta_{\nu-1}) = -\sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1}\,\nu\,\varepsilon_{\nu+1}\frac{\delta_\nu}{\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-2}(\nu+1)\,\varepsilon_{\nu+1}\delta_\nu$$
$$= B_n + C_n \qquad (\delta_0 = 0).$$

Da $\sum\varepsilon_{\nu+1}\frac{\delta_\nu}{\nu}$ $|C_\beta|$-summierbar ist, so ist $\sum_1^{\infty}\frac{|B_n|}{nA_n^{\beta}} < \infty$. Wegen $\sum_1^{\infty}\left|\frac{\delta_\nu}{\nu^{\alpha}}\right| < \infty$ und (1) ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|C_n|}{nA_n^{\beta}} \le \sum_{\nu=1}^{\infty}(\nu+1)\,|\varepsilon_{\nu+1}|\,|\delta_\nu|\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{|A_{n-\nu}^{\beta-2}|}{nA_n^{\beta}} = O(1)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\nu+1)\,\nu^{\beta-\alpha}}{\nu^{\beta+1}}\,|\delta_\nu| < \infty.$$

Aus diesen Beziehungen folgt unmittelbar die $|C_\beta|$-Limitierbarkeit der Folge I.

3. Beweis von Satz I.

1. Notwendigkeit der Bedingungen (1) und (2). Für den in Satz 1 angegebenen Sachverhalt ist die Bedingung (11) nach einem früheren Ergebnis des Verfassers notwendig[12]). Aus Lemma 4 ergibt sich dann die Notwendigkeit von (2). Da die genaue Größenbeschränkung der Glieder einer $|C_\alpha|$-summierbaren Reihe durch $o(n^{\alpha})$ gegeben wird[13]), ist die Bedingung (1) im Falle $\beta \le \alpha$ notwendig[14]), während (1) für $\beta > \alpha$ aus (11) folgt.

[12]) Vgl. [8], Satz 2 mit Bedingung (43) auf S. 275. (Vgl. auch § 12.) Diese Bedingung ist notwendig für die $\mathfrak{B}$-Summierbarkeit und somit erst recht für absolute $\mathfrak{B}$-Summierbarkeit.

[13]) Vgl. hierzu [8], Satz 10.

[14]) Vgl. [6], S. 38. Bei dem dort gegebenen Beweis fehlen hinter der Abschätzung $|\bar{\mu}_n| \le \sqrt{|\mu_n|} + 1$ die Worte „unendlich oft".

2. Die Bedingungen (1) und (2) sind hinreichend. Wir gehen aus von einem Zahlenpaar (α, β) mit $\alpha > 1$, $\beta > 1$. Sind die Bedingungen (1) und (2) für die Zahlenpaare $(\alpha - 1, \beta)$ und $(\alpha - 1, \beta - 1)$ hinreichend, so sind sie auch für (α, β) hinreichend. Unter diesen Voraussetzungen sind nämlich die Reihen $\sum_1^\infty \varepsilon_\nu \frac{\delta_\nu}{\nu}$ und $\sum_2^\infty \varepsilon_{\nu+1} \frac{\delta_\nu}{\nu}$ wegen (17) und $\varepsilon_n = O(n^{(\beta-1)-(\alpha-1)})$ $|C_{\beta-1}|$-summierbar (und deshalb auch $|C_\beta|$-summierbar), nach Lemma 5 ist ferner die Reihe $\sum_2^\infty \left(\nu\, \varepsilon_{\nu+1} \frac{\delta_\nu}{\nu} - (\nu-1)\, \varepsilon_\nu \frac{\delta_{\nu-1}}{\nu-1}\right)$ $|C_\beta|$-summierbar, d.h. die Folge $\{\varepsilon_{n+1}\delta_n\}$ ist $|C_\beta|$-limitierbar. Schließlich ist die Reihe $\sum_1^\infty (\nu \Delta \varepsilon_\nu) \frac{\delta_\nu}{\nu}$ wegen (18) und (19) $|C_\beta|$-summierbar. Wegen (16) ist nun $\sum a_\nu \varepsilon_\nu$ $|C_\beta|$-summierbar. Nach Lemma 6 und 7 sind die Bedingungen (1) und (2) für $0 \leq \alpha \leq 1$, $\beta \geq 0$ und $0 \leq \alpha$, $0 \leq \beta \leq 1$ hinreichend und deshalb nach der eben durchgeführten Überlegung für alle $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

Literatur.

[1] ANDERSEN, A. F.: Studier over Cesàro's summabilitetsmetode. Copenhagen 1921. — [2] BOSANQUET, L. S.: Note on convergence and summability factors. J. London Math. Soc. **20**, 39—48 (1945). — [3] BOSANQUET, L. S.: Note on convergence and summability factors. III. Proc. London Math. Soc. (2) **50**, 482—496 (1949). — [4] KNOPP, K., u. G. G. LORENTZ: Beiträge zur absoluten Limitierung. Arch. Math. **2**, 10—16 (1949). — [5] KOGBETLIANTZ, E.: Sur les séries absolument sommables par la méthode des moyennes arithmétiques. Bull. Sci. Math. (2) **49**, 234—256 (1925). — [6] PEYERIMHOFF, A.: Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z. **55**, 23—54 (1952). — [7] PEYERIMHOFF, A.: Über einen Satz von Herrn Kogbetliantz aus der Theorie der absoluten Cesàroschen Summierbarkeit. Arch. Math. **3**, 262—265 (1952). — [8] PEYERIMHOFF, A.: Untersuchungen über absolute Summierbarkeit. Math. Z. **57**, 265—290 (1953).

Gießen, Mathematisches Institut der Justus Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 17. Oktober 1953.)

VOLKMANN, B.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 425—433 (1954)

Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Ziffereigenschaften charakterisiert sind. IV.

Von
BODO VOLKMANN.

1. Ist ζ eine reelle Zahl mit $0 \leq \zeta \leq 1$ und $G(\zeta)$ die Menge der Zahlen ϱ, deren dyadische Entwicklung

$$\varrho = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{2^i} \qquad (e_i = 0 \text{ oder } 1, \text{ unendlich viele } e_i \neq 0) \tag{1}$$

der Bedingung

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_i = \zeta \tag{2}$$

genügt, so besagen Ergebnisse von BESICOVITCH[1]) und KNICHAL[2]), daß die gebrochene Dimension[3]) von $G(\zeta)$ für $\zeta = 0$ und $\zeta = 1$ verschwindet und sonst den Wert

$$\dim G(\zeta) = \frac{\zeta \log \zeta + (1-\zeta) \log (1-\zeta)}{\log \frac{1}{2}} \tag{3}$$

hat. Für eine Verallgemeinerung von (3) auf g-adische Entwicklungen

$$\varrho = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{g^i} \qquad (e_i,\ g \text{ ganz};\ 0 \leq e_i < g;\ \text{unendlich viele } e_i \neq 0) \tag{4}$$

mit $g \geq 2$ liegen zwei verschiedene Möglichkeiten nahe:

1. Man kann den Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} e_i$ in (2) als Anzahl der Einsen unter den ersten n Ziffern der dyadischen Entwicklung (1) auffassen, analog dazu bei g-adischen Entwicklungen (4) für $j = 0, \ldots, g-1$ die Anzahl $A_j(\varrho, n)$ der Ziffern e_i mit $i \leq n$ und $e_i = j$ betrachten und nach der gebrochenen Dimension der Menge $G(\zeta_0, \ldots, \zeta_{g-1})$ der Zahlen ϱ mit

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_j(\varrho, n)}{n} = \zeta_j \qquad \left(j = 0, \ldots, g-1;\quad 0 \leq \zeta_j \leq 1;\quad \sum_{j=0}^{g-1} \zeta_j = 1\right)$$

fragen.

---

[1]) BESICOVITCH, A. S.: On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system. Math. Ann. **110**, 321—330 (1934).

[2]) KNICHAL, V.: Dyadische Entwicklungen und HAUSDORFFsches Maß. Mém. Soc. Roy. Sci. Bohême, Cl. Sci. Nr. XIV (1933).

[3]) Wir verwenden hier die Terminologie von Teil I dieser Serie. Math. Z. **58**, 284—287 (1953).

2. Man kann den Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} e_i$ in (2) als Summe der ersten n Ziffern ansehen, entsprechend bei g-adischen Entwicklungen (4) die Funktion $S(\varrho, n) = \sum_{i=1}^{n} e_i$ einführen und die Menge $M(\zeta)$ der Zahlen ϱ mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(\varrho, n)}{n} = \zeta \qquad (0 \leq \zeta \leq g-1)$$

betrachten.

Beide Verallgemeinerungen sind von EGGLESTON vorgenommen worden, der zu folgenden Ergebnissen kam:

Satz 1[4]). Legt man dem Ausdruck $0 \cdot \log \infty$ den Wert 0 zu, so ist

$$\dim G(\zeta_0, \ldots, \zeta_{g-1}) = \frac{\sum_{j=0}^{g-1} \zeta_j \log \frac{1}{\zeta_j}}{\log g}.$$

Satz 2[5]). Sei τ die zwischen 0 und 1 gelegene Lösung der Gleichung

$$\sum_{j=0}^{g-1} (j-\zeta)\, z^j = 0. \tag{5}$$

Dann ist, wenn $0^0 = 1$ gesetzt wird,

$$\dim M(\zeta) = \frac{\log\left(\frac{1+\tau+\cdots+\tau^{g-1}}{\tau^{\zeta}}\right)}{\log g}. \tag{6}$$

In Teil II dieser Serie[6]) ist Satz 1 noch dadurch verallgemeinert worden, daß die Menge $\mathfrak{G} = \{0, 1, \ldots, g-1\}$ der g-adischen Ziffern in $m \geq 1$ paarweise elementfremde Mengen $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_m$ zerlegt wurde und man die Menge $G(\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_m; \zeta_1, \ldots, \zeta_m)$ der Zahlen ϱ betrachtete, bei deren g-adischer Entwicklung (4) die Funktionen

$$A_\mu(\varrho, n) = \sum_{\substack{i=1 \\ e_i \in \mathfrak{G}_\mu}}^{n} 1 \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \tag{7}$$

vorgeschriebenen Bedingungen der Form

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_\mu(\varrho, n)}{n} = \zeta_\mu \qquad \left(\mu = 1, \ldots, m;\ 0 \leq \zeta_\mu \leq 1;\ \sum_{\mu=1}^{m} \zeta_\mu = 1\right) \tag{8}$$

genügen. Es ergab sich der

Satz 3. Wird die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{G}_\mu$ mit w_μ bezeichnet $\left(\sum_{\mu=1}^{m} w_\mu = g\right)$, so ist

$$\dim G(\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_m; \zeta_1, \ldots, \zeta_m) = \frac{\sum_{\mu=1}^{m} \zeta_\mu \log \frac{w_\mu}{\zeta_\mu}}{\log g}. \tag{9}$$

---

[4]) EGGLESTON, H. G.: The fractional dimension of a set defined by decimal properties. J. Math. **20**, 31—36 (1949).

[5]) EGGLESTON, H. G.: Sets of fractional dimension which occur in some problems of number theory. Proc. London Math. Soc. **254**, 42—93 (1951). Theorem 14 und Korollar.

[6]) Math. Z. **59**, 247—254 (1953), Satz 1.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Satz bewiesen, der die Sätze 2 und 3, also auch den Satz 1, als Spezialfälle enthält und so die beiden verschiedenartigen Verallgemeinerungen von (3) unter neuen Gesichtspunkten wieder zusammenfaßt. Dabei werden die Grundgedanken der EGGLESTONschen Beweise teilweise beibehalten.

2. Wie bei Satz 3 sei die Menge $\mathfrak{G} = \{0, 1, \ldots, g-1\}$ der g-adischen Ziffern in m paarweise elementfremde Mengen $\mathfrak{G}_\mu = \{g_{\mu 1}, g_{\mu 2}, \ldots, G_{\mu w_\mu}\}$ zerlegt. Jeder Ziffer $g_{\mu\nu}$ aus $\mathfrak{G}_\mu$ sei eine nichtnegative reelle Zahl $\lambda_{\mu\nu} = \lambda(g_{\mu\nu})$ als „Gewicht" zugeordnet, und die $g_{\mu\nu}$ sollen so numeriert sein, daß $\lambda_{\mu 1} \geq \lambda_{\mu 2} \geq \cdots \geq \lambda_{\mu w_\mu}$ wird. Für eine Zahl ϱ mit der g-adischen Entwicklung (4) betrachten wir dann die Funktionen

$$S_\mu(\varrho, n) = \sum_{\substack{i=1 \\ e_i \in \mathfrak{G}_\mu}}^{n} \lambda(e_i), \quad A_\mu(\varrho, n) = \sum_{\substack{i=1 \\ e_i \in \mathfrak{G}_\mu}}^{n} 1 \quad \text{und} \quad A_{\mu\nu}(\varrho, n) = \sum_{\substack{i=1 \\ e_i = g_{\mu\nu}}}^{n} 1,$$

zwischen denen offensichtlich die Beziehungen

$$S_\mu(\varrho, n) = \sum_{\nu=1}^{w_\mu} \lambda_{\mu\nu} A_{\mu\nu}(\varrho, n), \quad A_\mu(\varrho, n) = \sum_{\nu=1}^{w_\mu} A_{\mu\nu}(\varrho, n) \tag{10}$$

bestehen.

Sind $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ nichtnegative reelle Zahlen mit $\zeta_\mu = 0$ im Falle $\lambda_{\mu 1} = 0$, so sei $M = M(\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_m;\ \lambda(0), \ldots, \lambda(g-1);\ \zeta_1, \ldots, \zeta_m)$ die Menge der ϱ mit $0 < \varrho \leq 1$, für die

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_\mu(\varrho, n)}{n} = \zeta_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \tag{11}$$

ist. Dann gilt der folgende

Ziffernsatz. Im kartesischen Koordinatensystem der m reellen Veränderlichen $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ sei H der Durchschnitt der Hyperebene $\sum_{\mu=1}^{m} \sigma_\mu = 1$ mit dem m-dimensionalen Würfel $0 \leq \sigma_\mu \leq 1$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ und W der durch

$$\frac{\zeta_\mu}{\lambda_{\mu 1}} \leq \sigma_\mu \leq \frac{\zeta_\mu}{\lambda_{\mu w_\mu}} \qquad (\mu = 1, \ldots, m)^{7}) \tag{12}$$

definierte Quader.

a) Ist der Durchschnitt $W \wedge H$ leer, so ist die Menge M leer.

b) Andernfalls sei für jedes $\sigma_\mu \neq 0$, das der Bedingung (12) genügt, $\tau_\mu(\sigma_\mu)$ die positive Lösung der Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{w_\mu} \left(\lambda_{\mu\nu} - \frac{\zeta_\mu}{\sigma_\mu}\right) z^{\lambda_{\mu\nu}} = 0, \tag{13}$$

falls es genau eine solche gibt, sonst $\tau_\mu(\sigma_\mu) = 1$, und ferner sei

$$\tau_\mu(\sigma_\mu) = \frac{\left(\sum_{\nu=1}^{w_\mu} \tau_\mu(\sigma_\mu)^{\lambda_{\mu\nu}}\right)^{\sigma_\mu}}{\tau_\mu(\sigma_\mu)^{\zeta_\mu}}.$$

---

7) Dabei ist der Ausdruck „0/0" $= 1$ zu setzen, ausgenommen im Fall $\zeta_\mu = \lambda_{\mu 1} = 0$, wo (11) als $0 \leq \sigma_\mu \leq 1$ zu lesen ist.

Dann ist

$$\dim M = \max_{(\sigma_1,\dots,\sigma_m)\in W\wedge H} \frac{\sum_{\mu=1}^{m} \log\left(\frac{\tau_\mu(\sigma_\mu)}{\sigma_\mu^{\sigma_\mu}}\right)}{\log g} = \delta. \tag{14}$$

Vor dem Beweis des Ziffernsatzes soll gezeigt werden, daß er die Sätze 2 und 3 wirklich als Spezialfälle enthält. Um Satz 2 zu erhalten, hat man $m=1$ und $\lambda(j)=j$ $(j=0,\dots,g-1)$ zu setzen. Der Durchschnitt $W\wedge H$ besteht dann nur aus dem Punkt 1, so daß in (12) $\sigma_1=1$ zu setzen ist. Damit geht (13) in (5) über, und da $\tau_1(1)=\tau$ sowie $\tau_1(1)=\frac{1+\tau+\cdots+\tau^{g-1}}{\tau^\zeta}$ wird, ist auch (14) mit (6) identisch.

Satz 3 gewinnt man aus dem Ziffernsatz dadurch, daß man $m=g$, $\mathfrak{B}_{\mu+1}=\{\mu\}$ und $\lambda(\mu)=1$ $(\mu=0,\dots,g-1)$ setzt. Dann besteht W gemäß (11) nur aus dem Punkt $(\zeta_1,\dots,\zeta_m)$, der nach (8) zu H gehört. Also ist $\sigma_\mu=\zeta_\mu$ $(\mu=1,\dots,m)$, und da somit bei den Gln. (13) die Koeffizienten $\lambda_{\mu\nu}-\frac{\zeta_\mu}{\sigma_\mu}$ sämtlich verschwinden, ist im Sinne des Ziffernsatzes überall $\tau_\mu(\sigma_\mu)=1$ zu setzen. Es ergibt sich $\tau_\mu(\sigma_\mu)=w_\mu^{\zeta_\mu}$, so daß (14) in (9) übergeht.

3. Zum Beweis von Teil a) des Ziffernsatzes verwenden wir den

Hilfssatz 1. Für irgendein ϱ mit $0<\varrho\leq 1$ sei

$$\underline{\sigma}_\mu(\varrho)=\varliminf_{n\to\infty}\frac{A_\mu(\varrho,n)}{n}, \qquad \bar{\sigma}_\mu(\varrho)=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{A_\mu(\varrho,n)}{n}$$

und $L(\varrho)$ der durch $\underline{\sigma}_\mu(\varrho)\leq\sigma_\mu\leq\bar{\sigma}_\mu(\varrho)$ $(\mu=1,\dots,m)$ definierte m-dimensionale Quader. Dann ist der Durchschnitt $L(\varrho)\wedge H$ nicht leer.

Beweis. Da die Glieder der Folge $\frac{A_1(\varrho,n)}{n}$ beschränkt sind, gibt es eine Folge $\{i_n^{(1)}\}$ natürlicher Zahlen, für die $\lim_{n\to\infty}\frac{A_1(\varrho,i_n^{(1)})}{i_n^{(1)}}$ existiert. Aus $\{i_n^{(1)}\}$ kann man eine Teilfolge $\{i_n^{(2)}\}$ auswählen, für die ebenfalls $\lim_{n\to\infty}\frac{A_2(\varrho,i_n^{(2)})}{n}$ existiert, daraus eine Teilfolge $\{i_n^{(3)}\}$ usw. So gelangt man zu einer Folge $\{i_n^{(m)}\}=i_n$, für die sämtliche m Grenzwerte

$$\psi_\mu=\lim_{n\to\infty}\frac{A_\mu(\varrho,i_n)}{i_n} \qquad (\mu=1,\dots,m)$$

vorhanden sind. Dann ist wegen

$$\sum_{\mu=1}^{m} A_\mu(\varrho,n)=n \qquad (n=1,2,\dots)$$

offenbar $\sum_{\mu=1}^{m}\psi_\mu=1$. Ferner gilt $\underline{\sigma}_\mu(\varrho)\leq\psi_\mu\leq\bar{\sigma}_\mu(\varrho)$ $(\mu=1,\dots,m)$ und somit $(\psi_1,\dots,\psi_m)\in L(\varrho)\wedge H$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Ist $\varrho\in M$, so gilt nach (9)

$$\lambda_{\mu w_\mu}A_\mu(\varrho,n)\leq S_\mu(\varrho,n)\leq\lambda_{\mu 1}A_\mu(\varrho,n) \qquad (n=1,2,\dots),$$

also in der Bezeichnungsweise des voranstehenden Hilfssatzes

$$\lambda_{\mu w_\mu}\bar{\sigma}_\mu(\varrho)\leq\zeta_\mu\leq\lambda_{\mu 1}\underline{\sigma}_\mu(\varrho)$$

und damit $\frac{\zeta_\mu}{\lambda_{\mu 1}} \leq \underline{\sigma}_\mu(\varrho) \leq \bar{\sigma}_\mu(\varrho) \leq \frac{\zeta_\mu}{\lambda_{\mu w_\mu}}$. Nach (11) ist also $W \geqq L(\varrho)$, und folglich kann $W \wedge H$ nicht leer sein, da sonst $L(\varrho) \geqq H$ leer wäre — im Widerspruch zu Hilfssatz 1.

4. Zum Beweis von Teil b) des Ziffernsatzes zeigen wir zunächst

$$\dim M \leq \delta. \tag{15}$$

Dazu benötigen wir den

Hilfssatz 2. Sei $\sigma_\mu = \frac{t_\mu}{n}$ eine der Bedingung (12) genügende Zahl und $N_\mu(t_\mu, n, \varepsilon)$ die Anzahl der t_μ-stelligen g-adischen Brüche $0, e_1 \dots e_{t_\mu}$, bei denen sämtliche e_i aus $\mathfrak{G}_\mu$ sind und ferner

$$(\zeta_\mu - \varepsilon)\, n \leq \sum_{i=1}^{t_\mu} \lambda(e_i) \leq (\zeta_\mu + \varepsilon)\, n \qquad (\mu = 1, \dots, m;\ \varepsilon > 0) \tag{16}$$

gilt. Dann gibt es eine positive, von ε und n unabhängige Zahl $K(\sigma_\mu)$ mit

$$N_\mu(t_\mu, n, \varepsilon) \leq \tau_\mu(\sigma_\mu)^{n(1+K(\sigma_\mu)\varepsilon)}. \tag{17}$$

Beweis. a) Die Zahlen $\lambda_{\mu 1}, \dots, \lambda_{\mu w_\mu}$ mögen alle denselben Wert λ_μ haben. Im Falle $\lambda_\mu > 0$ muß dann nach (12) $\sigma_\mu = \frac{\zeta_\mu}{\lambda_\mu}$ sein, und daher ist (16) für jede Ziffernfolge aus $\mathfrak{G}_\mu$ erfüllt, so daß $N_\mu(t_\mu, n, \varepsilon) = w_\mu^{\zeta_\mu n}$ wird. Daraus folgt (17), da im Sinne des Ziffernsatzes $\tau_\mu(\sigma_\mu) = w_\mu^{\zeta_\mu}$ ist. Im Falle $\lambda_\mu = 0$, wo definitionsgemäß $\zeta_\mu = 0$ ist und σ_μ gemäß Fußnote [7]) jeden Wert zwischen 0 und 1 annehmen kann, erhält man entsprechend $N_\mu(t_\mu, n, \varepsilon) = w_\mu^{t_\mu} = w_\mu^{\sigma_\mu n}$, so daß (17) ebenfalls erfüllt ist, da $\tau_\mu(\sigma_\mu) = w_\mu^{\sigma_\mu}$ wird.

b) Wenn die Zahlen $\lambda_{\mu 1}, \dots, \lambda_{\mu w_\mu}$ nicht alle gleich sind, ist $\tau_\mu(\sigma_\mu)$ als Lösung von (12) eindeutig, wie eine einfache algebraische Betrachtung zeigt.

b 1) Es sei zunächst vorausgesetzt, daß alle $\lambda_{\mu\nu}$ rational sind, also etwa $\lambda_{\mu\nu} = \frac{u_{\mu\nu}}{v}$ bei ganzen $u_{\mu\nu}$ und v. Somit läßt sich bei der Definition von $N_\mu(t_\mu, n, \varepsilon)$ unter Verwendung der Schreibweise $\lambda(g_{\mu\nu}) = \frac{u(g_{\mu\nu})}{v}$ die Gl. (16) ersetzen durch

$$(\zeta_\mu - \varepsilon)\, n\, v \leq \sum_{i=1}^{t_\mu} u(e_i) \leq (\zeta_\mu + \varepsilon)\, n\, v. \tag{18}$$

Daher wird, wenn man den Ausdruck $\left(\sum_{\nu=1}^{w_\mu} z^{u_{\mu\nu}}\right)^{t_\mu}$ als Polynom $\sum_{\varkappa=0}^{u_{\mu 1} t_\mu} \beta_{\mu\varkappa} z^\varkappa$ schreibt, offenbar

$$N_\mu(t_\mu, n, \varepsilon) = \sum_{\varkappa} \beta_{\mu\varkappa}, \quad \text{summiert über } (\zeta_\mu - \varepsilon)\, n\, v \leq \varkappa \leq (\zeta_\mu + \varepsilon)\, n\, v. \tag{19}$$

Für jeden dieser Koeffizienten $\beta_{\mu\varkappa}$ gilt nach dem Residuensatz

$$\beta_{\mu\varkappa} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}_\mu} \frac{\left(\sum_{\nu=1}^{w_\mu} z^{u_{\mu\nu}}\right)^{t_\mu}}{z^{\varkappa+1}}\, dz,$$

wobei $\mathfrak{K}_\mu$ eine geschlossene Kurve um den Nullpunkt ist. Wir wählen für $\mathfrak{K}_\mu$ den Kreis um den Nullpunkt, auf dem die Funktion

$$\left(\sum_{\nu=1}^{w_\mu}|z|^{u_{\mu\nu}}\right)^{t_\mu}|z|^{-\zeta_\mu n v}$$

möglichst klein wird. Es muß also

$$|z|^{\zeta_\mu n v}\, t_\mu\left(\sum_{\nu=1}^{w_\mu}|z|^{u_{\mu\nu}}\right)^{t_\mu-1}\left(\sum_{\nu=1}^{w_\mu}u_{\mu\nu}|z|^{u_{\mu\nu}-1}\right)-\left(\sum_{\nu=1}^{w_\mu}|z|^{u_{\mu\nu}}\right)^{t_\mu}\zeta_\mu n v\,|z|^{\zeta_\mu n v-1}=0$$

sein, woraus $\sum_{\nu=1}^{w_\mu}\left(u_{\mu\nu}-\frac{\zeta_\mu n v}{t_\mu}\right)|z|^{u_{\mu\nu}}=0$ und damit $|z|=r_\mu(\sigma_\mu)^{1/v}$ im Sinne von (13) folgt. Somit wird

$$\beta_{\mu\varkappa}=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r_\mu(\sigma_\mu)^{1/v}}\frac{\left(\sum_{\nu=1}^{w_\mu}z^{u_{\mu\nu}}\right)^{t_\mu}}{z^{\varkappa+1}}\,dz\Bigg|\le\frac{\left(\sum_{\nu=1}^{w_\mu}r_\mu(\sigma_\mu)^{u_{\mu\nu}/v}\right)^{t_\mu}}{r_\mu(\sigma_\mu)^{\varkappa/v}}$$

$$=\frac{\tau_\mu(\sigma_\mu)^n}{r_\mu(\sigma_\mu)^{\left(\frac{\varkappa}{v}-\zeta_\mu\right)n}}\le\tau_\mu(\sigma_\mu)^{n(1+K'(\sigma_\mu)\varepsilon)},$$

letzteres wegen $\left|\frac{\varkappa}{v}-\zeta_\mu\right|\le\varepsilon$. Folglich wird nach (19)

$$N_\mu(t_\mu,n,\varepsilon)\le 2\varepsilon n\,\tau_\mu(\sigma_\mu)^{n(1+K'(\sigma_\mu)\varepsilon)}\quad\text{mit}\quad K'(\sigma_\mu)>0.$$

b 2) Sind $\lambda_{\mu1},\dots,\lambda_{\mu w_\mu}$ beliebige nichtnegative reelle Zahlen, so seien $\lambda'_{\mu1}=\lambda'(g_{\mu1}),\dots,\lambda'_{\mu w_\mu}=\lambda'(g_{\mu w_\mu})\ge 0$ rationale Zahlen derart, daß

$$|\lambda_{\mu\nu}-\lambda'_{\mu\nu}|<\varepsilon_1\qquad(0<\varepsilon_1<\varepsilon;\ \nu=1,\dots,w_\mu)$$

ist. Dann folgt $\left|\sum_{i=1}^{t_\mu}\lambda(e_i)-\lambda'(e_i)\right|\le t_\mu\varepsilon_1$ und damit, wenn N'_μ und τ'_μ mit den $\lambda'_{\mu\nu}$ entsprechend wie N_μ und τ_μ mit den $\lambda_{\mu\nu}$ definiert werden, nach Teil b 1)

$$N_\mu(t_\mu,n,\varepsilon)\le N'_\mu(t_\mu,n,2\varepsilon)\le\tau'_\mu(\sigma_\mu)^{n(1+2K'(\sigma_\mu)\varepsilon)}.$$

Da ferner $r_\mu(\sigma_\mu)$ und damit auch $\tau_\mu(\sigma_\mu)$ eine stetige Funktion der $\lambda_{\mu\nu}$ ist, wird für genügend kleines ε_1 sicher $\tau'_\mu(\sigma_\mu)\le\tau_\mu(\sigma_\mu)^{1+\varepsilon}$ und somit

$$N_\mu(t_\mu,n,\varepsilon)\le\tau_\mu(\sigma_\mu)^{n(1+\varepsilon)(1+2K'(\sigma_\mu)\varepsilon)}\le\tau_\mu(\sigma_\mu)^{n(1+K(\sigma_\mu)\varepsilon)},$$

womit Hilfssatz 2 vollständig bewiesen ist.

Sei $R_n(\varepsilon)$ die Menge aller n-stelligen g-adischen Brüche $\varrho=0,e_1\dots e_n$ mit

$$(\zeta_\mu-\varepsilon)n\le S_\mu(\varrho,n)\le(\zeta_\mu+\varepsilon)n\qquad(\mu=1,\dots,m),\tag{20}$$

für die, wenn mit $t_\mu(\varrho)$ die Anzahl ihrer Ziffern aus $\mathfrak{G}_\mu$ bezeichnet wird, $\left(\frac{t_1(\varrho)}{n},\dots,\frac{t_m(\varrho)}{n}\right)\in W\wedge H$ ist. Die Anzahl der Elemente von $R_n(\varepsilon)$ ist dann

$$N(n,\varepsilon)=\sum_{t_1,\dots,t_m}\left(\frac{n!}{t_1!\dots t_m!}\prod_{\mu=1}^{m}N_\mu(t_\mu,n,\varepsilon)\right),\tag{21}$$

wobei über alle m-Tupel $(t_1, \ldots, t_m)$ mit $\left(\frac{t_1}{n}, \ldots, \frac{t_m}{n}\right) \in W \wedge H$ zu summieren ist. Denn bei festem t_μ gibt es $\frac{n!}{t_1! \ldots t_m!}$ Möglichkeiten, n Ziffernstellen in m Klassen von t_1 bzw. $t_2, \ldots, t_m$ Elemente zu unterteilen, und t_μ Stellen können auf $N_\mu(t_\mu, n, \varepsilon)$ Arten so besetzt werden, daß (20) für dieses μ erfüllt ist. Somit wird nach Hilfssatz 2

$$N(n, \varepsilon) \leq \sum_{t_1, \ldots, t_m} \left(\frac{n!}{t_1! \ldots t_m!} \prod_{\mu=1}^{m} \tau_\mu(\sigma_\mu)^{n(1+K(\sigma_\mu)\varepsilon)} \right).$$

Für irgendeinen Summanden $Q(t_1, \ldots, t_m; n)$ der rechten Seite erhält man, wenn man bei festen σ_μ den Grenzübergang $n \to \infty$ ausführt, nach der STIRLINGschen Formel

$$Q(t_1, \ldots, t_m; n) \leq \exp n \left(\sum_{\mu=1}^{m} \log \tau_\mu(\sigma_\mu) - \sum_{\mu=1}^{m} \sigma_\mu \log \sigma_\mu \right) \left(1 + \varepsilon \sum_{\mu=1}^{m} K(\sigma_\mu) + o(1) \right).$$

Somit ist, wenn der im Ziffernsatz auftretende Maximalwert δ für $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_m^*)$ angenommen wird,

$$Q(t_1, \ldots, t_m; n) \leq g^{n\delta(1+K^*\varepsilon+o(1))}, \quad \text{wo} \quad K^* = \sum_{\mu=1}^{m} K(\sigma_\mu^*) \quad \text{ist,}$$

und folglich

$$N(n, \varepsilon) < n^m g^{n\delta(1+K^*\varepsilon+o(1))}.$$

Die Vereinigungsmenge aller Intervalle der Länge g^{-n}, deren linker Eckpunkt zu $R_n(\varepsilon)$ gehört, werde mit $V_n(\varepsilon)$ bezeichnet. Dann bildet offenbar $\bigvee_{l=n}^{\infty} V_l(\varepsilon)$ eine g^{-n}-Überdeckung von M, so daß man bei jedem positiven η für das $(\delta+\eta)$-dimensionale HAUSDORFFsche Maß $\{M\}^{\delta+\eta}$ für hinreichend kleines ε die Abschätzung

$$\{M\}^{\delta+\eta} \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \frac{N(l, \varepsilon)}{g^{l(\delta+\eta)}} \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{l=n}^{\infty} \frac{g^{l\delta(1+K^*\varepsilon+o(1))} l^m}{g^{n(\delta+\eta)}}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{g^{n\delta(1+K^*\varepsilon+o(1))}}{g^{n(\delta+\eta)}} = 0$$

erhält, woraus (15) folgt.

5. Zum Abschluß des Beweises ist nun noch zu zeigen, daß

$$\dim M \geq \delta \tag{22}$$

ausfällt. Dazu setzen wir $\Sigma_\mu = \sum_{\nu=1}^{w_\mu} r_\mu (\sigma_\mu^*)^{\lambda_{\mu\nu}}$ und

$$\chi_{\mu\nu} = \frac{r_\mu (\sigma_\mu^*)^{\lambda_{\mu\nu}} \sigma_\mu^*}{\Sigma_\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots, m;\ \nu = 1, \ldots, w_\mu). \tag{23}$$

Dann ist $\sum_{\nu=1}^{w_\mu} \chi_{\mu\nu} = \sigma_\mu^*$ und daher wegen $\sum_{\mu=1}^{m} \sigma_\mu^* = 1$ offenbar $\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{w_\mu} \chi_{\mu\nu} = 1$. Bezeichnet man mit G die Menge der Zahlen ϱ, bei denen die g Bedingungen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{\mu\nu}(\varrho, n)}{n} = \chi_{\mu\nu} \qquad (\mu = 1, \ldots, m;\ \nu = 1, \ldots, w_\mu)$$

erfüllt sind, so wird für jedes $\varrho \in G$ nach (23) und (13)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_\mu(\varrho,n)}{n}=\sum_{\nu=1}^{w_\mu}\chi_{\mu\nu}\lambda_{\mu\nu}=\frac{\sigma_\mu^*}{\Sigma_\mu}\sum_{\nu=1}^{w_\mu}r_\mu(\sigma_\mu^*)^{\lambda_{\mu\nu}}\lambda_{\mu\nu}=\frac{\sigma_\mu^*}{\Sigma_\mu}\sum_{\nu=1}^{w_\mu}\frac{\zeta_\mu}{\sigma_\mu^*}r_\mu(\sigma_\mu^*)^{\lambda_{\mu\nu}}=\zeta_\mu,$$

also $G\subseteqq M$. Daher genügt der Nachweis, daß $\dim G=\delta$ ist. Dies folgt in der Tat aus Satz 1; denn es ist

$$\dim G=\frac{\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{w_\mu}\chi_{\mu\nu}\log\chi_{\mu\nu}}{\log\frac{1}{g}}=\frac{\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{w_\mu}\frac{\sigma_\mu^*}{\Sigma_\mu}r_\mu(\sigma_\mu^*)^{\lambda_{\mu\nu}}\log\left(\frac{r_\mu(\sigma_\mu^*)^{\lambda_{\mu\nu}}\sigma_\mu^*}{\Sigma_\mu}\right)}{\log\frac{1}{g}}$$

$$=\frac{\sum_{\mu=1}^{m}\frac{\sigma_\mu^*}{\Sigma_\mu}\log\left(r_\mu(\sigma_\mu^*)^{\sum_{\nu=1}^{w_\mu}\lambda_{\mu\nu}r_\mu(\sigma_\mu^*)^{\lambda_{\mu\nu}}}\left(\frac{\sigma_\mu^*}{\Sigma_\mu}\right)^{\Sigma_\mu}\right)}{\log\frac{1}{g}},$$

und da nach (13)

$$\frac{\sum_{\nu=1}^{w_\mu}\lambda_{\mu\nu}r_\mu(\sigma_\mu^*)^{\lambda_{\mu\nu}}}{\Sigma_\mu}=\frac{\zeta_\mu}{\sigma_\mu^*}$$

ist, wird somit

$$\dim G=\frac{\sum_{\mu=1}^{m}\sigma_\mu^*\log\left(r_\mu(\sigma_\mu^*)^{\frac{\zeta_\mu}{\sigma_\mu^*}}\frac{\sigma_\mu^*}{\Sigma_\mu}\right)}{\log\frac{1}{g}}$$

$$=\frac{\sum_{\mu=1}^{m}(\sigma_\mu^*\log\Sigma_\mu-\log r_\mu(\sigma^*)^{\zeta_\mu}-\sigma_\mu^*\log\sigma_\mu^*)}{\log g}=\delta.$$

6. Als Ergänzung zum Ziffernsatz beweisen wir zwei Zusätze:

Zusatz 1. Setzt man $\sum_{\nu=1}^{w_\mu}\lambda_{\mu\nu}=L_\mu$ $(\mu=1,\ldots,m)$, so ist das LEBESGUEsche Maß von M

$$\{M\}^1=\begin{cases}1, & \text{wenn } \zeta_\mu=\dfrac{L_\mu}{g} \quad \text{ist} \quad (\mu=1,\ldots,m)\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Beweis. In der Bezeichnungsweise von Nr. 5 sei $\chi_{\mu\nu}=\frac{1}{g}$ für alle μ und ν. Für die zugehörige Menge G ist dann bekanntlich[8]) $\{G\}^1=1$, und da für jedes $\varrho\in G$ offenbar

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_\mu(\varrho,n)}{n}=\sum_{\nu=1}^{w_\mu}\lambda_{\mu\nu}\lim_{n\to\infty}\frac{A_{\mu\nu}(\varrho,n)}{n}=\frac{L_\mu}{g}$$

[8]) Siehe Teil II, Fußnote [1]).

ist, folgt $G \subseteqq M.\left(\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_m; \lambda(0), \ldots, \lambda(g-1); \frac{L_1}{g}, \ldots, \frac{L_m}{g}\right)$, so daß $\{M\}^1 = 1$ wird. Daher wird in allen anderen Fällen $\{M\}^1 = 0$.

Zusatz 2[9]). Im Falle $m = 1$ seien

$$M_1 = M_1(\mathfrak{G}; \lambda(0), \ldots, \lambda(g-1); \zeta) \text{ und } M_2 = M_2(\mathfrak{G}; \lambda(0), \ldots, \lambda(g-1); \zeta)$$

die Mengen der ϱ mit

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_1(\varrho; n)}{n} \leqq \zeta \quad \text{bzw.} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_1(\varrho, n)}{n} \leqq \zeta$$

sowie M die entsprechende Menge des Ziffernsatzes. Ist dann $0 \leqq \zeta < \frac{L_1}{g}$, so wird $\dim M_1 = \dim M_2 = \dim M$.

Beweis. Wegen $M \subseteqq M_1 \subseteqq M_2$ genügt der Nachweis von

$$\dim M_2 \leqq \dim M. \tag{24}$$

Diesen erhält man durch eine leichte Modifikation von Nr. 4: Die Definitionsgleichung (18) ist durch

$$\sum_{i=1}^{t_1} u(e_i) \leqq (\zeta + \varepsilon)\, n\, v \tag{18'}$$

zu ersetzen, so daß man statt (19)

$$N_1(t_1, n, \varepsilon) = \sum_{\varkappa=0}^{s} \beta_{1\varkappa} \quad \text{mit} \quad s = \lceil (\zeta + \varepsilon)\, n\, v \rceil \tag{19'}$$

erhält. Da $W \wedge' H$ nur aus dem Punkt $\sigma_1 = 1$ besteht, wird wegen $\zeta < \frac{L_1}{g}$ nach (13) offenbar $r_1(\sigma_1) < 1$. Folglich wird

$$N_1(t_1, n, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z| = r_1(\sigma_1)} \frac{\left(\sum_{\nu=1}^{w_\mu} z^{u_{\mu\nu}}\right)^n dz}{(1-z)\, z^{s+1}} \leqq \tau_1(1)^{n(1+K\varepsilon)},$$

und alle weiteren Betrachtungen von Nr. 4 bleiben sinngemäß erhalten, so daß sich (23) ergibt.

[9]) Für den Spezialfall $\lambda(j) = j$ $(j = 0, \ldots, g-1)$ wurde diese Aussage bei EGGLESTON a. a. O.[5]) mitbewiesen.

Mainz, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 22. Oktober 1953.)

NEUMER, W.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 434—454 (1954)

Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. II.

Von
WALTER NEUMER*).

Vorbemerkung.

Der erste Abschnitt dieser voraussichtlich fünf Abschnitte umfassenden Arbeit (zitiert als I, II usw.) erschien in dieser Z. **58**, 391—413 (1953) und enthält die §§ 1 bis 3. Der vorliegende zweite Abschnitt, bestehend aus den §§ 4 bis 6, verknüpft die in I rein konstruktiv eingeführten Symbole $V, I, I', I'', \ldots$ unter Verallgemeinerung des Operatorbegriffs mit beliebigen, d.h. im „naiven" Sinn aufgefaßten Ordnungszahlen und entwickelt einen entsprechenden Algorithmus, der zum Unterschied vom konstruktiven Algorithmus des ersten Abschnitts als „freier" Algorithmus bezeichnet wird, jedoch wiederum die Darstellung von Ordnungszahlen durch Zeichenfiguren zum Zweck hat; dabei müssen natürlich die nicht effektiv definierten Ordnungszahlen durch Variable wiedergegeben werden (§ 4). Sodann wird gezeigt, wie sich im freien Algorithmus aus den Zahlenfiguren des konstruktiven Algorithmus schematische Normalformen für die Zahlen des Bereichs $[0, \vartheta V I I' I'' \ldots)$ gewinnen lassen (§§ 4, 5); anschließend wird nachgewiesen, daß dieser Bereich gegenüber den Operatoren des Algorithmus in gewissem Sinne abgeschlossen ist (§ 6).

Der dritte Abschnitt wird einige Rechenregeln und Beispiele für den Umgang mit dem Algorithmus bringen. Die in der Vorbemerkung zu I für II angekündigte Vergleichung des konstruktiven Algorithmus mit dem von ACKERMANN eingeführten Bezeichnungssystem für Ordnungszahlen wird erst in IV geschehen.

Die Numerierung der Paragraphen erfolgt durchgehend durch die ganze Arbeit; die Sätze, Formeln und Fußnoten werden in jedem Abschnitt neu numeriert.

2. Abschnitt.

Übertragung des Algorithmus auf beliebige Ordnungszahlen.

§ 4. Das Symbol $\alpha V I I' I'' \ldots$. — Die v-Normalformen.

1. Wir denken uns jetzt die Ordnungszahlen im Sinne CANTORs als Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen gegeben. 0 ist demnach die kleinste Ordnungszahl. — Mit λ soll immer eine Limeszahl bezeichnet werden. — Wir nehmen ferner eine hinreichend große reguläre (d.h. nur mit sich selbst konfinale) Ordnungszahl $P > \omega$ an und operieren im Bereich $[0, P)$[1]. — Sei

*) Herrn Prof. R. FURCH zum 60. Geburtstag gewidmet.

[1]) In einer geordneten Menge soll $[\alpha, \beta)$ das Intervall der Elemente γ mit $\alpha \leq \gamma < \beta$ bedeuten. Entsprechend $[\alpha, \beta]$, $(\alpha, \beta]$, (α, β).

$\alpha^{(0)} > 0$ eine feste, $\alpha \geq \alpha^{(0)}$ eine beliebige Zahl aus $[1, P)$ und V irgendein „Operator", den wir auf jedes $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$ anwenden können mit dem Ergebnis, daß eine Zahl $\alpha V > \alpha$ entsteht, die wieder dem Bereich $[\alpha^{(0)}, P)$ angehört. Wir nennen V einen *Operator erster Stufe im Bereich* $[\alpha^{(0)}, P)$. Wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, lassen wir den Zusatz „im Bereich ..." auch weg. Zwei Operatoren erster Stufe V und W im Bereich $[\alpha^{(0)}, P)$ gelten genau dann als gleich, $V = W$, wenn $\alpha V = \alpha W$ ist für $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$[2]).

Beispiele. 1. $\alpha V = \alpha + 1$. 2. $\alpha V = \alpha + \omega$. 3. $\alpha V = \alpha \cdot \omega$. 4. $\alpha V = \alpha^2$. 5. $\alpha V = \alpha^\alpha$. — In diesen Beispielen kann man etwa $P = \omega_1$ wählen, aber auch gleich jeder beliebigen regulären Zahl $> \omega$. In 1., 2., 3. genügt es, $\alpha^{(0)} = 1$ zu setzen, während man in 4. und 5. $\alpha^{(0)} \geq 2$ wählen muß.

6. Für $\alpha^{(0)} \geq \omega$ erkläre man αV als die nächste auf α folgende Anfangszahl. Dann wird für $\alpha \in [\omega_\nu, \omega_{\nu+1})$: $\alpha V = \omega_{\nu+1}$, $\omega_{\nu+1} V = \omega_{\nu+2}$ usw. Hier wählt man P natürlich mindestens gleich der kleinsten regulären Anfangszahl mit Limeszahlindex.

Man sieht leicht ein, daß sich induktiv die folgenden Iterationen von V für beliebige „Exponenten" ν und λ aus $[0, P)$ definieren lassen

$$(1) \qquad \alpha V^{\nu+1} = (\alpha V^\nu) V, \quad \alpha V^\lambda = \lim_{\nu < \lambda} \alpha V^\nu \quad (\alpha V^0 = \alpha,\ \alpha V^1 = \alpha V),$$

und daß dabei $\alpha V^\beta < P$ für $\beta < P$ gilt. Somit ist V^β mit festem $\beta \in [1, P)$ wieder ein Operator erster Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$.

Unter einem *Operator zweiter Stufe* J *in* $[\alpha^{(0)}, P)$ verstehen wir eine Vorschrift, welche aus einem beliebigen Operator erster Stufe V in $[\alpha^{(0)}, P)$ einen neuen Operator erster Stufe VJ in $[\alpha^{(0)}, P)$ macht derart, daß immer $\alpha V < \alpha V J < P$ gilt für $\alpha^{(0)} \leq \alpha < P$. Der Operator J kann dabei von der Zahl α abhängen. — Zwei Operatoren J und $\bar{J}$ in $[\alpha^{(0)}, P)$ gelten als gleich, $J = \bar{J}$, wenn $\alpha V \bar{J} = \alpha V J$ ist für alle $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$ und alle Operatoren erster Stufe V in $[\alpha^{(0)}, P)$. — Natürlich soll $\alpha V J = \alpha W J$ für $V = W$ sein.

Beispiele. 1. $\alpha V J = \alpha V^2$. 2. $\alpha V J = \alpha V^\alpha$ $(\alpha > 1)$. — Das Beispiel 2. wird in **III**, § 8, 4 ausführlich behandelt. — Als weiteres Beispiel s. unten (3_1).

Durch Induktion bestätigt man wieder für alle ν und λ aus $[0, P)$ die Zulässigkeit der Definitionen

$$(2_1) \quad \alpha V J^{\nu+1} = \alpha (V J^\nu) J, \quad \alpha V J^\lambda = \lim_{\nu < \lambda} \alpha V J^\nu \quad (\alpha V J^0 = \alpha V,\ \alpha V J^1 = \alpha V J)$$

sowie daß stets $\alpha V J^\beta < P$ für $\beta < P$ ist. Bei festem $\beta \in [1, P)$ ist daher $V J^\beta$ bzw. J^β wieder ein Operator erster bzw. zweiter Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$.

Analog können wir *Operatoren* 3., 4., ..., $(n+2)$. *Stufe* definieren. Sind $V, J (= J_0), J_1, \ldots, J_n$ Operatoren 1., 2., 3., ..., $(n+2)$. Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$, so ist $\alpha < \alpha V < \alpha V J < \alpha V J J_1 < \cdots < \alpha V J J_1 \ldots J_n < P$ für $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$. In dem Symbol $\alpha V J \ldots J_n$ ist J_n auf J_{n-1} ausgeübt, $J_{n-1} J_n$ ein Operator $(n+1)$. Stufe auf J_{n-2} ausgeübt, ..., $J J_1 \ldots J_n$ ein Operator zweiter Stufe auf V und $V J \ldots J_n$ ein Operator erster Stufe auf α ausgeübt. — Die Gleichheit von

[2]) Die Gleichheit von Ordnungszahlen ist natürlich jetzt im üblichen Sinn der Mengenlehre gemeint.

Operatoren 3., 4., ... Stufe wird analog wie bei Operatoren erster und zweiter Stufe erklärt. Entsprechend wie (1) und (2_1) läßt sich die Iteration von J_n mit beliebigen Exponenten ν und λ aus $[0, P)$ begründen:

$$(2_{n+1})\quad \begin{cases} \alpha V J \dots J_{n-1} J_n^{\nu+1} = \alpha V J \dots (J_{n-1} J_n^{\nu}) J_n, \quad \alpha V J \dots J_n^{\lambda} = \lim\limits_{\nu<\lambda} \alpha V J \dots J_n^{\nu} \\ (\alpha V J \dots J_{n-1} J_n^{0} = \alpha V J \dots J_{n-1}, \quad \alpha V J \dots J_{n-1} J_n^{1} = \alpha V J \dots J_{n-1} J_n). \end{cases}$$

Es folgt wieder, daß $\alpha V J \dots J_n^{\beta} < P$ wird für $\beta < P$, so daß J_n^{β} bei festem $\beta \in [1, P)$ ebenfalls einen Operator $(n+2)$. Stufe darstellt.

Nun definieren wir die speziellen Operatoren 2., 3., ... Stufe $I (= I^{(0)})$, I', I'', ..., die zu jedem Bereich $[\alpha^{(0)}, P)$ und jedem Operator erster Stufe V darin passen, wie folgt [vgl. I, § 1, (3), (3') usw.].

$$(3_1)\qquad \alpha V I = \lim \left\{ \alpha V, \alpha V^{\alpha V}, \alpha V^{\alpha V^{\alpha V}}, \dots \right\}$$

$$(3_2)\qquad \alpha V J I' = \lim \left\{ \alpha V J, \ \alpha V J^{\alpha V J}, \ \alpha V J^{\alpha V J^{\alpha V \cdot J}}, \dots \right\}$$

$$(3_{n+1})\quad \begin{cases} \alpha V J \dots J_{n-1} I^{(n)} = \lim \left\{ \alpha V J \dots J_{n-1}, \ \alpha V J \dots J_{n-1}^{\alpha V J \dots J_{n-1}}, \right. \\ \qquad\qquad \left. \alpha V J \dots J_{n-1}^{\alpha V J \dots J_{n-1}^{\alpha V J \dots J_{n-1}}}, \dots \right\}. \end{cases}$$

Die Zulässigkeit dieser Definitionen ergibt sich aus dem Umstand, daß die Zahlen in den { } immer $< P$ bleiben, somit auch die betreffenden Limites. Daher gilt auch noch

$$(4)\qquad \alpha V I I' I'' \dots = \lim_{n<\omega} \alpha V I \dots I^{(n)} < P.$$

Satz 1. *$\alpha V I$ bzw. $\alpha V J \dots J_{n-1} I^{(n)}$ $(n = 1, 2, \dots)$ ist die kleinste kritische Zahl der Normalfunktion αV^{ξ} bzw. $\alpha V J \dots J_{n-1}^{\xi}$ von ξ, unter $V, J, \dots, J_{n-1}$ Operatoren 1., 2., ..., $(n+1)$. Stufe verstanden.*

Der Beweis ist trivial (man zeigt $\xi < \alpha V^{\xi}$ für $\xi < \alpha V I$ usw.).

2. Auf Grund der schematischen Definitionen (1), (2), (3) können wir aus den Zeichen ( ), $V, I, I', I'', \dots$ unter Verwendung von Variablen für Zahlen $< P$ und Benützung der Potenzschreibweise für Operatoren gewisse endliche Figuren herstellen, welche Zahlen $< P$ repräsentieren und die wir die *schematischen Zahlenfiguren* des *freien Algorithmus der Symbole* $V, I, I', \dots$ nennen. (Wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, sprechen wir auch vom „freien Algorithmus" schlechthin.)

Beispiel. $\left(\alpha \left((V^{\beta})^{\gamma} \right) I^{\alpha_1 (V I)^{\beta_1 V I I'^{\gamma_1}}} \right) V (I I' I''^{\alpha_2})^{\beta_2 V}$

Eine solche schematische Zahlenfigur wollen wir mit $\mathfrak{F}$ bezeichnen und verschiedene $\mathfrak{F}$ durch Indizes unterscheiden. Ein $\mathfrak{F}$ besteht demnach aus end-

lich vielen Zeichen ( ), $V, I, I', \ldots$ und endlich vielen Variablen $\alpha, \alpha_1, \ldots, \beta, \beta_1, \ldots$ usw. für Zahlen $< P$, welche *Zahlenvariable* heißen. Eine Variable darf auch mehrmals in $\mathfrak{F}$ auftreten $\left(\text{z. B. } \mathfrak{F} = \alpha(V^{\alpha})I^{\beta V^{\beta}}\right)$. Für die $\mathfrak{F}$ gilt wieder das Prinzip der Schreibung von links nach rechts wie im konstruktiven Algorithmus (vgl. I, § 2, 3). — *Zeichen oder Bezeichnungsweisen für Addition, Multiplikation und Potenzierung von Ordnungszahlen kommen in einem $\mathfrak{F}$ nicht vor.* Ersetzen wir einige oder alle Variable in $\mathfrak{F}$ durch individuelle Zeichen für Zahlen aus $[1, P)$ oder durch Formeln aus der Arithmetik der Ordnungszahlen wie $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$, α^{β} u. ä., so sagen wir, die neue Zahlenfigur entstehe aus $\mathfrak{F}$ durch *Individualisierung*. αV^1 ist also kein $\mathfrak{F}$, wohl aber αV.

Eine Zahlenvariable in einem $\mathfrak{F}$ nennen wir *isoliert* an der Stelle wo sie steht, wenn sie daselbst nicht mit Operatorzeichen verknüpft ist; sie ist dann ein Exponent in $\mathfrak{F}$. Im obigen Beispiel sind $\beta, \gamma, \gamma_1, \alpha_2$ isoliert, $\alpha, \alpha_1, \beta_1, \beta_2$ nicht. Die nicht isolierten Variablen müssen also Zahlen aus $[\alpha^{(0)}, P)$ bedeuten. Von den isolierten Variablen verlangen wir, daß sie Zahlen aus $[1, P)$ darstellen. — Die im Links-rechts-Sinne erste nicht isolierte Zahlenvariable der Figur $\mathfrak{F}$ nennen wir ihre *Ausgangsvariable*; links von ihr stehen, von linken Klammern „(" etwa abgesehen, keine weiteren Zeichen mehr. Im obigen Beispiel ist α die Ausgangsvariable. Jede andere nicht isolierte Variable von $\mathfrak{F}$ ist Ausgangsvariable einer größten Teilfigur $\mathfrak{F}_1$ von $\mathfrak{F}$; $\mathfrak{F}_1$ ist wieder ein Exponent in $\mathfrak{F}$. Im genannten Beispiel ist α_1 die Ausgangsvariable des Exponenten $\alpha_1(VI)^{\beta_1 V I I'^{\gamma_1}}$. Eine nicht isolierte Variable bezeichnen wir auch als *Kernvariable* (natürlich an der Stelle, wo sie steht; dieselbe Variable kann ja einmal isoliert und einmal als Kern auftreten; Beispiel: αV^{α}).

Mit $\mathfrak{F}(\alpha)$ bezeichnen wir ein $\mathfrak{F}$, in welchem sämtliche Kernvariable gleich α sind und α auch nicht mehr isoliert auftritt. Ersetzen wir in $\mathfrak{F}(\alpha)$ die Variable α durch ein individuelles Zahlzeichen $\vartheta \geqq \alpha^{(0)}$ (z. B. $\vartheta = 1$ für $\alpha^{(0)} = 1$ oder $\vartheta = \omega$ für $\omega \geqq \alpha^{(0)}$), dann bezeichnen wir die so entstehende individualisierte Figur wieder mit $\mathfrak{F}(\vartheta)$; in ihr können also nur noch isolierte Variable auftreten.

Einen Operator zweiter Stufe J nennen wir einen *Iterator erster Stufe*, wenn stets $\alpha V J \in \{\alpha V^{\nu}\}_{2 \leq \nu < P}$ ist. Ferner heiße ein Operator $(n+2)$. Stufe J_n ein *Iterator* $(n+1)$. *Stufe*, wenn stets $\alpha V J \ldots J_{n-1} J_n \in \{\alpha V J \ldots J_{n-1}^{\nu}\}_{\nu \leq 2 < P}$ gilt für alle $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$ und jede Reihe $V, J, \ldots, J_{n-1}$ von Operatoren 1., 2., …, $(n+1)$. Stufe in diesem Bereich. — $I, I', I'', \ldots$ sind offenbar Iteratoren 1., 2., 3., … Stufe in jedem Bereich $[\alpha^{(0)}, P)$. — Ist J ein Iterator erster Stufe, β eine Zahl aus $[1, P)$, so ist auch J^{β} ein Iterator erster Stufe. Ist ferner J_1 ein Iterator zweiter Stufe, so ist JJ_1 wieder ein Iterator erster Stufe. Entsprechend für Iteratoren höherer Stufe. — Ist α die Ausgangsvariable von $\mathfrak{F}$, so gilt $\mathfrak{F} \in \{\alpha V^{\nu}\}_{1 \leq \nu < P}$.

Wählen wir $\alpha V = \alpha\omega$ und $\alpha^{(0)} = 1$, $P = \omega_1$, so ist klar, daß wir in dem hiermit festgelegten freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', \ldots$ unter anderem die sämtlichen Zahlenfiguren aus den Zeichen 1, ( ), $V, I, I', \ldots$ (ohne $+$-Zeichen) bilden können, die im konstruktiven Algorithmus von I möglich sind.

Aber darüber hinaus lassen sich im freien Algorithmus noch Figuren herstellen, die im konstruktiven Algorithmus auf Grund der Konstruktionsprinzipien I und II (I, § 1, **3**) verboten waren und die trotzdem nur Zahlen $< 1VII'I''\ldots$ darstellen. Hierbei kann dieselbe Zahl unter Umständen auf unendlich viele Weisen geschrieben werden, z. B. $1VI = 1V^{1VI} = 1V^{1V^{1VI}} = \ldots$. Nehmen wir noch das $+$-Zeichen hinzu, so lassen sich unter anderem sämtliche Zahlenfiguren des konstruktiven Algorithmus wiedergewinnen, wobei, wie wir in § 5, **5** sehen werden, die regulären Zahlenfiguren die Rolle von Normalformen für die Zahlen des durch $1VII'I''\ldots$ bestimmten Abschnitts der zweiten Zahlenklasse übernehmen.

3. Wir kehren zurück zum allgemeinen Fall eines beliebigen Bereichs $[\alpha^{(0)}, P)$ und eines beliebigen Operators erster Stufe V, den wir von jetzt ab festgehalten denken. Desgleichen wählen wir eine bestimmte Zahl $\vartheta \in [\alpha^{(0)}, P)$, die wir ebenfalls festhalten und von der aus wir den Algorithmus beginnen. Auch jetzt besteht eine Entsprechung zwischen den Zahlenfiguren des konstruktiven und gewissen Zahlenfiguren des freien Algorithmus, die wir im folgenden darstellen wollen.

Zu dem Zweck betrachten wir im konstruktiven Algorithmus zunächst diejenigen vollregulären Zahlenfiguren, welche nur aus den Zeichen 1, ( ), $V, I, I', \ldots$ bestehen, also ohne Verwendung des $+$-Zeichens gebildet sind[3]). Ersetzen wir in diesen Figuren überall 1 durch ϑ, so erhalten wir Zahlenfiguren $\mathfrak{F}(\vartheta)$ des freien Algorithmus, die in denselben Größenbeziehungen zueinander stehen wie die entsprechenden des konstruktiven Algorithmus, aber im allgemeinen ganz andere Ordnungszahlen darstellen, selbst wenn $\vartheta = 1$ ist. Die Gesamtheit der so gewonnenen speziellen $\mathfrak{F}(\vartheta)$ nennen wir das *Gerüst* der Menge $M(\vartheta) = [1, \vartheta VII'I'', \ldots)$.

Mit dem Gerüst sind aber nicht alle Zahlen aus $M(\vartheta)$ erfaßt, ausgenommen den Fall, daß $\vartheta = 1$ und $\alpha V = \alpha + 1$ ist für $\alpha \in [1, P)$[4]). Um auch bei beliebig großem ϑ und beliebig „starkem" V schematische Normalformen für die Zahlen aus $M(\vartheta)$ angeben zu können, bedienen wir uns gewisser Variabler x_i und v_j, die insbesondere in dem hauptsächlich vorauszusetzenden Fall zweckmäßig sind, wo zwischen α und αV immer unendlich viele Zahlen liegen.

Es bedeute x eine Zahl zwischen 1 und ϑV, αv eine Zahl zwischen α und αV. v ist natürlich kein Operator, es sei denn, V wäre durch $\alpha V = \alpha + 2$ erklärt. Verschiedene Variable x bzw. v unterscheiden wir durch untere oder obere Indizes. — Für zwei mit derselben Zahl α kombinierte Variable v_1, v_2 definieren wir die Relationen $v_1 = v_2$, $v_1 < v_2$, $v_1 \leq v_2$ als Abkürzung für die

[3]) Sie haben die Eigenschaft, daß es zu jeder genau eine Hilfsfigur gibt, welche also die Form $\lim_n \alpha_n$ hat; diese Eigenschaft ist aber nicht charakteristisch, denn z. B. $1V^2 + 1V$ hat sie auch.

[4]) Dann wird nämlich $1V = 2$, $1V^{1V} = (1V)V = 3$, $1V^{1V^{1V}} = 1V^{(1V)V} = \left(1V^{1V}\right)V = 4$ usw., $1VI = \omega$, allgemein $\alpha V^{\beta} = \alpha + \beta$, $\alpha VI = \alpha\omega$. Auf den so erklärten Grundoperator V läßt sich ebenfalls ein konstruktiver Algorithmus aufbauen; näheres s. III, § 7, **4**.

Relationen $\alpha v_1 = \alpha v_2$, $\alpha v_1 < \alpha v_2$, $\alpha v_1 \leq \alpha v_2$. Im Fall $v_1 = v_2$ dürfen v_1 und v_2 miteinander ausgetauscht werden. — $v_1 \neq v_2$ soll bedeuten, daß entweder v_1 und v_2 mit derselben Zahl α verknüpft sind und $\alpha v_1 \neq \alpha v_2$ gilt oder daß v_1 mit α, v_2 mit β verknüpft ist und $\alpha \neq \beta$ gilt, wobei es nicht darauf ankommt, ob $(\alpha, \alpha V) \cap (\beta, \beta V)$ leer ist oder nicht.

Wir zeigen im nächsten Paragraphen, daß sich jede Zahl aus $M(\vartheta)$ *formal* (nicht „effektiv") als eine endliche Figur aus den Zeichen ϑ, ( ), V, I, I', I'', ... und einer Reihe von Variablen $x_1, x_2, \ldots, v_1, v_2, \ldots$ schreiben läßt. Zur Vorbereitung gehen wir wieder von den vollregulären Zahlenfiguren des konstruktiven Algorithmus aus. In diesem hat eine transfinite Zahl nach **I**, § 3, **3** die Form

$$\eta = \chi_1 q_1 + \chi_2 q_2 + \cdots + \chi_k q_k + r, \tag{5}$$

wo die χ_i mit wachsendem i abnehmende Hauptzahlen sind (s. **I**, § 1, **5**, erster Absatz) und die q_i sowie r natürliche Zahlen; es kann $k = 1$ sein und r fehlen; ein $q_i = 1$ wird nicht hingeschrieben. χ_1 möge aus den Zeichen 1, +, ( ), V, $I, \ldots, I^{(n)}$ bestehen, also eine $I^{(n)}$-Zahl mit dem Anfang $1VI \ldots I^{(n)}$ sein (**I**, § 2, **3**); dann besteht auch η aus diesen Zeichen. (Das entsprechende gilt, wenn χ_1 eine V- oder I-Zahl ist.) η ist eine „zweidimensionale" Figur (**I**, § 1, **1**, erster Absatz); eine Reihe von Zeichen steht auf der ersten oder Grundzeile; dann folgen in der zweiten Zeile die zu gewissen Zeichen oder durch ( ) zusammengefaßten Zeichengruppen der ersten Zeile „rechts hoch" gestellten Zeichen, dann in der dritten Zeile die zu Zeichen oder Zeichengruppen der zweiten Zeile rechts hoch gestellten Zeichen usw. Als *Exponenten p. Stufe* von η bezeichnen wir diejenigen in η auftretenden Exponenten, deren Grundzeilen in der $(p+1)$. Zeile von η enthalten sind $(p = 1, 2, \ldots)$.

Die Zahlenfigur η in (5) heiße *n-zeilig* $(n = 1, 2, \ldots)$, wenn sie n Zeilen aufweist; für $n > 1$ enthält sie dann Exponenten bis einschließlich $(n-1)$. Stufe[5]).

Der Begriff der Zeilenanzahl existiert natürlich bei allen „zweidimensionalen" Figuren, die nach den Regeln der Potenzschreibweise aus Einzelzeichen gebildet sind (eine Variable mit Indizes gilt als Einzelzeichen). Diese Figuren weisen eine Links-rechts-Struktur auf, d.h. es stehen niemals zwei Zeichen in derselben Vertikalen. Das im Links-rechts-Sinne erste Zeichen bestimmt die Grundzeile, die zugleich die unterste Zeile ist. Von zwei unmittelbar aufeinander folgenden Zeichen steht das zweite entweder auf derselben Zeile wie das erste oder eine Zeile höher oder eine oder mehrere Zeilen tiefer. Ein „Exponent" ist eine größte Teilfigur von derselben Art wie die Gesamtfigur, deren Grundzeile nicht in der Grundzeile der Gesamtfigur liegt. — Die bisher und die noch zu definierenden Figuren gehören zu dieser Gattung.

4. Jeder vollregulären Zahlenfigur η des konstruktiven Algorithmus ordnen wir jetzt ein Schema $f_\vartheta(\eta)$ als eine sog. *v-Normalform* des freien Algorithmus zu, das zunächst für den Fall $\vartheta = 1$ definiert wird. — Für eine natürliche

[5]) Die Zeilenanzahl ist nicht mit der Stockwerksanzahl (**I**, § 3) zu verwechseln; $1V^{1+1}$ ist zweizeilig aber einstöckig, $1VI^{1V^{1+1}}$ ist dreizeilig aber I-einstöckig.

Zahl $n = 1 + 1 + \cdots + 1 > 1$ sei $f_1(n) = x$. — Ist χ eine einzeilige Hauptzahl, so besteht sie nur aus den Zeichen 1, ( ), V, I, ..., $I^{(n)}$ bzw. 1, ( ), V, je nachdem sie eine $I^{(n)}$- oder V-Zahl ist, wobei 1 nur einmal und zwar als das erste Zeichen auftritt, das keine linke Klammer ist. Wir setzen dann $f_1(\chi) = \chi$. Ist η eine einzeilige Zahl der Form (5) mit $\eta > \chi_1$, so sei $f_1(\eta) = f_1(\chi_1)v = \chi_1 v$.

Seien nun die $f_1(\eta)$ für alle 1- bis $(n-1)$-zeiligen vollregulären Zahlenfiguren η des konstruktiven Algorithmus definiert als endliche Figuren aus den Zeichen 1, ( ), $V, I, I', I'', \ldots$ und gewissen Variablen $x_1, x_2, \ldots, v_1, v_2, \ldots$, wobei keine Variable zweimal vorkommen soll. Sei χ eine n-zeilige Hauptzahl; ihre (etwa von links nach rechts gezählten) Exponenten erster Stufe $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ (die nicht alle verschieden zu sein brauchen) sind dann höchstens $(n-1)$-zeilig [wenigstens einer ist $(n-1)$-zeilig], und wir können ihre v-Normalformen $f_1(\varepsilon_i)$ angeben, wobei wir es mittels der nötigen Zahl von Indizes so einrichten, daß $f_1(\varepsilon_i)$ und $f_1(\varepsilon_j)$ für $i \neq j$ keine Variable x oder v gemein haben. Dann erklären wir $f_1(\chi)$ als die Figur, die sich aus χ ergibt, indem wir $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ durch $f_1(\varepsilon_1), \ldots, f_1(\varepsilon_q)$ ersetzen. In $f_1(\chi)$ kommt wieder keine Variable zweimal vor. — Ist endlich η eine n-zeilige Zahlenfigur der Form (5) mit $\eta > \chi_1$, so setzen wir $f_1(\eta) = f_1(\chi_1)v_k$, wo k etwa der erste Index ist, der bei den in $f_1(\chi_1)$ auftretenden v nicht vorkommt.

Damit haben wir zu allen vollregulären η des konstruktiven Algorithmus die v-Normalform $f_1(\eta)$ definiert. Natürlich ist es gleichgültig, wie die in $f_1(\eta)$ auftretenden Variablen x und v numeriert bzw. voneinander unterschieden werden. — Ist η n-zeilig, so ist $f_1(\eta)$ höchstens n-zeilig. — $f_\vartheta(\eta)$ erhalten wir nun aus $f_1(\eta)$ einfach dadurch, daß wir 1 durch ϑ ersetzen. Endlich definieren wir

$$f_\vartheta(1) = 1. \tag{6}$$

Beispiel. $\eta = \Big(1\Big(\big(V I I'^{\,1V^{1+1}(1+1)}\big) I I'^{1+1}\Big) I^{1V}\Big) V^{1V I} + 1V I I',$

$$f_\vartheta(\eta) = \Big(\vartheta\Big(\big(V I I'^{\,\vartheta V^{x_1} v_1}\big) I I'^{x_1}\Big) I^{\vartheta V}\Big) V^{\vartheta V I}{}_{v_2}\ ^{6}).$$

Allgemein gilt: In der Grundzeile von $f_\vartheta(\eta)$ kommt kein x und höchstens ein v vor; dieses v ist dann das (von links gesehen) letzte Zeichen in $f_\vartheta(\eta)$. Ferner erscheint in keinem $f_\vartheta(\eta)$ eine Kombination $x\,v$ oder ϑv.

Wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, schreiben wir statt f_ϑ einfach f.

Die v-Normalformen $f_\vartheta(\eta)$ können wir insbesondere bilden für $\vartheta = 1$ und den durch $\alpha V = \alpha\,\omega$ erklärten Operator V. Dann ist der freie Algorithmus durch denselben Grundoperator und dieselbe Ausgangszahl bestimmt wie der konstruktive, so daß $f_1(\eta)$ die als Wohlordnungstypus aufgefaßte Zahl η selbst darstellen kann. Ist nun η eine Zahlenfigur der Form (5), so bestehen nach I, § 3 für die Exponenten erster Stufe $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ von χ_1 gewisse Ungleichungen, welche sich auf die Exponenten erster Stufe $f_1(\varepsilon_1), \ldots, f_1(\varepsilon_q)$ von $f_1(\chi_1)$ übertragen.

---

[6]) Das Zeichen v fügen wir der Zahlenfigur, auf die es sich bezieht, ohne deren vorherige Einschließung in ( ) an. — Auf Grund der Festsetzung (6) könnten wir auch Exponenten 1 in den η sowie $f_\vartheta(\eta)$ zulassen.

Beispiel. $\chi_1 = \left((1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1})(VI^{\alpha_2})^{\beta_2}\right)V^{\gamma} = \varphi V^{\gamma}$; dabei gilt

$$1VII' > \alpha_1 > \alpha_2, \quad \beta_1 < 1VI^{\alpha_1+1}, \quad \beta_2 < \left(1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)VI^{\alpha_2+1}, \quad \gamma < \varphi VI.$$

Also wird, wenn wir f statt f_1 schreiben:

$$f(\chi_1) = \left(f(\varphi)\right)V^{f(\gamma)} = \left((1(VI^{f(\alpha_1)})^{f(\beta_1)})(VI^{f(\alpha_2)})^{f(\beta_2)}\right)V^{f(\gamma)},$$

wobei

$$1VII' > f(\alpha_1) > f(\alpha_2), \qquad f(\beta_1) < 1VI^{f(\alpha_1)+1},$$

$$f(\beta_2) < \left(1(VI^{f(\alpha_1)})^{f(\beta_1)}\right)VI^{f(\alpha_2)+1}, \qquad f(\gamma) < \left(f(\varphi)\right)VI \quad \text{ist.}$$

Wenn φVI nicht vollregulär ist, also vollständige Hilfsfigur, nämlich im Fall $\alpha_2 = 1$, ist $\left(f(\varphi)\right)VI$ kein $f(\eta)$; die oberen Schranken für $f(\beta_1)$ und $f(\beta_2)$ sind es ebenfalls nicht, da sie ein $+$-Zeichen enthalten.

Für die Exponenten erster Stufe jedes mehrzeiligen $f_1(\varepsilon_i)$ gibt es wieder die entsprechenden Ungleichungen usw. Das Gesamtsystem dieser Ungleichungen für die Exponenten von $f_1(\chi_1)$ oder, was dasselbe ist, von $f_1(\eta)$, übernehmen wir nun — zunächst rein schematisch — für die $f_\vartheta(\eta)$ im allgemeinen Fall (wo im freien Algorithmus ϑ eine Zahl aus einem beliebigen Bereich $[\alpha^{(0)}, P)$ und V einen beliebigen Operator erster Stufe darin bedeutet), indem wir die Kernzeichen 1 überall durch ϑ ersetzen[7]).

Unter einer v-Normalform des freien Algorithmus der Operatoren $V, I, I', I'', \ldots$ mit der Ausgangszahl ϑ verstehen wir daher von jetzt ab ein Schema $f_\vartheta(\eta)$ oder kürzer $f(\eta)$ zusammen mit den vorstehend beschriebenen Ungleichungen für seine Exponenten.

Zu einer bestimmten v-Normalform gehören im allgemeinen unendlich viele vollreguläre Zahlenfiguren η des konstruktiven Algorithmus, denen sie zugeordnet ist. So gilt im Sinn der figürlichen Einerleiheit $f\left(1V(1+1)\right) = f\left(1V(1+1+1)\right) = \cdots = \vartheta Vv$. Wenn man will, kann man diesem Umstand abhelfen, indem man stets das kleinstmögliche η wählt, was für jede bestimmte v-Normalform sicherlich ein konstruktiv lösbares Problem ist. Für ϑVv z.B. ist $\eta = 1V+1$ das kleinste η mit $f(\eta) = \vartheta Vv$. — Ebenso können mehrere, im allgemeinen unendlich viele Zahlen aus $M(\vartheta)$ durch dieselbe v-Normalform dargestellt werden (§ 5). Gegebenenfalls müssen wir gleiche v-Normalformen, welche verschiedene Zahlen darstellen sollen, durch zusätzliche Kennzeichnung ihrer Variablen x und v unterscheiden.

§ 5. Darstellung der Zahlen aus $M(\vartheta)$ durch Normalformen.

1. In Ziffer 1 bis 4 dieses Paragraphen wollen wir den folgenden Satz beweisen.

Satz 2. *Jede Zahl α aus $M(\vartheta)$ läßt sich eindeutig in einer v-Normalform $f_\vartheta(\eta)$ darstellen; insbesondere ist η eine V-, I-, …, $I^{(n)}$-Zahl, wenn α aus $[\vartheta V, \vartheta VI), [\vartheta VI, \vartheta VII'), \ldots, [\vartheta VI \ldots I^{(n)}, \vartheta VI \ldots I^{(n+1)})$ entnommen ist. — Unter der Voraussetzung, daß zwischen α und αV für $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$ stets unendlich viele*

[7]) Mit „Kernzeichen" ist die sinngemäße Verallgemeinerung von „Kernvariable" (vgl. 2) gemeint.

Zahlen liegen[8]*), stellt umgekehrt $f_\vartheta(\eta)$ für jedes vollreguläre η Zahlen aus $M(\vartheta)$ dar, insbesondere, wenn η eine V-, I-, ..., $I^{(n)}$-Zahl ist, Zahlen aus $[\vartheta V, \vartheta V I)$, $[\vartheta V I, \vartheta V I I')$, ..., $[\vartheta V I \dots I^{(n)}, \vartheta V I \dots I^{(n+1)})$.*

Vorstehenden Satz bestätigen wir zunächst für die Zahlen $<\vartheta V$ und die Zahlen aus $[\vartheta V, \vartheta V I)$. Die Darstellung eines $\alpha<\vartheta V$ $(\alpha>0)$ ist 1 oder x. — Sei nun $\alpha\in[\vartheta V, \vartheta V I)$. Dann gibt es nach Satz 1 ein $\alpha_1<\vartheta V I$ mit $\vartheta V^{\alpha_1}\leq\alpha<\vartheta V^{\alpha_1+1}$, wobei $\alpha_1<\alpha$. Also ist $\alpha=\vartheta V^{\alpha_1}$ oder $\alpha=\vartheta V^{\alpha_1}v$. Nun kann $\alpha_1=1$ oder $=x$ oder $\geq\vartheta V$ sein. Im letzteren Fall finden wir $\alpha_1=\vartheta V^{\alpha_2}$ oder $\alpha_1=\vartheta V^{\alpha_2}v$ mit $\alpha_2<\alpha_1$. So können wir fortfahren, aber nach endlich vielen Schritten muß die Reihe $\alpha_1>\alpha_2>\cdots$ mit einem $\alpha_n=x$ oder $\alpha_n=1$ abbrechen. Indem wir die nacheinander auftretenden v noch mit Indizes versehen, erhalten wir die folgende $(n+1)$-zeilige Figur als eindeutige formale Darstellung einer Zahl aus $[\vartheta V, \vartheta V I)$:

$$\alpha=\vartheta V^{\vartheta V^{\cdots^{\vartheta V^{x}v_n}\cdots v_2}v_1}. \tag{7}$$

Hierin kann x fehlen (d.h. wenn $\alpha_n=1$, wie im Fall $\vartheta=1$, $\vartheta V=2$; α ist dann n-zeilig) oder es können (eventuell zugleich mit x) einige oder alle v_i fehlen (wie prinzipiell im Fall, wo $\xi V=\xi+1$ für $\xi\in[\alpha^{(0)}, P)$).

Aus I, § 3, **1** entnimmt man nun ohne weiteres, daß das Schema (7) immer eine v-Normalform ist und daß, unter η eine vollreguläre V-Zahl des konstruktiven Algorithmus verstanden, $f_\vartheta(\eta)$ immer die Form (7) hat sowie eine Zahl aus $[\vartheta V, \vartheta V I)$ darstellt, wenn $\vartheta V>2$ und $(\xi, \xi V)$ niemals leer ist.

2. Jetzt betrachten wir ein $\alpha\in[\vartheta V I, \vartheta V I I')$. Nach Satz 1 gibt es ein α_1 mit

$$\vartheta V I^{\alpha_1}\leq\alpha<\vartheta V I^{\alpha_1+1}, \qquad 1\leq\alpha_1<\alpha. \tag{8_1}$$

Wegen $\vartheta V I^{\alpha_1+1}=\vartheta(V I^{\alpha_1})I$ gibt es wieder nach Satz 1 ein β_1, so daß

$$\vartheta(V I^{\alpha_1})^{\beta_1}\leq\alpha<\vartheta(V I^{\alpha_1})^{\beta_1+1}, \qquad 1\leq\beta_1<\vartheta V I^{\alpha_1+1} \tag{8_2}$$

gilt. Nun ist $\vartheta(V I^{\alpha_1})^{\beta_1+1}=\big(\vartheta(V I^{\alpha_1})^{\beta_1}\big)V I^{\alpha_1}$; also existiert ein α_2, so daß die Ungleichungen

$$\big(\vartheta(V I^{\alpha_1})^{\beta_1}\big)V I^{\alpha_2}\leq\alpha<\big(\vartheta(V I^{\alpha_1})^{\beta_1}\big)V I^{\alpha_2+1}, \quad 1\leq\alpha_2<\alpha_1 \tag{8_3}$$

bestehen, wofern nicht $\alpha<\big(\vartheta(V I^{\alpha_1})^{\beta_1}\big)V I$ ist, welchen Fall wir einstweilen zurückstellen, da wir zuletzt doch auf sein allgemeines Analogon stoßen. Von (8_3) schließt man auf das Vorhandensein eines β_2 mit

$$\left\{\begin{array}{l}\big(\vartheta(V I^{\alpha_1})^{\beta_1}\big)(V I^{\alpha_2})^{\beta_2}\leq\alpha<\big(\vartheta(V I^{\alpha_1})^{\beta_1}\big)(V I^{\alpha_2})^{\beta_2+1}, \\ \text{wo} \\ \qquad 1\leq\beta_2<\big(\vartheta(V I^{\alpha_1})^{\beta_1}\big)V I^{\alpha_2+1}.\end{array}\right. \tag{8_4}$$

So können wir fortfahren, α einzuschachteln, wobei die oberen Schranken niemals zu-, wohl aber regelmäßig abnehmen, mindestens bei jedem Über-

[8]) Das heißt, daß durch $\alpha\, v$ immer unendlich viele Zahlen dargestellt werden.

gang von einer Relation (8_{2i-1}) zu einer Relation (8_{2i}) $(i=1, 2, \ldots)$. Der Prozeß muß daher nach endlich vielen Schritten damit abbrechen, daß wir entweder zu einer unteren Schranke gelangen, die gleich α ist oder zu einer solchen, welche nicht mehr durch einen Operator $(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}$ vergrößert werden kann, ohne daß die Zahl α übertroffen wird[9]). Im ganzen werden wir dann folgende Einschließung für α erreicht haben:

$$(9)\quad \begin{cases} \varphi \leq \alpha < \varphi VI, \quad \text{wo} \quad \varphi = \left(\ldots\left(\left(\vartheta\left(VI^{\alpha_1}\right)^{\beta_1}\right)\left(VI^{\alpha_2}\right)^{\beta_2}\right)\ldots\right)\left(VI^{\alpha_m}\right)^{\beta_m} \\ \text{mit } m \geq 1 \text{ und} \\ \quad \vartheta VII' > \alpha_1 > \cdots > \alpha_m \geq 1, \quad 1 \leq \beta_1 < \vartheta VI^{\alpha_1+1}, \ldots, \\ \qquad\qquad 1 \leq \beta_m < \left(\ldots\left(\vartheta\left(VI^{\alpha_1}\right)^{\beta_1}\right)\ldots\right) VI^{\alpha_m+1}. \end{cases}$$

Nach Satz 1 läßt sich die Einschließung (9) verfeinern zu

$$(10)\quad \chi = \varphi V^{\gamma} \leq \alpha < \varphi V^{\gamma+1}, \quad \text{wo} \quad 0 \leq \gamma < \varphi VI \quad (\varphi \text{ siehe (9)}).$$

Somit gelangen wir zu einer Darstellung

$$(11)\qquad \alpha = \varphi V^{\gamma} v \quad (\varphi \text{ siehe (9)};\ v \text{ kann fehlen}).$$

Das System der Exponenten $\alpha_i, \beta_i, \gamma$ ist eindeutig durch die Zahl $\chi = \varphi V^{\gamma}$ bestimmt und umgekehrt, wobei χ ihrerseits durch α festgelegt ist. Somit können wir das Exponentensystem als Funktion von α auffassen:

$$(12)\qquad g(\alpha) = \left((\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_m, \beta_m), \gamma\right).$$

Diejenigen unter den Exponenten „erster Stufe" in (12), welche $\geq \vartheta VI$ sind, haben wieder die Form (11), während die Exponenten $< \vartheta VI$ die in 1 geschilderte Form aufweisen. Dasselbe gilt für die Exponenten „zweiter Stufe", so weit sie vorhanden (d.h. >1) sind usw. Dieser Aufstieg zu Exponenten „höherer Stufe" muß aber nach endlich vielen Schritten ein Ende nehmen. Das folgt aus dem nachstehenden

Hilfssatz 1. (*Rekursionssatz.*) *Jeder Ordnungszahl* $\alpha \in [\xi, \eta)$, $\xi < \eta$, *sei ein endliches geordnetes System von Ordnungszahlen* $g(\alpha) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *zugeordnet, wobei* $\alpha_i < \alpha$ *ist für* $i = 1, \ldots, n$ *und* n *von* α *abhängen kann. Die* α_i *mögen die Exponenten erster Stufe von* α *heißen, die Exponenten erster Stufe derjenigen* α_i, *die* $\geq \xi$ *sind, die Exponenten zweiter Stufe von* α *usw. Dann gibt es eine natürliche Zahl* q, *so daß alle Exponenten* q. *Stufe* $< \xi$ *sind.*

Beweis. Sei $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ die gemäß $>$ geordnete Menge der verschiedenen Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. In die Menge

$$(13)\qquad \alpha > \beta_1 > \cdots > \beta_m$$

[9]) Dies wird hier außerdem durch den Regreß $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots$ bewirkt. Aber schon im nächsthöheren Fall der Zahlen $\alpha \in [\vartheta VII', \vartheta VII'I'')$ kann man sich ohne Weitläufigkeiten nur noch auf das regelmäßige Kleinerwerden der oberen Einschließungsschranken für α stützen.

fügen wir die verschiedenen Exponenten zweiter Stufe von α gemäß der Relation $>$ ein, so weit sie vorhanden sind und noch nicht in (13) vorkommen. Es entstehe die Menge

$$(13_1) \qquad \alpha > \beta_1 > \beta_1' > \beta_2' > \cdots > \beta_{m'}';$$

β_1' tritt höchstens als Exponent zweiter Stufe auf. Die Exponenten dritter Stufe sind also $<\beta_1'$ und ihre Einschiebung in (13_1) führt zu einer Menge

$$(13_2) \qquad \alpha > \beta_1 > \beta_1' > \beta_2'' > \beta_3'' > \cdots > \beta_{m''}'';$$

β_2'' kann höchstens als Exponent dritter Stufe vorkommen, so daß die Exponenten vierter Stufe sämtlich $<\beta_2''$ sind usw. Wir erhalten so eine Reihe abnehmender Zahlen $\beta_i^{(i)}$, die mit einem $\beta_p^{(p)}$ abbrechen muß; $\beta_i^{(i)}$ stellt höchstens einen Exponenten $(i+1)$. Stufe dar und alle Exponenten $(i+2)$. Stufe sind $<\beta_i^{(i)}$. Exponenten $(p+2)$. Stufe kann es nicht geben, da sonst noch ein $\beta_{p+1}^{(p+1)}$ aufzuschreiben wäre. Also sind alle Exponenten $(p+1)$. Stufe $<\xi$.

Um den Hilfssatz auf unser Problem anzuwenden, setzen wir $\xi = \vartheta VI$, $\eta = \vartheta VII'$ und wählen $g(\alpha)$ als die Funktion (12). Dann ergibt sich, daß von einer gewissen Stufe ab alle Exponenten in dem für α gewonnenen Schema unterhalb ϑVI liegen, so daß wir sie nach **1** durch ihre v-Normalformen ersetzen können. Somit erscheint α in der Tat eindeutig als endliche Figur aus den Zeichen $\vartheta, V, I, (\,)$ und gewissen Variablen x_i, v_j dargestellt, wenn wir die Exponenten **1** weglassen.

3. Die Analogie der in **1** und **2** gewonnenen Formeln mit den in **I**, § 3, **1**, **2** hergeleiteten liegt auf der Hand. Sie wird verständlich, wenn wir bemerken, daß wir auch in der konstruktiven Analyse der Form der vollregulären Zahlenfiguren, wie sie in **I**, § 3 durchgeführt bzw. angedeutet wurde, die Variablen x und v hätten verwenden können. Denn es ist einerlei, ob man für die Zahlen zwischen 1 und $1V$, d.h. die Zahlen $1+1+\cdots+1$, die Variablen n oder x benützt, und ebenso kann man, unter χ eine Hauptzahl verstanden, für die vollregulären Zahlen zwischen χ und χV das Symbol χv als „Variable" einführen. Dann aber gelangen wir durch die konstruktive Analyse „in erster Näherung" zu schematischen Darstellungen von derselben Form wie in **1** und **2**, wenn noch ϑ durch 1 ersetzt wird, und wir können nun von der konstruktiven „v-Darstellung" aus zur additiven Konstruktion und damit zu den Darstellungen **I**, § 3, (20), (21) nebst den zugehörigen Betrachtungen fortschreiten. Übrigens ist die konstruktive v-Darstellung einer Zahlenfigur η nichts anderes als die ihr zugeordnete Normalform $f_1(\eta)$.

Bleiben wir indessen bei der v-Darstellung stehen, so lassen sich für sie auch im konstruktiven Algorithmus Kriterien für die Größenvergleichung zweier Zahlen entwickeln, die vollkommen analog im freien Algorithmus gelten. Es genügen folgende Andeutungen: Sind $\alpha = \chi v_1$ und $\alpha' = \chi' v_1'$ zwei Zahlen der Form (7) oder (11), so gilt $\alpha < \alpha'$ entweder wenn $\chi < \chi'$ oder wenn $\chi = \chi'$ und $v_1 < v_1'$ ist (vgl. die Festsetzungen in § 4, **3** hinsichtlich der Variablen v). Sind ferner χ und χ' zwei Zahlen der Form (10) [oder **I**, § 3, (23)], so gelten für

$\chi<\chi'$ auch im freien Algorithmus die in I, § 3, 2 angegebenen Kriterien. Aus diesen läßt sich dann wieder ein rekursives Verfahren zur Vergleichung zweier in v-Darstellung gegebener Zahlen α, α' aus $[\vartheta V I, \vartheta V II')$ des freien oder des konstruktiven Algorithmus ($\vartheta = 1$) entwickeln. — Die Vergleichung zweier Zahlen α, α' aus $[\vartheta V, \vartheta V II')$ führt im allgemeinen auf gewisse Relationen zwischen den Variablen x, v von α und x', v' von α', die für je zwei betroffene $x_i, x'_{i'}$ bzw. $v_j, v'_{j'}$ eine der Formen haben:

$$x_i = x'_{i'}; \quad x_i \leq x'_{i'}; \quad x_i < x'_{i'} \quad \text{bzw.} \quad v_j = v'_{j'}; \quad v_j \leq v'_{j'}; \quad v_j < v'_{j'}.$$

Es kann aber auch vorkommen, daß gar keine Bindungen zwischen den x, v und den x', v' resultieren.

Beispiele. 1. $\alpha = \vartheta V^x v$, $\alpha' = \vartheta V^{x'} v'$; $\alpha < \alpha'$ ist gleichwertig mit $x < x'$ oder mit $x = x'$, $v < v'$. 2. $\alpha = \vartheta V I^{\vartheta V^x v_1} v_2$, $\alpha' = \vartheta V I^{\vartheta V^{x'} v'}$; $\alpha < \alpha'$ bedeutet $\vartheta V^x v_1 < \vartheta V^{x'} v'$, was auf 1. führt. 3. $\alpha = \vartheta V I^x$, $\alpha' = \vartheta V I^{x'} v'$; $\alpha < \alpha'$ ist gleichwertig mit $x \leq x'$. 4. $\alpha = \vartheta V^{\vartheta V v}$, $\alpha' = \vartheta V^{\vartheta V v'_1} v'_2$; $\alpha < \alpha'$ ist äquivalent mit $v \leq v'_1$. 5. $\alpha = \vartheta\left(V I^{\vartheta V^{x_1}}\right)^{x_2} v$, $\alpha' = \vartheta V I^{\vartheta V^{\vartheta V}} v'$; es ist immer $\alpha < \alpha'$.

Dieses Verfahren hat man nun auch anzuwenden bei den „internen" Vergleichungen für die Exponenten aller Stufen einer v-Darstellung, die durch die Ungleichungen im Schema (9) [oder I, § 3, (22)] notwendig werden. Die Formen, in denen die oberen Schranken für die Exponenten erscheinen, sind zwar meistens keine v-Darstellungen, aber sie können trotzdem ohne weiteres mit den v-Darstellungen der Exponenten verglichen werden. Um das deutlich zu machen, genügt die Betrachtung des Falles $\alpha = \left(\left(\vartheta\left(V I^{\alpha_1}\right)^{\beta_1}\right)\left(V I^{\alpha_2}\right)^{\beta_2}\right) V^{\gamma}$, wo die Exponenten $\alpha_1, \ldots, \gamma$ in v-Darstellung zu denken sind. Zu den Vergleichungen $\vartheta V II' > \alpha_1 > \alpha_2$ ist nichts zu sagen. Die Vergleichung $\beta_1 < \vartheta V I^{\alpha_1+1}$ ist trivial, wenn β_1 kein I enthält. Sei daher $\vartheta V I^{\delta}$ der größte Anfang von β_1, der diese Form hat. Dann muß $\delta < \alpha_1 + 1$, also entweder $\delta = \alpha_1$ oder $\delta < \alpha_1$ sein. — Für β_2 gilt: $\beta_2 < \left(\vartheta\left(V I^{\alpha_1}\right)^{\beta_1}\right) V I^{\alpha_2+1}$, $\alpha_2 + 1 \leq \alpha_1$. Sei $\left(\vartheta\left(V I^{\delta_1}\right)^{\varepsilon_1}\right) V I^{\delta_2}$ der größte Anfang von β_2 mit dieser Form. Dann ist entweder $\delta_1 < \alpha_1$ oder $\delta_1 = \alpha_1$, $\varepsilon_1 < \beta_1$ oder $\delta_1 = \alpha_1$, $\varepsilon_1 = \beta_1$, $\delta_2 < \alpha_2 + 1$, also $\delta_2 = \alpha_2$ oder $\delta_2 < \alpha_2$. — Endlich wird $\gamma < \left(\left(\vartheta\left(V I^{\alpha_1}\right)^{\beta_1}\right)\vartheta\left(V I^{\alpha_2}\right)^{\beta_2}\right) V I$, wobei $\alpha_2 \geq 1$. Ist etwa $\left(\vartheta\left(V I^{\sigma_1}\right)^{\tau_1}\right)\left(V I^{\sigma_2}\right)^{\tau_2}$ der größte Anfang von γ, der diese Form besitzt, so gilt entweder $\sigma_1 < \alpha_1$ oder $\sigma_1 = \alpha_1$, $\tau_1 < \beta_1$ oder $\sigma_1 = \alpha_1$, $\tau_1 = \beta_1$, $\sigma_2 < \alpha_2$ oder $\sigma_1 = \alpha_1, \ldots, \sigma_2 = \alpha_2$, $\tau_2 < \beta_2$ oder $\sigma_1 = \alpha_1, \ldots, \tau_2 = \beta_2$, wobei im letzten Fall in γ nach dem obigen Anfang kein I mehr kommt. — Immer sind also v-Darstellungen zu vergleichen.

Daher führt die Gesamtheit der internen Vergleichungen im allgemeinen wieder zu Relationen zwischen den x, v, die für je zwei betroffene x bzw. v dann eine der Formen

$$x_i = x_j; \quad x_i \leq x_j; \quad x_i < x_j \quad \text{bzw.} \quad v_i = v_j; \quad v_i \leq v_j; \quad v_i < v_j$$

haben und die formal gesehen von ϑ und V ganz unabhängig sind. — Es kann natürlich vorkommen, daß gar keine Relationen notwendig werden, wie z.B. in $\alpha = \left(\vartheta\left(VI^{\vartheta V}\right)^{\vartheta V I^{x_1}}\right) VI^{x_2}$.

Wenn wir von einer gegebenen Zahl $\alpha \in [\vartheta VI, \vartheta VII')$ des freien oder des konstruktiven Algorithmus ($\vartheta = 1$) ausgehen, werden die Relationen zwischen den x, v — falls es solche gibt — in der v-Darstellung von α miteinander verträglich sein (was sich in allen Fällen in endlich vielen Schritten feststellen läßt). Sind wir von einem $\alpha \in [\vartheta VI, \vartheta VII')$ des freien Algorithmus ausgegangen, dann lassen sich diese verträglichen Relationen auf unendlich viele Weisen befriedigen, indem wir für die x und v geeignete natürliche Zahlen > 1 wählen. Ersetzen wir die x und v in der v-Darstellung von α durch diese natürlichen Zahlen — was ohne weiteres möglich ist, da v die formale Stellung eines Koeffizienten hat; vgl. Fußnote [6]) —, so erhalten wir eine vollreguläre Zahlenfigur η des konstruktiven Algorithmus von spezieller Form, wenn wir noch 1 für ϑ schreiben, und $\alpha = f_\vartheta(\eta)$ ist die v-Darstellung von α. Damit ist der erste Teil von Satz 2 für die $\alpha \in [\vartheta VI, \vartheta VII')$ bewiesen.

Nehmen wir die Voraussetzung des zweiten Teils von Satz 2 als erfüllt an, so lassen sich die Relationen zwischen den x, v, die sich bei der konstruktiven Analyse der v-Darstellung $f_1(\eta)$ einer beliebigen vollregulären I-Zahl η ergeben, wegen ihrer Verträglichkeit auch vom Standpunkt des freien Algorithmus aus erfüllen, da wir den Variablen x und v wieder beliebig viele verschiedene „Werte" geben können (x bzw. βv bei festem β variiert ja in der unendlichen Menge $(1, \vartheta V)$ bzw. $(\beta, \beta V)$). Also gibt es Zahlen aus $[\vartheta VI, \vartheta VII')$, für die $f_\vartheta(\eta)$ die v-Darstellung ist. Damit ist die zweite Hälfte von Satz 2 auch für die $\alpha \in [\vartheta VI, \vartheta VII')$ und die I-Zahlen bewiesen.

4. Ganz analog wäre der Satz 2 hinsichtlich der Zahlen aus $[\vartheta VII', \vartheta VII'I'')$ und der vollregulären I'-Zahlen zu beweisen usw., insofern die Methoden dieselben bleiben und nur die Formeln komplizierter werden. Das ergibt sich aus der fortdauernden Gleichläufigkeit der Analyse der v-Darstellung im konstruktiven und im freien Algorithmus, welche auf der „Äquivalenz" der folgenden Prinzipien beruht:

Prinzip des „größten Anfangs" von einer gewissen Form	$\approx$	Charakteristische Eigenschaft der Normalfunktionen
„Horizontale "Endlichkeit einer Zahlenfigur des konstruktiven Algorithmus	$\approx$	Systematische Verkleinerung der oberen Einschließungsschranken
„Vertikale" Endlichkeit usw.	$\approx$	Rekursionssatz.

Äquivalente Prinzipien bewirken dabei immer dasselbe formale Ergebnis, wie wir an Hand der Zahlen $\in [\vartheta VI, \vartheta VII')$ und der I-Zahlen nochmals kurz erläutern. In **I**, § 3, **2** haben wir aus dem Umstand, daß wir eine I-Zahl α, d.h. eine Zahl aus $[1VI, \alpha VII')$ betrachten wollten, geschlossen, daß α einen größten Anfang der Form $1VI^{\alpha_1}$, $\alpha_1 < 1VII'$, haben muß, woraus natürlich

$1VI^{\alpha_1} \leq \alpha < 1VI^{\alpha_1+1}$ (mit $\alpha_1 < \alpha$) folgt, was der Relation (8_1) entspricht usw. Das Prinzip des größten Anfangs führt also im konstruktiven Algorithmus zu derselben Einschachtelung von α wie im freien Algorithmus die Benützung der charakteristischen Eigenschaft der Normalfunktionen ϑVI^{ξ}, $\vartheta(VI^{\alpha_1})^{\xi}$ usw. Unter der charakteristischen Eigenschaft einer Normalfunktion $f(\xi)$ verstehen wir dabei den Umstand, daß es zu einem β mit $f(\xi_1) \leq \beta < f(\xi_2)$ ein ξ gibt, so daß $f(\xi) \leq \beta < f(\xi+1)$ gilt. — Das Abbrechen des Einschachtelungsprozesses ergab sich konstruktiv aus der Endlichkeit der Zahlenfiguren von „links nach rechts", im freien Algorithmus aus dem Abnehmen der oberen Einschließungsschranken. — Daß man mit der Untersuchung der Exponenten 2., 3., ... Stufe einmal zu Ende kommt, folgt im konstruktiven Algorithmus aus der Endlichkeit der Figuren von „unten nach oben", im freien Algorithmus aus dem Rekursionssatz.

Diese Entsprechungen bleiben natürlich auch gültig hinsichtlich der mittels höherstufiger Operatoren $I', I'', \ldots$ gebildeten Zahlen.

5. Die „grobe" v-Normalform für eine Zahl aus $M(\vartheta)$ läßt sich durch eine feinere Normalform ersetzen, wenn man genauere Angaben über den Grundoperator V hat. Wir betrachten insbesondere den Fall, daß V erklärt ist durch

$$\alpha V = \alpha\varrho \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P),\ 1 < \varrho < P. \tag{14}$$

Dann können wir $\vartheta = 1$ setzen und es wird $\varrho = 1V$. Mit y bzw. z bezeichnen wir eine Zahl aus $[1, 1V)$ bzw. $[0, 1V)$.

Für ein $\alpha \geq \varrho$ haben wir die „Polynomdarstellung"

$$\begin{cases} \alpha = \varrho^{\varepsilon_1}\pi_1 + \cdots + \varrho^{\varepsilon_r}\pi_r + \tilde{\pi}, \\ \text{wo} \\ \varepsilon_1 > \cdots > \varepsilon_r \geq 1, \quad 1 \leq \pi_i < \varrho\ (i = 1, \ldots, r), \quad 0 \leq \tilde{\pi} < \varrho. \end{cases} \tag{15}$$

Dafür können wir auch schreiben

$$\alpha = 1V^{1+\varepsilon_1}y_1 + \cdots + 1V^{1+\varepsilon_r}y_r + z. \tag{16}$$

Sei $\alpha \in M(1)$. Bedeutet χ_1 die v-Normalform von $1V^{1+\varepsilon_1}$, so ist $\alpha = \chi_1 v$ oder (im Fall $\alpha = 1V^{1+\varepsilon_1}$) $\alpha = \chi_1$ die v-Normalform von α. Denn ist $\alpha = \chi' v'$ die tatsächliche v-Normalform von α, so gilt $\chi' = 1V^{\mu}$ (vgl. § 4, **2**, Bemerkungen bezüglich der Iteratoren) und folglich $1V^{\mu} \leq \alpha < 1V^{\mu+1}$, d.h. es muß $\mu = 1 + \varepsilon_1$ sein.

Bezeichnen wir allgemein mit χ_i die v-Normalform von $1V^{1+\varepsilon_i}$ $(i = 1, \ldots, r)$ in (16), so erhalten wir für α die schematische Darstellung

$$\alpha = \chi_1 y_1 + \cdots + \chi_r y_r + z \quad (\chi_1 > \cdots > \chi_r). \tag{17}$$

Die Variablen x, v in (17) rechts sind dabei alle verschieden zu wählen. Die in den v-Formen χ_i auftretenden Exponenten erster Stufe, die $\geq 1V$ sind, lassen sich ebenfalls in der Form (17) darstellen (wobei wir die neu auftretenden Variablen y und z untereinander und von den früheren durch Indizes unterscheiden) usf. Nach dem Rekursionssatz müssen wir bei einer gewissen Stufe

damit enden, daß überall Exponenten $< 1V$ stehen, welche die v-Normalform 1 oder x haben. In der so für α erreichten schematischen Darstellung — aus welcher die v verschwunden sind — lassen wir die Exponenten 1 weg. Ferner ersetzen wir die y, welche einen Koeffizienten >1 bedeuten, durch ein x und lassen die anderen y fort; ebenso ersetzen wir die z, welche einen Summanden >0 vertreten, durch ein y und lassen die übrigen z weg. Bei alledem richten wir es wieder so ein, daß keine zwei x oder y mit demselben Index auftreten. Die hierdurch zuletzt gewonnene Darstellung für α nennen wir seine *additive Normalform*; sie ist eine Figur aus den Zeichen 1, ( ), +, V, I, I', I'', ... und gewissen Variablen $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$.

Im konstruktiven Algorithmus erhält man die additiven Normalformen aus den vollregulären Zahlen η, indem man in diesen die als Exponenten oder Koeffizienten stehenden natürlichen Zahlen durch Variable x und die als Summanden stehenden natürlichen Zahlen durch Variable y ersetzt. Die so aus η entstehende additive Normalform für η bezeichnen wir mit $\mathfrak{f}(\eta)$. An Stelle von (6) müssen wir jetzt definieren:

$$(18)\quad \begin{cases} \mathfrak{f}(1) = 1, & \text{wenn 1 eine individuelle Zahl oder ein Exponent oder ein Koeffizient ist;} \\ \mathfrak{f}(1) = y & \text{in der Verbindung } \mathfrak{f}(\lambda) + \mathfrak{f}(1) = \mathfrak{f}(\lambda + 1), \text{ wo } \lambda \text{ eine Limeszahl ist.} \end{cases}$$

Bei gegebenem η bestehen zwischen den in $\mathfrak{f}(\eta)$ auftretenden x bzw. y gewisse Relationen der einfachen in 3 angegebenen Form, welche aus den Ungleichungen für die Exponenten von η und die Summandenteile χ_i des Schemas (17) herrühren und den durch sie induzierten Vergleichungen entstammen.

Da sich die Betrachtungen im konstruktiven und freien Algorithmus wieder völlig gleichläufig vollziehen — die Größenvergleichung zweier Zahlen der Form (17) geschieht beidemale nach denselben Regeln; vgl. I, § 3, 1 —, so ist klar, daß die additive Normalform eines α des freien Algorithmus ebenfalls ein $\mathfrak{f}(\eta)$ ist; denn die sich einstellenden Relationen zwischen den x bzw. y in der additiven Normalform von α können wegen ihrer Verträglichkeit auch durch geeignete natürliche Zahlen befriedigt werden. Wenn außerdem ϱ in (14) transfinit ist, haben wir für die x, y beliebig viele Werte zur Verfügung, d.h. wir können jedes $\mathfrak{f}(\eta)$ zugleich als Darstellung von Zahlen aus $M(1)$ in dem durch (14) definierten freien Algorithmus mit dem Grundoperator V und der Ausgangszahl $\vartheta = 1$ ansehen. — Damit ist bewiesen:

Satz 3. *Im freien Algorithmus mit der Ausgangszahl* 1 *und dem durch* (14) *definierten Grundoperator* V *läßt sich jede Zahl* $\alpha \in M(1)$ *eindeutig durch eine additive Normalform* $\mathfrak{f}(\eta)$ *darstellen. — Ist die Zahl* ϱ *in* (14) *transfinit, so stellt umgekehrt* $\mathfrak{f}(\eta)$ *für jedes vollreguläre* η *Zahlen aus* $M(1)$ *dar.*

η ist im allgemeinen durch $\alpha = \mathfrak{f}(\eta)$ nicht eindeutig bestimmt und umgekehrt können unendlich viele α dieselbe additive Normalform $\mathfrak{f}(\eta)$ haben. — Setzen wir $\varrho = \omega$, so besagt Satz 3, daß durch die vollregulären Zahlen des

konstruktiven Algorithmus alle Ordnungszahlen der Menge $M(1)$ — diese im „naiven" Sinne aufgefaßt — eineindeutig wiedergegeben werden.

Für $\varrho = 2$ entfallen in den additiven Normalformen für die $\alpha \in M(1)$ die Variablen x und die y können durch 1 ersetzt werden, da y nur in der Menge $\{1\}$ variiert. Also ist in diesem Falle η durch $\alpha = \mathfrak{f}(\eta)$ wohlbestimmt, und es treten alle η ins Spiel, welche keine Verbindung $1+1$ als Teilfigur enthalten. Näheres über den durch $\varrho = 2$ induzierten freien und konstruktiven Algorithmus s. **III**, § 7, **5**.

§ 6. Die Abgeschlossenheit der Bereiche $M(\vartheta)$ gegenüber dem freien Algorithmus der Operatoren $V, I, I', I'', \ldots$.

1. Wir betrachten jetzt einige Eigenschaften der Zahlenfiguren $\mathfrak{F}$ des freien Algorithmus (vgl. § 4, **2**). Mit $\mathfrak{F}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ bezeichnen wir solche $\mathfrak{F}$, in welchen die Operatoren $V, I, I', \ldots$ bis höchstens zur n. Stufe einschließlich auftreten.

Einen Operator V von erster Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$ nennen wir *monoton*, wenn gilt

$$\alpha V \leq \beta V \quad \text{für} \quad \alpha^{(0)} \leq \alpha < \beta < P.$$

Sind V und W zwei Operatoren erster Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$, so wollen wir sagen, W sei *stärker* als V oder V *schwächer* als W, in Zeichen $W > V$ oder $V < W$, wenn gilt:

$$\alpha V < \alpha W \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P).$$

$V \leq W$ soll bedeuten, daß immer $\alpha V \leq \alpha W$ ist. $V \leq W$ bedingt nicht die Alternative $V < W$ oder $V = W$, denn es kann zwei Zahlen $\alpha \neq \beta$ geben mit $\alpha V = \alpha W$, $\beta V < \beta W$ (Beispiel: $\alpha V = 2\alpha^2$, $\alpha W = \omega\alpha^2$ für $\alpha \in [1, \omega_1)$). Aus $V \leq W$ und $W \leq V$ zusammen folgt jedoch $V = W$. — Wegen $\alpha V \geq \alpha + 1$ für jedes V können wir daher symbolisch $V \geq +1$ schreiben. — $V \geq \cdot\sigma$ (σ feste Zahl aus $[2, P)$) soll ausdrücken, daß $\alpha V \geq \alpha \cdot \sigma$ für $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$ ist.

Analog kann man eine $<$-Relation zwischen Operatoren zweiter Stufe erklären, ebenso zwischen Operatoren dritter Stufe usf. Für zwei Operatoren zweiter Stufe $J, \bar{J}$ z. B. soll $J < \bar{J}$ bedeuten, daß $\alpha V J < \alpha V \bar{J}$ ist für alle α und V des Bereichs $[\alpha^{(0)}, P)$; $J \leq \bar{J}$ bedeutet entsprechend $\alpha V J \leq \alpha V \bar{J}$. Aus $J < \bar{J}$ folgt $VJ < V\bar{J}$ für alle V; bei $J \leq \bar{J}$ aber hat man für ein bestimmtes V noch drei Möglichkeiten: $VJ \leq V\bar{J}$, $VJ < V\bar{J}$, $VJ = V\bar{J}$. — Aus $J \leq \bar{J}$ und $\bar{J} \leq J$ zugleich folgt wieder $J = \bar{J}$.

2. Zunächst zeigen wir:

Hilfssatz 2. *αVI ist für $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$ immer eine Potenz $\omega^\nu \geq \omega$.*

Beweis. Offenbar hat man

(19) (a) $\alpha V^\beta \geq \alpha + \beta$ (b) $\alpha VI \geq \alpha\omega$,

somit

(20) $$\alpha + \alpha VI = \alpha VI.$$

Ferner sieht man leicht ein, daß

$$(\alpha V^{\beta})VI=\alpha VI \quad \text{für} \quad \beta+\alpha VI=\alpha VI. \tag{21}$$

Denn nach Voraussetzung ist $\alpha V^{\beta+\alpha VI}=\alpha V^{\alpha VI}=\alpha VI$ (Satz 1), somit αVI kritische Zahl der Normalfunktion $\alpha V^{\beta+\xi}$ von ξ. Wieder nach Satz 1 ist $(\alpha V^{\beta})VI$ die erste kritische Zahl der Normalfunktion $(\alpha V^{\beta})V^{\xi}=\alpha V^{\beta+\xi}$ von ξ, folglich $\alpha VI\geq(\alpha V^{\beta})VI$. Da andererseits, wie unmittelbar einleuchtet, $\alpha VI\leq(\alpha V^{\beta})VI$ ist, so folgt (21). — Die hier verwendete Schlußweise werden wir im folgenden öfters benützen unter dem Namen „Prinzip der kritischen Zahlen". — Ersetzt man in (20) α durch αV^{β}, so liefert (21):

$$\alpha V^{\beta}+\alpha VI=\alpha VI \quad \text{für} \quad \beta+\alpha VI=\alpha VI. \tag{21a}$$

Für $\beta=1$ erhalten wir aus (21a) durch Iteration die Beziehungen:

$$\alpha V+\alpha VI=\alpha VI, \quad \alpha V^{\alpha V}+\alpha VI=\alpha VI, \quad \alpha V^{\alpha V^{\alpha V}}+\alpha VI=\alpha VI,\ldots,$$

woraus sich nach (3_1) ergibt, daß $\beta+\alpha VI=\alpha VI$ für $\beta<\alpha VI$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen. Zugleich haben wir gefunden:

$$(\alpha V^{\beta})VI=\alpha VI \quad \text{für} \quad \beta<\alpha VI. \tag{22}$$

Unter Beachtung der Definition $V\geq\cdot\,\sigma$ in 1 ergibt sich induktiv:

$$\alpha V^{\beta}\geq\alpha\cdot\sigma^{\beta} \quad \text{für} \quad V\geq\cdot\,\sigma, \tag{23}$$

also wegen $\beta\leq\sigma^{\beta}$:

$$\alpha VI=\alpha V^{\alpha VI}\geq\alpha\sigma^{\alpha VI}\geq\sigma^{\alpha VI}\geq\alpha VI, \qquad \text{d.h.}$$

Hilfssatz 3. *Unter der Voraussetzung* $V\geq\cdot\,\sigma$, $2\leq\sigma<P$, *ist* $\alpha VI=\sigma^{\alpha VI}$. *Im Fall* $\alpha VI>\omega$ *ist dann* αVI *eine* ε*-Zahl, z.B. für* $\sigma\geq\omega$ *oder* $\alpha\geq\omega$.

Mit Rücksicht auf (19b) folgt hieraus:

Hilfssatz 4. $\alpha VI^{2}=\alpha(VI)I$ *ist stets eine* ε*-Zahl, daher auch* αVI^{ν} *für* $2\leq\nu<P$.

Wegen $\alpha V^{\beta}<\alpha VI$ für $\beta<\alpha VI$ folgt vermöge Hilfssatz 2

$$(\alpha V^{\beta})V^{\gamma}=\alpha V^{\beta+\gamma}<\alpha VI \quad \text{für} \quad \beta<\alpha VI,\ \gamma<\alpha VI; \tag{24}$$

ferner gilt, wenn αVI eine δ-Zahl ist, d.h. die Form $\omega^{\omega^{u}}\geq\omega^{\omega}$ hat:

$$\alpha(V^{\beta})^{\gamma}=\alpha V^{\beta\gamma}<\alpha VI \quad \text{für} \quad \beta<\alpha VI,\ \gamma<\alpha VI,\ \alpha VI \text{ eine } \delta\text{-Zahl}. \tag{25}$$

Nach Hilfssatz 3 ist die Bedingung hinsichtlich αVI in (25) z.B. für $V\geq\cdot\,\omega$ erfüllt.

Bei monotonem V hat man

$$\xi VI=\alpha VI \quad \text{für} \quad \xi\in[\alpha,\alpha VI),\ V \text{ monoton}. \tag{26}$$

Aus $\xi < \alpha V I$ folgt nämlich die Existenz eines (kleinsten) $\eta < \alpha V I$ mit $\xi < \alpha V^{\eta}$, so daß wegen der Monotonie von V mit Rücksicht auf (22) $\alpha V I \leq \xi V I \leq (\alpha V^{\eta}) V I = \alpha V I$ wird. — Aus (24) (angewandt auf ξ statt α) und (26) folgt

(27) $\quad (\xi V^{\beta}) V^{\gamma} < \alpha V I \quad$ für $\quad \xi \in [\alpha^{(0)}, \alpha V I)$, V monoton; β, γ wie (24)

[denn im Fall $\xi < \alpha$ ist die linke Seite in (27) nicht größer als im Fall $\xi \geq \alpha$]. Nimmt man überdies an, daß $\xi V I$ eine δ-Zahl ist für alle $\xi \in [\alpha, \alpha V I)$, so gilt (25) für diese ξ an Stelle von α und vermöge (26) kommt

(28) $$\begin{cases} \xi (V^{\beta})^{\gamma} < \alpha V I \quad \text{für} \quad \xi \in [\alpha^{(0)}, \alpha V I), \\ \xi V I \text{ eine } \delta\text{-Zahl für } \xi \in [\alpha, \alpha V I): \ \beta, \gamma \text{ wie (25)}. \end{cases}$$

Aus (24), (25) sowie (27) und (28) schließt man den Satz ($\mathfrak{F}(\vartheta)$ s. § 4, **2**):

Satz 4. *Ein $\mathfrak{F}^{(1)}(\vartheta)$ bzw. $\mathfrak{F}^{(1)}$, in welchem sämtliche Zahlenvariable Zahlen $< \vartheta V I$ bedeuten, repräsentiert immer Zahlen $< \vartheta V I$, wenn $\vartheta V I$ eine δ-Zahl ist bzw. alle $\xi V I$ mit $\xi \in [\vartheta, \vartheta V I)$ δ-Zahlen sind und V monoton ist. — Die Voraussetzung betreffend δ-Zahlen ist z. B. erfüllt im Fall $V \geq \cdot \omega$.*

Beweis. Zunächst ist klar, daß der Satz stimmt für diejenigen $\mathfrak{F}^{(1)}(\vartheta)$ bzw. $\mathfrak{F}^{(1)}$ der genannten Art, in denen das Zeichen V nur in der Grundzeile auftritt. Dann aber muß die Behauptung auch für Figuren richtig sein, in welchen wohl die zweite Zeile das Zeichen V enthält, nicht aber die dritte; denn in diesem Fall lassen sich die ein V enthaltenden Exponenten erster Stufe durch Variable ersetzen, welche Zahlen $< \vartheta V I$ bedeuten. Nun geht man zu Fig. , über, welche V in der dritten, aber nicht in der vierten Zeile aufweisen usf.

3. Satz 4 ist die Vorstufe zu folgenden Sätzen:

Satz 5. *Ein $\mathfrak{F}^{(n)}(\vartheta)$ und, wenn V monoton ist, auch ein $\mathfrak{F}^{(n)}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, deren Zahlenvariable stets Zahlen $< \vartheta V I \ldots I^{(n-1)}$ bedeuten, stellen selbst wieder Zahlen $< \vartheta V I \ldots I^{(n-1)}$ dar.*

Satz 6. *Ein $\mathfrak{F}(\vartheta)$ und bei monotonem V auch ein $\mathfrak{F}$, deren Zahlenvariable stets Zahlen aus $M(\vartheta)$ bedeuten, repräsentieren ebenfalls Zahlen aus $M(\vartheta)$.* Der Algorithmus führt also nicht aus dem Bereich $M(\vartheta)$ heraus.

Satz 6 ist offenbar eine Folge von Satz 5. Den Satz 5 beweisen wir explizit für $n = 2$; die Beweise für $n = 3, 4, \ldots$ verlaufen analog.

Zunächst hat man die durch Induktion nach γ zu bestätigende Ungleichung [vgl. den Beweis von (6) in **III**]

(29) $$\alpha (V I^{\beta})^{\gamma} \leq \alpha V (I^{\beta})^{\gamma} = \alpha V I^{\beta\gamma} \quad (\beta \geq 1),$$

aus der sich sukzessive die Ungleichungen ergeben:

(30_1) $$\alpha V^{\beta} \leq \alpha (V I)^{\beta} \leq \alpha V I^{\beta},$$

(30_2) $$\alpha (V^{\beta})\, I^{\gamma} \leq \alpha (V I^{\beta})\, I^{\gamma} = \alpha V I^{\beta+\gamma} \qquad (\beta \geq 1),$$

(30_3) $$\alpha \big((V^{\beta})\, I^{\gamma}\big)^{\delta} \leq \alpha (V I^{\beta+\gamma})^{\delta} \leq \alpha V I^{(\beta+\gamma)\,\delta} \quad (\beta \geq 1),$$

$$(30_4)\quad \begin{cases} (\alpha((V^\beta)I^\gamma)^\delta)\,((V^{\beta_1})I^{\gamma_1})^{\delta_1} \leq \alpha\,(((V^\mu)I^\mu)^\mu)^2 \leq \alpha V I^{\mu 2 \mu 2}, \\ \text{wobei} \qquad \mu = \max(\beta, \ldots, \delta_1), \qquad \beta \text{ und } \beta_1 \geq 1, \end{cases}$$

$$(30_5)\quad \alpha\,(((V^\beta)I^\gamma)^\delta)\,I^\varepsilon \leq \alpha\,(V I^{(\beta+\gamma)\delta})\,I^\varepsilon = \alpha V I^{(\beta+\gamma)\delta+\varepsilon}\ ^{10}) \qquad (\beta \text{ und } \delta \geq 1).$$

Da $\alpha VII' = \alpha V I^{\alpha VII'}$ nach Hilfssatz 4 eine ε-Zahl ist, so folgt aus $\alpha V I^\nu < \alpha VII'$ für $\nu < \alpha VII'$, daß die rechten und um so mehr die linken Ausdrücke in den Relationen (30) immer $< \alpha VII'$ bleiben, wenn die Exponenten $\beta, \ldots, \delta_1$ es tun.

Ist V monoton, so gilt

$$(31)\qquad \xi VII' = \alpha VII' \quad \text{für} \quad \xi \in [\alpha, \alpha VII'), \quad V \text{ monoton}.$$

Denn es gibt ein kleinstes $\eta < \alpha VII'$, so daß $\xi \leq \alpha V I^\eta$. Dann wird wegen der Monotonie von V:

$$\alpha VII' \leq \xi VII' \leq (\alpha V I^\eta) VII'$$
$$= \lim \left\{ (\alpha V I^\eta) VI,\ (\alpha V I^\eta) V I^{(\alpha V I^\eta) VI}, \ldots \right\} \leq \alpha VII',$$

da jedes Glied in $\{\}$ auf Grund der Bemerkung zu den Relationen (30) unterhalb $\alpha VII'$ bleibt.

Die Relationen (30) gelten auch, wenn man α durch ξ ersetzt, und die bei dieser Substitution entstehenden linken Ausdrücke in (30) bleiben für $\xi \in [\alpha, \alpha VII')$ vermöge (31) wiederum $< \alpha VII'$, wenn die Exponenten $\beta, \ldots, \delta_1$ es tun. Das trifft erst recht für $\xi < \alpha$ zu, also für alle $\xi \in [\alpha^{(0)}, \alpha VII')$.

Aus den vorstehenden Betrachtungen folgert man, daß ein $\mathfrak{F}^{(2)}(\vartheta)$ und, wenn V monoton, auch ein $\mathfrak{F}^{(2)}$ von der in Satz 5 vorausgesetzten Art, in welchen die Symbole V, I nur in der Grundzeile auftreten, stets Zahlen $< \vartheta VII'$ darstellen. Nun schließt man weiter wie beim Beweis von Satz 4.

Bemerkung. (30_1) läßt sich verschärfen zu

$$(32)\qquad \alpha V^\beta < \alpha V I^\beta \quad \text{für} \quad \beta < \alpha VII'.$$

Denn für $1 \leq \beta < \alpha VI$ wird $\alpha V^\beta < \alpha VI \leq \alpha V I^\beta$, für $\alpha VI \leq \beta < \alpha V I^{\alpha VI}$ kommt $\alpha V^\beta < \alpha V^{\alpha VI^{\alpha VI}} = \alpha V I^{\alpha VI} \leq \alpha V I^\beta$ usw.[11]). Nach (3_2) ergibt sich daraus die Behauptung.

4. Es gelten ferner die Sätze:

Satz 7. *Ein $\mathfrak{F}^{(n+1)}(\vartheta)$, in welchem das Zeichen $I^{(n-1)}$ genau einmal und zwar als letztes (im Sinn der Links-rechts-Struktur) auftritt und sämtliche Zahlenvariablen Zahlen $< \vartheta VI \ldots I^{(n-1)}$ bedeuten, hat immer den Wert $\vartheta VI \ldots I^{(n-1)}$ für $n = 2, 3, \ldots$ und, wenn ϑVI eine δ-Zahl ist, auch für $n = 1$.*

[10]) Die einleuchtenden Relationen (29) und (30) beruhen auf dem Umstand, daß I ein monotoner Iterator ist; vgl. III, § 7, **1**. Die Monotonie von V wird nicht vorausgesetzt.

[11]) Für $\nu \geq 2$ gilt $\alpha V I^\nu = \alpha (VI) I^{-1+\nu} \in \{\alpha (VI)^\mu\}_{1 \leq \mu < P}$; durch Induktion nach μ folgt, daß alle $\alpha (VI)^\mu$ kritische Zahlen von αV^ξ sind, also auch alle $\alpha V I^\nu$.

Diese Aussage gilt bei monotonem V unter denselben Voraussetzungen auch für ein $\mathfrak{F}^{(n+1)}$, dessen Kernvariable Werte $\geq \vartheta$ haben[12]*), wobei für $n=1$ noch alle $\xi V I$ mit $\xi \in [\vartheta, \vartheta V I)$ als δ-Zahlen vorauszusetzen sind.*

Satz 8. *Der Satz 7 ist für $n=1$ äquivalent mit Satz 4 und für $n=2, 3, \ldots$ äquivalent mit Satz 5 für die gleichen n.*

Wir beweisen Satz 8 und damit Satz 7. Es genügt, den Beweis für $n=2$ zu führen, die übrigen Fälle verlaufen analog. Zunächst zeigen wir, daß Satz 7 für $n=2$ aus Satz 5 für $n=2$ folgt. Sei also Satz 5 richtig und sei $\gamma=\mathfrak{F}^{(3)}(\vartheta)$ von der in Satz 7 verlangten Art. Die Figur γ hat also entweder selbst die Form $\beta W J I'$ (W bzw. J ein Operator erster bzw. zweiter Stufe) oder sie besitzt einen Exponenten δ von dieser Form, so daß I' wieder das am weitesten rechts stehende Zeichen von γ wird. Durch Weglassung von I' entsteht aus γ ein $\mathfrak{F}^{(2)}(\vartheta)$. — Es ist $\beta W J I' = \lim_p \beta_p$, $\beta_1 = \beta W J$, $\beta_{p+1} = \beta W J^{\beta_p}$. β_1 ist ein $\mathfrak{F}^{(2)}(\vartheta)$ der in Satz 5 verlangten Art, also auch $\beta_2 = \beta W J^{\beta_1}$, desgleichen β_3 usw., d.h. allgemein β_p. Im Falle $\gamma = \beta W J I'$ setzen wir $\gamma_p = \beta_p$; ist aber $\delta = \beta W J I'$ ein Exponent von γ, so bedeute γ_p die Figur, die aus γ entsteht, indem man δ durch β_p ersetzt. In jedem Falle ist auch γ_p ein $\mathfrak{F}^{(2)}(\vartheta)$ der in Satz 5 verlangten Art. Also gilt $\gamma_p < \vartheta V I I'$, mithin $\gamma = \lim_p \gamma_p \leq \vartheta V I I'$. — Andererseits ist W bzw. $J I'$ nicht schwächer als V bzw. $I I'$, so daß $\gamma \geq \beta W J I' \geq \vartheta V I I'$ sein muß[13]). Also ist $\gamma = \vartheta V I I'$. — Hinsichtlich eines $\mathfrak{F}^{(3)}$ der in Satz 7 geforderten Beschaffenheit verläuft der Beweis genau so[14]).

Nun beweisen wir das umgekehrte. Es sei daher Satz 7 richtig und $\mathfrak{F}^{(2)}(\vartheta)$ von der in Satz 5 geforderten Form. $\mathfrak{F}^{(2)}(\vartheta)$ läßt sich in der Gestalt βW schreiben, wo β entweder gleich ϑ oder selbst ein $\mathfrak{F}^{(2)}(\vartheta)$ ist. In W tritt außer V höchstens noch I auf. W hat entweder die Gestalt $\overline{W} J$, $\overline{W}$ ein Operator und J ein Iterator erster Stufe, oder W hat nicht diese Gestalt. Im letzteren Fall ersetzen wir W durch $W I$ und erhalten ein größeres $\mathfrak{F}^{(2)}(\vartheta)$ der Form $\beta W I$. Also können wir von vornherein $\mathfrak{F}^{(2)}(\vartheta) = \beta W J$ annehmen. Somit gilt $\mathfrak{F}^{(2)}(\vartheta) < \beta W J I'$, und da $\beta W J I'$ ein $\mathfrak{F}^{(3)}(\vartheta)$ nach den Bedingungen von Satz 7 ist, kommt $\beta W J I' = \vartheta V I I' > \mathfrak{F}^{(2)}(\vartheta)$. — Wenn ein $\mathfrak{F}^{(2)}$ gemäß Satz 5 gegeben ist, verläuft der Beweis genau so, denn wir können erforderlichenfalls zu einem (nicht kleineren) $\mathfrak{F}^{(2)}$ übergehen, dessen Kernvariable Werte $\geq \vartheta$ haben.

---

[12]) Es genügt auch die Voraussetzung, daß überhaupt eine Zahlenvariable in $\mathfrak{F}^{(n+1)}$, die an geeigneter Stelle steht, einen Wert $\geq \vartheta$ habe; z.B. ist $\alpha V I (I'^{\beta}) I'' = \vartheta V I I' I''$ für $\alpha \in [\alpha^{(0)}, \vartheta V I I' I'')$, $\beta \in [\vartheta, \vartheta V I I' I'')$. Der Beweis erfordert die Verallgemeinerung einiger in **III** bewiesener Formeln und Sätze.

[13]) Dieser leicht einzusehende Schluß fußt darauf, daß $\beta \in \{\vartheta V^{\nu}\}_{\nu < P}$, W eine V-monotone V-Potenz und $J I'$ ein monotoner Iterator erster Stufe ist (vgl. **III**, § 7, **I**).

[14]) Für den in [13]) genannten Schluß ist jetzt zu benützen, daß auf Grund der Voraussetzungen von Satz 7 $\beta \geq \vartheta$ wird und W monoton ist; $J I'$ ist auch als Operator zweiter Stufe monoton. Hierüber siehe **III**, § 7, **I**.

Wir führen jetzt noch zwei Sätze an, die sich von selbst verstehen.

Satz 9. *Sei $\mathfrak{F}$ eine Zahlenfigur des freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', I'', \ldots$. Ihre isolierten Variablen seien mit $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$, ihre Kernvariablen mit $\delta_1, \delta_2, \ldots$ bezeichnet. $\tilde{\mathfrak{F}}$ entstehe aus $\mathfrak{F}$, indem man die γ_i und δ_j durch Variable $\tilde{\gamma}_i$ und $\tilde{\delta}_j$ ersetzt und dabei die Ungleichungen $\gamma_i \leq \tilde{\gamma}_i$, $\delta_j \leq \tilde{\delta}_j$ verlangt. Dann ist $\mathfrak{F} \leq \tilde{\mathfrak{F}}$ erstens, wenn $\tilde{\delta}_j \in \{\delta_j V^\nu\}_{\nu<P}$, und zweitens, wenn V monoton ist.* — Die Bedingung $\tilde{\delta}_j \in \{\delta_j V^\nu\}$ ist erfüllt, wenn man für $\tilde{\delta}_j$ ein $\mathfrak{F}$ mit der Ausgangsvariablen δ_j wählt (vgl. § 4, **2**, vorletzter Absatz).

Satz 10. *In den auf die Monotonie von V begründeten Teilen der Sätze 4 bis 8 braucht V nicht als monoton vorausgesetzt zu werden, wenn man fordert, daß die in den betreffenden Zahlenfiguren $\mathfrak{F}$ auftretenden Kernvariablen stets Zahlen aus der Menge $\{\vartheta V^\nu\}_{\nu<P}$ bedeuten.*

Denn auf Grund dieser Forderung kann man so schließen, als ob V monoton wäre.

Bemerkung. Alle Aussagen hinsichtlich des freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', I'', \ldots$, die sich ohne Voraussetzung der Monotonie von V begründen lassen, bleiben sinnvoll, wenn man den Grundoperator V an Hand einer beliebigen abgeschlossenen Teilmenge $\{\vartheta_\nu\}_{\nu<P}$ von $[0, P)$ folgendermaßen definiert:

$$\vartheta_\nu = \vartheta V^\nu, \quad \vartheta = \vartheta_0.$$

Dann ist $\alpha^{(0)} = \vartheta$ und die Ausübung von V nur auf Zahlen ϑ_ν erklärt. In den Zahlenfiguren $\mathfrak{F}$ dürfen also die Kernvariablen nur in der Menge $\{\vartheta_\nu\}_{\nu<P}$ variieren.

Mainz, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 7. Oktober 1953.)

SCHÖNEBORN, H.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 455—473 (1954)

Über gewisse Topologien in Abelschen Gruppen. I.

Von
HEINZ SCHÖNEBORN.

Einleitung.

Bei einer beliebigen topologischen Gruppe sind gruppentheoretische und topologische Struktur lediglich verknüpft durch die Forderung der Stetigkeit der Verknüpfungsoperation. Dementsprechend liegt in der allgemeinen Theorie der topologischen Gruppen das Hauptgewicht der Untersuchungen auf rein topologischem Gebiet, während die spezielleren gruppentheoretischen Eigenschaften der betrachteten Gruppen im allgemeinen nur eine beiläufige Rolle spielen und vielfach kaum zum Ausdruck kommen.

Im Gegensatz dazu soll in der vorliegenden Arbeit eine Klasse von topologischen Abelschen Gruppen untersucht werden, deren Topologie nicht, wie im allgemeinen Falle, auf Grund von topologischen Stetigkeits-, Kompaktheits-, Zusammenhangsforderungen u. dgl., sondern ausschließlich aus der gruppentheoretischen Struktur der betrachteten Gruppe heraus, d.h. also mit Hilfe rein gruppentheoretischer Begriffe definiert wird[1]).

Unter den genannten Gesichtspunkten erscheint es zunächst natürlich, die Topologie der betrachteten Gruppe A mit Hilfe eines aus Untergruppen und ihren Nebenscharen bestehenden Umgebungssystems einzuführen. Nr. 1 und 2 der vorliegenden Arbeit bringen einleitend die wichtigsten auf diesen Fall zugeschnittenen Definitionen und einfachsten Tatsachen. Man bemerkt, daß die gruppentheoretische Bedeutung der „Untergruppentopologien" in der Auszeichnung gewisser Untergruppen, nämlich der topologisch abgeschlossenen, als „zulässiger" Untergruppen liegt. In der Gruppentheorie wird gleiches durch Einführung eines Operatorenbereiches erreicht, und der Versuch liegt nahe, beide Möglichkeiten der Auszeichnung zulässiger Untergruppen in Verbindung zu bringen. Dieses Problem wird in Nr. 3 durch Einführung des Begriffes des „natürlichen Operatorenbereiches" in gewissem Umfange gelöst. Es wird gezeigt, daß die Existenz eines natürlichen Operatorenbereiches der Gruppe A im wesentlichen gleichbedeutend ist mit gewissen einfachen Eigenschaften von A (Zyklohomogenität, Torsionstopologie), die bereits einen engen Zusammenhang zwischen gruppentheoretischer und topologischer Struktur zum Ausdruck bringen. Insbesondere ist es jetzt möglich, ganz allgemein den Begriff der primären Gruppe einzuführen (Nr. 4) und einen Zerlegungssatz

[1]) Vgl. insbesondere KRULL, W.: a) Über separable, insbesondere kompakte separable Gruppen. J. f. Math. **184** (1942). b) Bewertungstopologie. Bonn 1952 (als Manuskript verbreitet). Sowie HALL jr., M.: A topology for free groups and related groups. Ann. of Math. (II) **52**, 127—139 (1950), insbesondere Abschn. 3.

zu beweisen, der unter gewissen Voraussetzungen die Beschränkung der weiteren Betrachtungen auf den primären Fall gestattet (Satz 5). Die entscheidende Rolle der zyklischen Gruppen bei der Einführung des natürlichen Operatorenbereiches und den daran anschließenden Betrachtungen legt es nahe, die untersuchten Topologien mit Hilfe der zyklischen Gruppen zu klassifizieren, d.h. zwei Topologien τ_1, τ_2 derselben Gruppe A als äquivalent zu bezeichnen, wenn die durch τ_1, τ_2 induzierten Topologien in allen zyklischen Gruppen aus A identisch sind (Nr. 5).

Ist T eine nach dieser Äquivalenzrelation gebildete Topologienklasse der Gruppe A, so enthält T eine eindeutig bestimmte feinste Topologie, die wir als eine „S-Topologie" von A bezeichnen. Ist A primär, zyklovollständig[2]) und besitzt die S-Topologie, so fallen die Begriffe „gegenüber dem natürlichen Operatorenbereich von A zulässige Untergruppe" und „bezüglich der S-Topologie abgeschlossene Untergruppe" zusammen (Satz 10). Im Anschluß daran werden die gröbsten Topologien von A analysiert und es wird gezeigt, daß die Eigenschaft von A, eine gröbste Topologie zu haben, unter naheliegenden Voraussetzungen gleichwertig ist zur Eigenschaft der linearen Kompaktheit (Satz 13 und 15).

In dem demnächst in dieser Zeitschrift erscheinenden zweiten Teil der Arbeit werden die vorstehend skizzierten Resultate zur Herleitung der Theorie der Charakterengruppen der betrachteten Gruppenklassen benutzt. Zunächst ergibt sich, daß die linear kompakten Gruppen die Charakterengruppen der „im strengen Sinne S-topologischen" Gruppen[3]) sind und umgekehrt und daß für beide Gruppenklassen der Dualitätssatz gilt[4]). Für zyklovollständige primäre Gruppen A zeigen wir darüber hinaus:

I. Für die Gültigkeit des Dualitätssatzes für die Gruppe A ist notwendig, daß für A sowie die Charakterengruppe $C[A]$ von A die folgende Bedingung (K_1) erfüllt ist:

(K_1): Jede in der betrachteten Gruppe abgeschlossene Untergruppe mit kompaktem Erzeugendensystem ist kompakt.

II. Für die Gültigkeit des Dualitätssatzes ist hinreichend, daß A der obigen Bedingung (K_1) und außerdem der folgenden (K_2) genügt:

(K_2): Ist M eine Untermenge von A, $q \in A$ ein Häufungspunkt von M, dann gibt es eine Untermenge $M_1 \subseteq M$, deren (in A) abgeschlossene Hülle $\tilde{M}_1$ kompakt ist mit $q \in \tilde{M}_1$.

---

[2]) Eine topologische Gruppe A heißt „zyklovollständig", wenn die in A abgeschlossene Hülle jeder gewöhnlichen zyklischen Untergruppe von A topologisch vollständig ist.

[3]) Eine S-topologische Gruppe heißt „im strengen Sinne S-topologisch", wenn jede abgeschlossene Untergruppe mit kompaktem Erzeugendensystem Summe endlich vieler primärer Gruppen ist.

[4]) Während der Fertigstellung der vorliegenden Arbeit erhielt ich Einblick in ein derzeit noch unveröffentlichtes Manuskript einer Arbeit von Herrn I. KAPLANSKY, in welcher in anderem Zusammenhang und auf anderem Wege die Gültigkeit des Dualitätssatzes für die primären, linear kompakten Gruppen nachgewiesen wird.

Als einfacher Korollar ergibt sich aus dem vorangehenden noch die Gültigkeit des Dualitätssatzes für jede primäre, vollständige Gruppe, welche dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt[5]).

1. Wir betrachten additiv geschriebene Abelsche Gruppen mit dem neutralen Element 0, im folgenden kurz als „Gruppen" bezeichnet. Sei $\mathfrak{E}$ ein System von Untergruppen $A_{\alpha'}$ der Gruppe A, welches den folgenden Bedingungen genügt:

a) Der Durchschnitt je endlich vieler Untergruppen aus $\mathfrak{E}$ enthält eine Untergruppe aus $\mathfrak{E}$.

b) Der Durchschnitt aller Untergruppen aus $\mathfrak{E}$ ist die Nullgruppe.

Fassen wir die $A_{\alpha'}$ und ihre Nebenscharen als vollständiges Umgebungssystem eines aus den Elementen von A bestehenden topologischen Raumes auf, so wird A eine topologische Gruppe. Mit Rücksicht darauf, daß das die Topologie von A definierende System von Nullumgebungen aus Untergruppen von A besteht, sprechen wir hier von einer *Untergruppentopologie*. Alle im folgenden betrachteten Gruppen sind solche mit einer Untergruppentopologie. Die zu $\mathfrak{E}$ gehörenden Untergruppen $A_{\alpha'}$ von A bilden offenbar das Erzeugendensystem eines aus allen endlichen Durchschnitten der Untergruppen $A_{\alpha'}$ und ihren Obermengen bestehenden Filters $\mathfrak{S}_0$[6]), des „Nullfilters" von A. Alle Untergruppen von A aus $\mathfrak{S}_0$ sind (mit ihren Nebenscharen) gleichzeitig offen und abgeschlossen. Umgekehrt gehört jede offene Untergruppe von A zu $\mathfrak{S}_0$. — Sind in der abstrakten Gruppe A zwei Untergruppentopologien τ_1 und τ_2 mit den Nullfiltern $\mathfrak{S}_0^{(1)}$ bzw. $\mathfrak{S}_0^{(2)}$ definiert, so ist für die Gleichheit von τ_1 und τ_2 bereits notwendig und hinreichend, daß das System $\mathfrak{S}^{(1)}$ aller *Untergruppen* aus $\mathfrak{S}_0^{(1)}$ gleich dem System $\mathfrak{S}^{(2)}$ aller Untergruppen aus $\mathfrak{S}_0^{(2)}$ ist. Das System $\mathfrak{S}$ aller zum Nullfilter $\mathfrak{S}_0$ von A gehörenden Untergruppen ist eine eindeutig bestimmte Filterbasis von $\mathfrak{S}_0$ und hat als solche die oben für $\mathfrak{E}$ notierten Eigenschaften a) und b). Darüber hinaus enthält $\mathfrak{S}$ mit jeder Untergruppe A_α auch alle Obergruppen von A_α. Wir wollen (in leichter Abänderung der sonst üblichen Bezeichnungsweise) $\mathfrak{S}$ den „charakteristischen *Filter*" von A, die zu $\mathfrak{S}$ gehörenden Untergruppen „charakteristische Untergruppen" von A nennen und allgemein unter einem *Filter* auf A ein System $\mathfrak{U}$ von Nebenscharen von abgeschlossenen Untergruppen von A mit den folgenden Eigenschaften verstehen:

I. Der Durchschnitt je endlich vieler Nebenscharen aus $\mathfrak{U}$ ist eine Nebenschar aus $\mathfrak{U}$.

II. Mit jeder Nebenschar U aus $\mathfrak{U}$ gehören auch alle U enthaltenden abgeschlossenen Nebenscharen zu $\mathfrak{U}$.

Ein Teilsystem $\mathfrak{B}_\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{E}_\mathfrak{U}$ von zu $\mathfrak{U}$ gehörenden Nebenscharen heißt eine Basis bzw. ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{U}$, wenn $\mathfrak{U}$ aus den zu $\mathfrak{B}_\mathfrak{U}$ bzw.

[5]) Man beachte, daß die von uns betrachteten Gruppen im allgemeinen weder kompakt noch lokalkompakt noch linearkompakt noch diskret zu sein brauchen.

[6]) Wegen der im folgenden auftretenden allgemeinen topologischen Begriffsbildungen — insbesondere den Filterbegriff — vgl. BOURBAKI: Topologie Générale, Kap. I—III. Paris 1951.

$\mathfrak{E}_{\mathfrak{U}}$ gehörenden Nebenscharen durch Hinzunahme aller abgeschlossener Oberscharen bzw. durch Hinzunahme aller endlicher Durchschnitte und aller abgeschlossener Oberscharen derselben entsteht.

Der Filter $\mathfrak{U}$ möge ein CAUCHY-*Filter* heißen, wenn gilt:

III. $\mathfrak{U}$ enthält zu jeder charakteristischen Untergruppe eine Nebenschar.

Der Durchschnitt aller Scharen eines CAUCHY-Filters enthält höchstens ein Element von A. Besitzt jeder CAUCHY-Filter einen nicht leeren Durchschnitt, so ist A *„vollständig"*. Besitzt sogar jeder Filter einen nicht leeren Durchschnitt, so ist A *„linear kompakt"* [7]).

Nach bekannten Sätzen läßt sich die Gruppe A in im wesentlichen eindeutiger Weise in eine vollständige Gruppe $\hat{A}$ einbetten und mit A hat auch $\hat{A}$ eine Untergruppentopologie[8]). Wir bezeichnen $\hat{A}$ als die „vollständige Hülle" von A. Sind A_α die charakteristischen Untergruppen von A, so sind die vollständigen Hüllen $\hat{A}_\alpha$ von A_α genau die charakteristischen Untergruppen von $\hat{A}$ [8]).

Eine vollständige Gruppe A mit einer Untergruppentopologie ist genau dann kompakt[9]), wenn jede charakteristische Untergruppe von endlichem Index in A ist. Sie ist genau dann lokal kompakt, wenn sie eine kompakte charakteristische Untergruppe besitzt. — Abgeschlossene Untergruppen und Restklassengruppen nach solchen von kompakten bzw. linear kompakten Gruppen sind wieder kompakt bzw. linear kompakt. Jede kompakte Gruppe ist linear kompakt, während das Umgekehrte nicht zu gelten braucht.

Sind τ_1, τ_2 zwei Untergruppentopologien auf der Gruppe A, $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ ihre charakteristischen Filter, so heißt τ_1 „gröber" als τ_2, τ_2 „feiner" als τ_1, in Zeichen $\tau_1 \leq \tau_2$, wenn $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{S}_2$. Sind die Untergruppentopologien τ_1, τ_2 mit den charakteristischen Filtern $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ nicht vergleichbar vermöge der Relation $\leq$, so gilt jedenfalls für die durch den Vereinigungsfilter $\mathfrak{S}$ [10]) von $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ definierte Topologie τ von A: $\tau_1 \leq \tau$, $\tau_2 \leq \tau$. Die Untergruppentopologien τ der Gruppe A bilden also hinsichtlich der Relation $\leq$ eine „gerichtete Menge", die als eindeutig bestimmtes Maximum die diskrete Topologie besitzt, deren charakteristischer Filter die Nullgruppe enthält. —

Unter einem *„topologischen Homomorphismus"* der Gruppe A auf die Gruppe A' verstehen wir einen stetigen Homomorphismus von A auf A', der offene Mengen in offene Mengen überführt. Die kanonische Abbildung von A auf ihre Restklassengruppe A/B nach einer abgeschlossenen Untergruppe B ist stets ein topologischer Homomorphismus, wenn in A/B die übliche durch die Topologie von A induzierte Topologie zugrunde gelegt wird[11]).

[7]) Vgl. LEFSCHETZ: Algebraic topology, S. 78f. New York 1942.

[8]) BOURBAKI, [6]), Kap. III, § 3, Theorème 2 und Proposition 7.

[9]) Ein topologischer Raum R heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von R eine endliche Teilüberdeckung enthält — vgl. BOURBAKI [6]) Kap. I, § 10 und HALL [1]) Theorem 3.5.

[10]) Unter dem „Vereinigungsfilter" $\mathfrak{S}$ der Filter $\mathfrak{S}_\alpha$ ist natürlich der von den Mengen aus allen $\mathfrak{S}_\alpha$ zusammen erzeugte Filter zu verstehen.

[11]) Vgl. BOURBAKI [6]) Kap. I, § 9, Nr. 1 und Kap. III, § 2, Nr. 4.

Geht insonderheit nur die Nullgruppe von A in die Nullgruppe der Bildgruppe A' über, so haben wir einen „topologischen Isomorphismus". Die Abbildung ist dann in beiden Richtungen stetig, d.h. homöomorph. Die Eigenschaft der Vollständigkeit ist invariant gegenüber topologischen Isomorphismen[12]), die der Kompaktheit und linearen Kompaktheit bleibt auch bei topologischen Homomorphismen erhalten. —

Unter der *„direkten Summe"* einer Menge von Gruppen $A^{(\alpha)}$ (in Zeichen $\sum \oplus A^{(\alpha)}$) verstehen wir hier die aus allen eindeutigen *endlichen* Summen $\sum a^{(\alpha)}$ $(a^{(\alpha)} \in A^{(\alpha)})$ bestehende Gruppe mit der folgenden Topologie: Ist zu jedem α irgendeine charakteristische Untergruppe $A_\beta^{(\alpha)}$ von $A^{(\alpha)}$ gegeben, so sei $\sum_\alpha \oplus A_\beta^{(\alpha)}$ eine charakteristische Untergruppe von $\sum \oplus A^{(\alpha)}$[13]). — Im Gegensatz dazu verstehen wir unter der *„(direkten)* TYCHONOFF-*Summe"* der $A^{(\alpha)}$ (in Zeichen $\sum^T \oplus A^{(\alpha)}$) die aus allen *unendlichen* Summen $\sum a^{(\alpha)}$ $(a^{(\alpha)} \in A^{(\alpha)})$ bestehende „Produktgruppe" mit der üblichen Produkttopologie[14]). — Sind B_1 und B_2 abgeschlossene Untergruppen der Gruppe A, so sei $B_1 + B_2$ ihre topologische Vereinigungsgruppe, d.h. die (in A) abgeschlossene Hülle ihrer gewöhnlichen Vereinigungsgruppe. $B_1 + B_2$ heißt wie üblich die *direkte* Summe von B_1 und B_2, wenn $B_1 \cap B_2 = 0$ — in Zeichen $B_1 \oplus B_2$. Ein System von Elementen $a_\alpha \in A$ heißt ein *„topologisches Erzeugendensystem"* von A, wenn A die (in A) abgeschlossene Hülle der gewöhnlichen von den a_α erzeugten Untergruppe von A ist. —

2. Wir notieren noch einige speziell für Gruppen mit einer Untergruppentopologie gültige Sätze:

a) *Eine Untergruppe B der Gruppe A ist genau dann abgeschlossen in A, wenn B als Durchschnitt geeigneter charakteristischer Untergruppen A_{α_β} darstellbar ist.*

Die Abgeschlossenheit von $\bigcap A_{\alpha_\beta}$ ist klar. Sei umgekehrt B abgeschlossen in A, $b \in \bigcap_\alpha (A_\alpha + B)$. Aus $b \in A_\alpha + B$ folgt $b = a_\alpha + b_\alpha$ $(a_\alpha \in A_\alpha,\ b_\alpha \in B)$, also $b \equiv b_\alpha \pmod{A_\alpha}$. In jeder Umgebung von b liegt also ein $b_\alpha \in B$, d.h. b ist Häufungspunkt von B, also $b \in B$ und $B = \bigcap_\alpha (A_\alpha + B) = \bigcap A_{\alpha_\beta}$.

Aus a) folgt sofort:

b) *Ist B eine abgeschlossene Untergruppe von A und $\bar{x}$ eine Nebenschar mod B, so ist der Durchschnitt der $\bar{x}$ enthaltenden Nebenscharen der Gruppen $A_\alpha + B$ gleich $\bar{x}$.*

[12]) Man beachte, daß die Vollständigkeitseigenschaft bei nur homöomorphen Abbildungen im allgemeinen nicht erhalten bleibt. Die Invarianz der Vollständigkeit gegenüber topologischen Isomorphismen von Gruppen ist fast trivial.

[13]) Vgl. KAPLAN, S.: Extension of the Pontrjagin Duality. I. Duke Math. J. **15**, 649—658 (1948).

Die hier der direkten Summe $\sum \oplus A^\alpha$ zugeschriebene Topologie ist identisch mit der in der zitierten Arbeit eingeführten „asterisk-topology", bzw. „rectangular-topology" (beide fallen bei Untergruppentopologien zusammen).

[14]) Im Falle endlich vieler Summanden A^α sind $\sum \oplus A^\alpha$ und $\sum^T \oplus A^\alpha$ offenbar identisch.

c) A genüge der Voraussetzung: Ist $\bar{x}$ eine abgeschlossene Nebenschar in A, so bildet das System aller $\bar{x}$ enthaltenden Nebenscharen der charakteristischen Untergruppen von A ein vollständiges Umgebungssystem von $\bar{x}$. Dann gilt:

Sind B und F abgeschlossene Untergruppen von A, so ist die gewöhnliche Vereinigungsgruppe G von B und F abgeschlossen in A, also gleich $B+F$.

Denn sei $x \notin G$, $\bar{x}$ die Nebenschar von $x \bmod B$. G ist die Vereinigungsmenge genau der B-Nebenscharen, die ein Element von F enthalten und es gilt $\bar{x} \cap G = \emptyset$, $\bar{x} \cap F = \emptyset$. Ist U das Komplement von F in A, so ist U offen, $\bar{x} \subseteq U$, also U eine Umgebung von $\bar{x}$ und nach Voraussetzung gibt es eine charakteristische Gruppe $A_{\sigma_0} + B$, deren $\bar{x}$ enthaltende Nebenschar U_0 in U liegt. Aus $U \cap F = \emptyset$ folgt $U_0 \cap F = \emptyset$. Da auch U_0 aus gewissen B-Nebenscharen besteht, folgt hieraus sogar $U_0 \cap G = \emptyset$. Ist X das Komplement von G in A, so enthält also X mit jedem $x \in X$ eine ganz zu X gehörige Umgebung von x, d.h. X ist offen, also $G = B+F$ abgeschlossen.

Unter den Voraussetzungen von c) *gilt*, wie mühelos zu sehen:

d) *Ist B eine abgeschlossene Untergruppe von A, so führt die kanonische Abbildung von A auf die Restklassengruppe A/B abgeschlossene Untergruppen in abgeschlossene Untergruppen über.*

3. (a) sei die kleinste das Element $a \in A$ enthaltende abgeschlossene Untergruppe von A[15]).

Definition. Ein kommutativer topologischer (Links-) Multiplikatorenring P mit Einselement von A möge als ein *„natürlicher Operatorenbereich"* von A bezeichnet werden, wenn außer den gewöhnlichen Multiplikatoraxiomen[16]) folgende Bedingungen erfüllt sind:

Ist M eine beliebige Untermenge von P, $\widetilde{M \cdot a}$ die (in A) abgeschlossene Hülle von $M \cdot a$, $\widetilde{M}$ die (in P) abgeschlossene Hülle von M, so gelte

I. $P \cdot a = (a)$ für jedes $a \in A$.

II. $\widetilde{M \cdot a} = \widetilde{M} \cdot a$ für jedes $a \in A$ und jede Untermenge $M \subseteq P$.

Aus der Definition des natürlichen Operatorenbereiches folgt sofort:

Besitzt A den natürlichen Operatorenbereich P, so ist jede abgeschlossene Untergruppe B von A bezüglich P zulässig, d.h. $P \cdot B = B$.

Umgekehrt braucht aus der Zulässigkeit einer Untergruppe von A bezüglich P im allgemeinen natürlich nicht ihre Abgeschlossenheit in A zu folgen. Unter P^+ verstehen wir im folgenden stets die Additionsgruppe des Ringes P mit P als Multiplikatorenbereich.

Satz 1. Sei P ein natürlicher Operatorenbereich von A, $a \in A$. Die Menge P_a aller $\varrho \in P$ mit $\varrho \cdot a = 0$ ist ein (in P) abgeschlossenes Ideal und die Ab-

[15]) Wir werden (a) auch als eine „zyklische Hülle" im Gegensatz zu der aus den ganzrationalen Vielfachen $n \times a$ von a bestehenden gewöhnlichen zyklischen Gruppe $\langle a \rangle$ bezeichnen.

[16]) Für jedes $a, b \in A$; $\alpha, \beta \in P$: $\alpha \cdot a \in A$, $(\alpha+\beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$, $(\alpha \cdot \beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a)$, $\alpha \cdot (a+b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$, $1 \cdot a = a$ (1 Einselement von P).

bildung $\varrho \to \varrho \cdot a$ ist ein abgeschlossener topologischer Homomorphismus[17]) von P^+ auf $P \cdot a = (a)$.

Beweis. (1) Die Abbildung $\varrho \to \varrho \cdot a$ ist stetig. Denn ist $B \subset P \cdot a$ abgeschlossen in $P \cdot a$, M_B das vollständige Urbild von B bezüglich der Abbildung $\varrho \to \varrho \cdot a$, so ist $M_B \cdot a \subseteq B$, wegen der Abgeschlossenheit von B aber auch $\widetilde{M}_B \cdot a = \widetilde{M_B \cdot a} \subseteq B$, also $M_B = \widetilde{M}_B$ abgeschlossen in P. (2) Die Abbildung $\varrho \to \varrho \cdot a$ ist abgeschlossen, denn aus $M = \widetilde{M}$ abgeschlossen in P folgt $M \cdot a = \widetilde{M} \cdot a = \widetilde{M \cdot a}$ abgeschlossen in $P \cdot a$. (3) Die Abbildung $\varrho \to \varrho \cdot a$ ist also ein stetiger abgeschlossener Homomorphismus von P^+ auf $P \cdot a$ und die aus allen $\varrho \in P$ mit $\varrho \cdot a = 0$ bestehende Urbildmenge P_a der 0 von $P \cdot a$ ist abgeschlossen. P_a ist offenbar ein Ideal in P und $P \cdot a$ gruppentheoretisch isomorph zur Restklassengruppe P^+/P_a^+, wo P^+ bzw. P_a^+ die Additionsgruppen von P bzw. P sind. (4) Der durch die Abbildung $\varrho \to \varrho \cdot a$ induzierte Isomorphismus von P^+/P_a^+ auf $P \cdot a$ führt abgeschlossene Mengen aus P^+/P_a^+ in abgeschlossene Mengen aus $P \cdot a$ über, denn bei der kanonischen Abbildung von P^+ auf P^+/P_a^+ entsprechen abgeschlossenen Mengen aus P^+/P_a^+ abgeschlossene Urbilder aus P^+ und diesen, wie unter (2) bewiesen, abgeschlossene Bilder in $P \cdot a$. Wegen der Eineindeutigkeit der Abbildung von P^+/P_a^+ auf $P \cdot a$ gehen dann aber auch die Komplemente der abgeschlossenen Mengen, d.h. die offenen Mengen aus P^+/P_a^+ in Komplemente von abgeschlossenen Mengen, also in offene Mengen aus $P \cdot a$ über. Da die kanonische Abbildung von P^+ auf P^+/P_a^+ bekanntlich offene Mengen in offene Mengen überführt, ist auch die Abbildung $\varrho \to \varrho \cdot a$ von P auf $P \cdot a$ offen. Damit ist alles bewiesen.

Das abgeschlossene Ideal $P_a \subseteq P$ mit $P_a \cdot a = 0$ wird wie üblich als *„Ordnungsideal"* von a bezeichnet. Ist P_* der Durchschnitt aller Ordnungsideale der Elemente von A, dann ist auch $P^* = P/P_*$ ein natürlicher Operatorenbereich von A, in welchem der Durchschnitt aller Ordnungsideale das Nullideal ist. Soweit nichts anderes aus dem Zusammenhang hervorgeht, wollen wir im folgenden immer stillschweigend voraussetzen, daß der Durchschnitt aller Ordnungsideale gleich 0 ist.

Definition. Die Gruppe A heißt „zyklohomogen", wenn sie einen natürlichen Operatorenbereich P besitzt mit der Eigenschaft, daß P^+ eine Untergruppentopologie besitzt und P natürlicher Operatorenbereich von P^+ ist.

Besitzt P die obige Eigenschaft, dann muß die in P^+ abgeschlossene Hülle (1) der aus den ganzrationalen Vielfachen $n \times 1$ der $1 \in P$ bestehenden zyklischen Gruppe identisch mit der additiven Gruppe $P \cdot 1 = P^+$ sein und aus der Zyklohomogenität von A (bezüglich P) folgt, daß alle zyklischen Hüllen aus A aus einer einzigen — nämlich P^+ — durch Restklassengruppenbildung abgeleitet werden können — genau so, wie im diskreten Falle alle zyklischen Gruppen aus der Additionsgruppe der ganzrationalen Zahlen entstehen.

[17]) Eine Abbildung heißt „abgeschlossen" bzw. „offen", wenn sie abgeschlossene bzw. offene Mengen in abgeschlossene bzw. offene Mengen transformiert.

Wir notieren einige Eigenschaften von P, die sich aus der Voraussetzung, daß P natürlicher Operatorenbereich von P^+ ist, ergeben:

a) Die aus den ganzrationalen Vielfachen $n \times 1$ von $1 \in P$ bestehende gewöhnliche zyklische Gruppe $\langle 1 \rangle$ liegt dicht in P^+. Dies wurde schon oben bemerkt.

b) Ist P diskret, so isomorph zum Ring der ganzrationalen Zahlen oder zu einem Restklassenring desselben.

Denn nach a) ist $P \cdot 1 = P^+ = \langle 1 \rangle$.

c) Die charakteristischen Untergruppen P_α^+ von P^+ sind Ideale P_α in P.

Denn die P_α^+ sind abgeschlossen in P^+, also zulässig gegenüber P. —

Natürlich bilden die Ideale P_α ein vollständiges System von Nullumgebungen in P.

d) Ist P nicht diskret, so ist jedes $\varrho \in P$ von endlicher Ordnung modulo jedem Umgebungsideal P_α.

Denn $\langle 1 \rangle$ liegt nach a) dicht in P^+ und wenn P und damit P^+ nicht diskret ist, so ist auch $\langle 1 \rangle$ nicht diskret. Die Umgebungsuntergruppen $\langle 1 \rangle_\alpha = \langle 1 \rangle \cap P_\alpha^+$ von $\langle 1 \rangle$ sind daher $\neq (0)$ und 1 ist von endlicher Ordnung mod P_α^+, d.h. von endlicher Ordnung mod P_α. Liegt aber $n \times 1$ in P_α, so wegen c) auch $\varrho(n \times 1) = n \times \varrho$ $(\varrho \in P)$.

e) Ist P nicht diskret und vollständig, so ist P topologisch isomorph zu einem Ring von PRÜFERschen ganzen n-adischen Zahlen[18]) und kann also hiermit identifiziert werden.

Umgekehrt folgt übrigens aus bekannten Eigenschaften der ganz-n-adischen Zahlenringe sofort, daß diese natürliche Operatorenbereiche ihrer Additionsgruppen sind und hieraus folgt: Hat eine Gruppe A einen ganz-n-adischen Zahlenring als natürlichen Operatorenbereich, so ist A zyklohomogen.

Es ist leicht, auf Grund des oben Bemerkten ein Beispiel für eine nichtzyklohomogene Gruppe zu geben:

Sei A_1 die diskrete Additionsgruppe der ganzrationalen Zahlen, A_2 die gleiche Gruppe mit einer nicht diskreten Topologie und $A = A_1 \oplus A_2$ die topologische direkte Summe von A_1 und A_2. — Wäre A zyklohomogen mit dem natürlichen Operatorenbereich P, P_1 bzw. P_2 die Ordnungsideale von A_1 bzw. A_2 in P, so wäre $P^+/P_2^+ = A_2$ nicht diskret, also auch P nicht diskret. Andererseits muß $P^+/P_1^+ = A_1$ eine diskrete unendliche zyklische Gruppe sein, was sofort zu einem Widerspruch gegen d) führt. —

Ist A eine zyklohomogene Gruppe mit dem natürlichen Operatorenbereich P, so ist entweder jede zyklische Untergruppe von A diskret (und

[18]) Der Ring $\mathfrak{R}$ aller ganzen PRÜFERschen n-adischen Zahlen entsteht aus dem Ring $\mathfrak{R}_0$ aller ganz rationalen Zahlen, indem man alle Ideale $\neq (0)$ aus $\mathfrak{R}_0$ als Nullumgebungen wählt und dem erhaltenen topologischen Ring CAUCHY-vervollständigt. Unter einem PRÜFERschen Zahlenring $\mathfrak{R}'$ verstehen wir allgemein stets ein abgeschlossenes Ideal aus $\mathfrak{R}$ mit einem Einselement $1' \in \mathfrak{R}'$ bezüglich $\mathfrak{R}'$. $\mathfrak{R}$ ist direkte TYCHONOFF-Summe $\mathfrak{R} = \sum^T \oplus \mathfrak{R}_p$ aller ganz-p-adischen Zahlenringe $\mathfrak{R}_p$ (p ganzrationale Primzahl). Für jedes abgeschlossene Ideal $\mathfrak{R}' \subseteq \mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{R}'$-Einselement $1'$ gilt dann entweder $\mathfrak{R}_p \subseteq \mathfrak{R}'$ oder $\mathfrak{R}_p \cap \mathfrak{R}' = 0$ und $\mathfrak{R}' = \sum^T \oplus \mathfrak{R}_{p'}$, wo p' alle p mit $\mathfrak{R}_p \subseteq \mathfrak{R}'$ durchläuft. Vgl. PRÜFER, H.: Neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie. Math. Ann. **94** (1925).

für P kann der Ring der ganzrationalen Zahlen gewählt werden), oder A besitzt die folgende Eigenschaft

(T): *Jede Restklassengruppe A/A_α von A nach einer charakteristischen Untergruppe A_α enthält nur Elemente von endlicher Ordnung, d.h. A/A_α ist eine Torsionsgruppe.* —

In der Tat. Gibt es eine nichtdiskrete zyklische Untergruppe von A so ist auch P sicher nicht diskret und besitzt die Eigenschaft d). Ist nun $a \in A$, A_α eine charakteristische Untergruppe von A, $(a) \cap A_\alpha = (0)$, dann ist $(a) = \langle a \rangle$ diskret und wegen der topologischen Isomorphie von (a) zu einer Restklassengruppe P^+/P_a^+ folgt aus d) die Endlichkeit von (a). Ist aber (a) nicht-diskret, so $(a) \cap A_\alpha \neq (0)$ für alle α und aus der topologischen Isomorphie von (a) und P^+/P_a^+ folgt wieder die Behauptung.

Gruppen mit der Eigenschaft (T) werden wir im folgenden als *„torsionstopologische Gruppen"* bezeichnen.

Wir werden uns im folgenden fast ausschließlich mit Gruppen zu befassen haben, deren zyklische Hüllen (a) $(a \in A)$ vollständig sind (was im besonderen stets der Fall ist, wenn die betrachtete Gruppe selber vollständig ist). Gruppen mit dieser Eigenschaft nennen wir *„zyklovollständig"*.

Ist A eine Gruppe, die eine diskrete zyklische Hülle von unendlicher Ordnung enthält und ist A zyklohomogen, so folgt aus den vorangegangenen Bemerkungen, daß A den Ring der ganzrationalen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich besitzt und zyklovollständig ist. Die zyklovollständigen zyklohomogenen Gruppen ohne diskrete zyklische Hüllen von unendlicher Ordnung werden gekennzeichnet durch

Satz 2. Die Gruppe A sei zyklovollständig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

I. A besitzt einen ganz-n-adischen Zahlenring als natürlichen Operatorenbereich.

II. A ist zyklohomogen und enthält keine diskrete unendliche zyklische Hülle.

III. A ist torsionstopologisch.

Beweis. Aus I. folgt II., aus II. folgt III. — wie oben gezeigt. Bleibt zu beweisen, daß jede zyklovollständige torsionstopologische Gruppe einen ganz-n-adischen Zahlenring als natürlichen Operatorenbereich besitzt[19]). Sei also $a \in A$, (a) die abgeschlossene, also vollständige Hülle der von den ganzrationalen Vielfachen $n \times a$ gebildeten gewöhnlichen zyklischen Gruppe $\langle a \rangle$. Jedes $a' \in (a)$ ist Limes eines CAUCHY-Filters in (a) und umgekehrt besitzt jeder CAUCHY-Filter in (a) einen Limes. $\mathfrak{F}^{(a)}$ sei der charakteristische Filter von (a). Es genügt, als CAUCHY-Filter in (a) einen aus Nebenscharen nach den $A_\alpha^{(a)} \in \mathfrak{F}^{(a)}$ bestehenden Filter zu nehmen. Sei nun zu jedem α eine Nebenschar $U_\alpha^{(a)}$ von $A_\alpha^{(a)}$ gegeben. Da die ganzrationalen Vielfachen $n \times a$ von a dicht in (a) liegen, gibt es in jedem $U_\alpha^{(a)}$ ganzrationale Vielfache $n_\alpha \times a$ und

[19]) Vgl. hierzu den ganz analogen Beweis bei PIETRKOWSKI, ST.: Theorie der Abelschen Gruppen. Math. Ann. **104** (1931).

die n_α für welche $n_\alpha \times a \in U_\alpha^{(a)}$ ist, bilden in der Additionsgruppe $\mathfrak{R}_0^+$ der ganzrationalen Zahlen eine Restklasse $V_\alpha^{(a)}$ modulo der Ordnung $m_\alpha^{(a)}$ von a mod $A_\alpha^{(a)}$. Die $U_\alpha^{(a)}$ bilden dann und nur dann einen Filter, wenn das gleiche für die Restklassen $V_\alpha^{(a)}$ im Bereich der ganzrationalen Zahlen gilt. In diesem Falle definieren die $V_\alpha^{(a)}$ eine ganz-n-adische Zahl ν und wir bezeichnen den Limes des Filters $\{U_\alpha^{(a)}\}$ mit $\nu \cdot a$. Dann gehört zu jeder ganz-n-adischen Zahl ν ein $\nu \cdot a \in (a)$ und jedes Element von (a) läßt sich eindeutig in dieser Form ausdrücken. Man sieht leicht, daß die damit eingeführten n-adischen Operatoren den üblichen Multiplikatoraxiomen genügen und daß (a) topologisch homomorph ist zur Additionsgruppe der ganz-n-adischen Zahlen. A besitzt also den PRÜFERschen Ring $\mathfrak{R}$ der ganz-n-adischen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich.

4. *Definition.* Die Gruppe A heißt „primär" (zur Primzahl p gehörig), wenn für jede abgeschlossene Untergruppe $B \subseteq A$ gilt: Ist $a \in A$ ein Element endlicher Ordnung mod B, so ist die Ordnung von a mod B eine Potenz von p.

Jede abgeschlossene Untergruppe einer primären Gruppe A und jede Restklassengruppe nach einer abgeschlossenen Untergruppe von A ist offenbar gleichfalls primär.

Satz 3. A ist dann und nur dann primär (zur Primzahl p gehörig), wenn jedes $a \in A$ modulo jeder charakteristischen Untergruppe A_α, in der es nicht enthalten ist, eine Potenz von p zur Ordnung hat.

Beweis. A sei primär, $a \in A$, A_α eine charakteristische Untergruppe von A und $a \notin A_\alpha$. Wäre a von unendlicher Ordnung mod A_α, so wäre die von a erzeugte gewöhnliche zyklische Gruppe diskret, also abgeschlossen in A und sicher nicht primär — Widerspruch. Mithin ist a von endlicher Ordnung mod A_α und folglich sogar von p-Potenzordnung mod A_α. — Umgekehrt sei jedes $a \in A$ mit $a \notin A_\alpha$ von p-Potenzordnung mod A_α, B eine abgeschlossene Untergruppe von A und a von endlicher Ordnung mod B. Gehen wir in die von a erzeugte gewöhnliche zyklische Gruppe $\langle a \rangle$, so wird die Relativtopologie von $\langle a \rangle$ durch die charakteristischen Gruppen $\langle a \rangle \cap A_\alpha$ definiert, während $\langle a \rangle \cap B$ abgeschlossen in $\langle a \rangle$ und somit Durchschnitt gewisser Gruppen $\langle a \rangle \cap A_\alpha$ ist. Hieraus folgt leicht, daß $\langle a \rangle \cap B$ mit einer der Gruppen $\langle a \rangle \cap A_\alpha$ zusammenfallen muß und a somit von Primzahlpotenzordnung mod B ist.

Satz 4. Eine zyklovollständige Gruppe A ist dann und nur dann primär, wenn sie den Ring der ganz-p-adischen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich besitzt. — Eine zyklovollständige primäre Gruppe ist stets zyklohomogen.

Beweis. A habe den Ring $\mathfrak{R}_p$ der ganz-p-adischen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich. Sei $a \in A$, A_α eine charakteristische Untergruppe und $a \notin A_\alpha$. (a) ist topologisch homomorphes Bild von $\mathfrak{R}_p^+$ und a ist von p-Potenzordnung mod der charakteristischen Untergruppe $(a) \cap A_\alpha$ von (a) und also von gleicher Ordnung mod A_α. Mithin ist A primär. — Ist umgekehrt A

primär und zyklovollständig, so ist entweder jedes A-Element von endlicher p-Potenzordnung oder es gibt Elemente $a \in A$ von unendlicher Ordnung und für diese ist (a) topologisch isomorph zu $\mathfrak{R}_p^+$, woraus leicht folgt, daß und wie $\mathfrak{R}_p$ als natürlicher Operatorenbereich von A zu definieren ist. — Die Zyklohomogenität von A folgt aus Satz 2.

Wir leiten nun noch kurz ein Resultat über die Zerlegbarkeit einer beliebigen zyklovollständigen torsionstopologischen Gruppe (wegen dieser Voraussetzung vgl. Satz 2) in primäre Gruppen ab. Nach bekannten Sätzen ist der ganz-n-adische Zahlenring $\mathfrak{R}$ in eindeutiger Weise als direkte TYCHONOFF-Summe $\mathfrak{R} = \sum^T \oplus \mathfrak{R}_p$ von ganz-p-adischen Zahlenringen $\mathfrak{R}_p$ darstellbar. Ist also A zyklovollständig und torsionstopologisch, d.h. (Satz 2) besitzt den ganz-n-adischen Zahlenring $\mathfrak{R}$ als natürlichen Operatorenbereich und ist (a) wieder die abgeschlossene Hülle der von $a \in A$ erzeugten zyklischen Gruppe, so ist $(a) = \sum^T \oplus (a_p)$ gleichfalls in eindeutiger Weise als direkte TYCHONOFF-Summe von primären vollständigen zyklischen Hüllen (a_p) darstellbar, wo zu jeder Primzahl p höchstens ein Summand $(a_p) \neq (0)$ gehört. $A^{(p)}$ sei die (abgeschlossene) Vereinigungsgruppe aller zur Primzahl p gehörigen primären vollständigen zyklischen Hüllen von A. Wie leicht zu sehen ist dann $A^{(p)}$ primär und besitzt den Ring der ganz-p-adischen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich. $A^{(p)}$ ist die zu p gehörige „Primärkomponente" von A. Wir zeigen:

Satz 5. *A sei torsionstopologisch und zyklovollständig, $A^{(p)}$ die zur Primzahl p gehörige Primärkomponente von A. A besteht genau aus allen eindeutigen endlichen Summen $\sum_p a_p$ $(a_p \in A^{(p)})$ und denjenigen gleichfalls eindeutigen unendlichen Summen $\sum_p a_p$ $(a_p \in A^{(p)})$, für welche alle a_p in einer kompakten Untergruppe von A liegen.* —

Beweis. Zunächst ist klar, daß A alle endlichen Summen $\sum_p a_p$ enthält. Seien nun abzählbar viele Elemente $a_p \in A^{(p)}$ gegeben, wo die Primzahlen p alle verschieden sind und die in einer kompakten (also sicher vollständigen) Untergruppe $B \subseteq A$ liegen. Wird für B die kleinste alle a_p enthaltende abgeschlossene Untergruppe von A genommen, so besitzt B wegen der Kompaktheit eine charakteristische Basis, die aus einer absteigenden Kette von Untergruppen von endlichem Index in B besteht und es ist B nach bekannten Sätzen eindeutig darstellbar als direkte TYCHONOFF-Summe von primären Gruppen $B^{(p)}: B = \sum_p^T \oplus B^{(p)}$ [20]). Dann muß $a_p \in B^{(p)}$ sein und die Existenz der unendlichen Summe $\sum_p a_p$ folgt aus den Eigenschaften der TYCHONOFF-Summe. — Sei umgekehrt $a \in A$, $a \neq 0$, (a) die abgeschlossene Hülle der von a erzeugten zyklischen Gruppe. Dann ist (a) kompakt und $(a) = \sum_p^T \oplus (a_p)$ wieder direkte TYCHONOFF-Summe der primären (a_p) und $a = \sum_p a_p$. —

[20]) PIETRKOWSKI, ST.: [19]) § 4.

5. Auf ein und derselben abstrakten Gruppe A sind im allgemeinen natürlich verschiedene Topologien möglich.

Definition. Zwei (Untergruppen-)Topologien τ_1 und τ_2 auf A mögen äquivalent heißen, $\tau_1 \sim \tau_2$, wenn für jedes $a \in A$ gilt: Die abgeschlossene Hülle $(a)^{(\tau_1)}$ der von (a) erzeugten zyklischen Gruppe bezüglich der Topologie τ_1 ist (elementweise und topologisch) identisch mit der abgeschlossenen Hülle $(a)^{(\tau_2)}$ bezüglich der Topologie τ_2. —

Es ist klar, daß die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation für die Menge aller Untergruppentopologien auf A ist und diese in Äquivalenzklassen T — im folgenden kurz als „Topologienklassen" bezeichnet — einteilt. Fast trivial ist

Satz 6. Sind τ_1 und $\tau_2 \sim \tau_1$ zwei äquivalente Topologien auf A und besitzt A bezüglich τ_1 den natürlichen Operatorenbereich P, so ist P (mit derselben Operatormultiplikation!) auch natürlicher Operatorenbereich bezüglich τ_2. — Besitzt A umgekehrt bezüglich der Topologien τ_1 und τ_2 denselben natürlichen Operatorenbereich P (beidemale mit derselben Operatormultiplikation), so ist $\tau_1 \sim \tau_2$. —

Sei nun T eine Topologienklasse der Gruppe A, $\mathfrak{S}^{(\tau)}$ der zur Topologie $\tau \in T$ gehörige charakteristische Filter in A. Dann erzeugt das System aller Untergruppen, die zu (mindestens) einem der $\mathfrak{S}^{(\tau)}$ $(\tau \in T)$ gehören, wieder einen Filter $\mathfrak{S}^{0)}$ in A, der eine Topologie τ_0 in A definiert. τ_0 ist die (eindeutig bestimmte) feinste Topologie aus T, das „Maximum" der Topologien $\tau \in T$. —

In der Tat. Daß τ_0 die obere Grenze der $\tau \in T$ ist, ist klar und $\tau_0 \in T$ folgt so: Sei $\tau \in T$, $a \in A$, $\langle a \rangle$ die von a erzeugte (gewöhnliche) zyklische Gruppe, $b \in A$ ein Häufungspunkt von $\langle a \rangle$ bei der Topologie τ. Dann liegt in jeder τ-Umgebung von b, d.h. also in jeder b enthaltenden Nebenschar der charakteristischen τ-Untergruppen ein $a' \in \langle a \rangle$ und dies gilt für alle $\tau \in T$. Die Gesamtheit aller dieser Nebenscharen für alle $\tau \in T$ bildet aber gerade ein vollständiges τ_0-Umgebungssystem von b[21]) und b ist Häufungspunkt von $\langle a \rangle$ auch bezüglich der Topologie τ_0. Danach ist die abgeschlossene Hülle von $\langle a \rangle$ bezüglich τ_0 identisch mit der abgeschlossenen Hülle bezüglich $\tau \in T$ und es folgt $\tau_0 \in T$. Wir haben also

Satz 7. Ist T eine Topologienklasse von A, so gibt es eine eindeutig bestimmte feinste Topologie τ_0 aus T. —

Wir bezeichnen τ_0 hinfort als die zur Klasse T gehörige „*S-Topologie*".

6. Wir betrachten nunmehr Gruppen A mit einer S-Topologie unter der weiteren Voraussetzung, daß A zyklovollständig und torsionstopologisch ist, d.h. einen ganz-n-adischen Zahlenring als natürlichen Operatorenbereich besitzt. Wir bemerken zunächst:

a) Ist (a) eine zyklische Hülle mit einem PRÜFERschen ganz-n-adischen Zahlenring $\mathfrak{R}$ als natürlichem Operatorenbereich, ist ferner $\alpha \in \mathfrak{R}$, so ist die

[21]) Man beachte, daß die zyklische Hülle (a) von a für alle $\tau \in T$ dieselbe ist und daß in (a) der Durchschnitt je endlich vieler zu verschiedenen $\tau \in T$ gehöriger Umgebungen von b wieder eine τ-Umgebung von b für jedes $\tau \in T$ enthält.

$\mathfrak{R}$-zulässige Untergruppe $[\mathfrak{R} \cdot \alpha] \cdot a$ abgeschlossen in (a). $[\mathfrak{R} \cdot \alpha] \cdot a$ ist genau dann eine charakteristische Untergruppe von (a), wenn α in $\mathfrak{R}$ zu einer endlichen natürlichen Zahl assoziiert ist. Dies folgt leicht aus bekannten Eigenschaften der n-adischen Zahlenringe.

b) Aus a) folgt: Ist B eine $\mathfrak{R}$-zulässige Untergruppe von endlichem Index in (a), so ist B eine charakteristische Untergruppe von (a).

c) Aus b) folgt: Ist A eine Gruppe mit dem n-adischen Zahlenring $\mathfrak{R}$ als natürlichem Operatorenbereich und einer S-Topologie, ist ferner B eine $\mathfrak{R}$-zulässige Untergruppe von A mit der Eigenschaft, daß A/B nur Elemente von endlicher Ordnung enthält, dann ist B eine charakteristische Untergruppe von A. — Denn B würde, wenn sie anderenfalls zum charakteristischen Filter von A hinzugenommen würde, die Topologie der zyklischen Gruppen $(a) \subseteq A$ wegen b) nicht ändern und aus der „Maximaleigenschaft" der S-Topologie folgt, daß B charakteristische Untergruppe von A sein muß. — Da nach Satz 2 auch umgekehrt jede charakteristische Untergruppe von A die Eigenschaft haben muß, daß die nach ihr gebildete Restklassengruppe nur Elemente von endlicher Ordnung enthält, erhalten wir

Satz 8. Hat A eine S-Topologie und einen ganz-n-adischen Zahlenring $\mathfrak{R}$ als natürlichen Operatorenbereich, so besteht der charakteristische Filter von A genau aus allen $\mathfrak{R}$-zulässigen Untergruppen $B \subseteq A$ mit der Eigenschaft, daß A/B nur Elemente von endlicher Ordnung enthält. —

Hinsichtlich der Zerlegbarkeit der S-topologischen Gruppen mit ganz-n-adischem natürlichem Operatorenbereich in Primärkomponenten beweisen wir nun noch das Satz 5 ergänzende Resultat:

Ist A S-topologisch mit dem Ring $\mathfrak{R}$ der ganz-n-adischen Zahlen als natürlichem Operatorenbereich, so ist jede Primärkomponente $A^{(p)}$ von A gleichfalls S-topologisch (und besitzt nach Satz 4 den Ring der ganz-p-adischen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich) [22]).

Wir haben zu zeigen, daß die Relativtopologie der Untergruppen $A^{(p)}$ identisch ist mit der zu dem natürlichen Operatorenbereich $\mathfrak{R}_p$ von $A^{(p)}$ gehörigen S-Topologie. Wäre die Relativtopologie von $A^{(p)}$ nicht dieselbe wie die durch $\mathfrak{R}_p$ bestimmte S-Topologie, so gäbe es eine charakteristische Untergruppe $A_1^{(p)} \subseteq A^{(p)}$ der S-Topologie, welche nicht charakteristische Untergruppe für die Relativtopologie wäre. Verfeinern wir die Topologie von A durch Hinzunahme der (sicher direkten) Summe $A_1^{(p)} \oplus B$, wo B die topologische Vereinigungsgruppe aller $A^{(p')}$ $(p' \neq p)$ ist, zum charakteristischen Filter von A und betrachten wir wieder die zyklische Hülle $(a) = \sum^T \oplus (a^{(p)})$ eines beliebigen $a \in A$, so ist sofort zu sehen, daß die Relativtopologie von (a) durch

[22]) Eine direkte Summe $A = \sum \oplus A^{(\alpha)}$ von S-topologischen Gruppen $A^{(\alpha)}$ ist, wie leicht zu sehen, wieder eine S-topologische Gruppe. Auf der anderen Seite beachte man, daß auch eine TYCHONOFF-Summe von S-topologischen Gruppen wieder S-topologisch sein kann. So ist die S-topologische Gruppe $\mathfrak{R}^+$ der ganzen n-adischen Zahlen direkte TYCHONOFF-Summe der primären Gruppen $\mathfrak{R}_p^+$, wo $\mathfrak{R}_p^+$ die Additionsgruppe der ganzen p-adischen Zahlen ist; eine TYCHONOFF-Summe von unendlich vielen zur gleichen Primzahl gehörigen Gruppen ist hingegen niemals S-topologisch.

die Verfeinerung der Topologie von A nicht verändert wird und da A die S-Topologie besitzt, muß $A_1^{(p)} \oplus B$ charakteristische Untergruppe von A, also $A_1^{(p)}$ charakteristische Untergruppe von $A^{(p)}$ bezüglich der Relativtopologie sein. Hieraus folgt die Behauptung. —

7. Wir wollen nun die zyklovollständigen S-topologischen primären Gruppen genauer untersuchen und setzen also in dieser Nummer voraus, daß A eine Gruppe mit dem Ring $\mathfrak{R}_p$ der ganz-p-adischen Zahlen als natürlichem Operatorenbereich und der zugehörigen S-Topologie ist. Soweit nichts anderes aus dem Zusammenhang hervorgeht, sollen unter „Untergruppen" von A stets $\mathfrak{R}_p$-zulässige Untergruppen verstanden sein. Zunächst gilt:

Satz 9. Jede abgeschlossene Untergruppe $B \subseteq A$ hat gleichfalls die S-Topologie als Relativtopologie in A.

Beweis. B' sei eine $\mathfrak{R}_p$-zulässige Untergruppe von B, so daß B/B' nur Elemente von endlicher Ordnung enthält. Zu zeigen ist die Existenz einer charakteristischen Untergruppe A' von A mit $B \cap A' = B'$. Sei nun $C \subseteq A$ die Menge aller A-Elemente von endlicher Ordnung mod B'. C ist eine $\mathfrak{R}_p$-zulässige Untergruppe von A. Da die Vereinigungsmenge einer aufsteigenden Kette $\mathfrak{R}_p$-zulässiger Untergruppen wieder eine $\mathfrak{R}_p$-zulässige Untergruppe ist, gibt es eine größte zulässige Untergruppe $A_0' \subseteq A$ mit $A_0' \cap C = 0$, erst recht also $A_0' \cap B = A_0' \cap B' = 0$. In wohlbekannter Weise folgt nun aus der Maximaleigenschaft von A_0', daß jedes $a \in A$ von endlicher Ordnung mod $A_0' \oplus C$ und also auch von endlicher Ordnung mod $A' = A_0' \oplus B'$ ist. Nach Satz 8 ist also A' eine charakteristische Untergruppe von A und wegen $B \cap A_0' = 0$ ist $A' \cap B = B'$, also B' eine (bezüglich der Relativtopologie) charakteristische Untergruppe von B. — Daß umgekehrt jede (bezüglich der Relativtopologie) charakteristische Untergruppe B' von B $\mathfrak{R}_p$-zulässig ist und daß jedes Element von B von endlicher Ordnung mod B' sein muß, ist fast trivial. Satz 8 liefert jetzt die Behauptung.

Ist $T(A)$ die (sicher $\mathfrak{R}_p$-zulässige) Torsionsgruppe von A, d.h. die Untergruppe aller Elemente von endlicher Ordnung aus A, so folgt sofort der

Korollar. $T(A)$ ist diskret und also abgeschlossen in A. Denn die S-Topologie der primären Torsionsgruppe $T(A)$ ist nach Satz 8 diskret, da die Nullgruppe charakteristische Untergruppe ist.

Die Bedeutung der primären S-Topologien liegt nun wesentlich in der Gültigkeit von

Satz 10. Besitzt die S-topologische Gruppe A den Ring $\mathfrak{R}_p$ der ganz-p-adischen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich, so ist eine Untergruppe $B \subseteq A$ dann und nur dann abgeschlossen in A, wenn sie $\mathfrak{R}_p$-zulässig ist[23].

Beweis. Ist B abgeschlossen, dann $\mathfrak{R}_p$-zulässig, wie schon oben festgestellt wurde. Sei B $\mathfrak{R}_p$-zulässig. Dann besitzt mit A auch die Restklassen-

[23]) Im nichtprimären Fall gilt der Satz im allgemeinen nicht, wie das Beispiel der Additionsgruppe $\mathfrak{R}^+$ der ganzen n-adischen Zahlen zeigt: Sind die $\mathfrak{R}_p^+$ die primären Komponenten von $\mathfrak{R}^+$, so ist die gewöhnliche Summe $\sum \oplus \mathfrak{R}_p^+$ sicher nicht abgeschlossen in $\mathfrak{R}^+$.

gruppe $\bar{A} = A/B$ den Operatorenbereich $\mathfrak{R}_p$ (im gewöhnlichen Sinne). Mit Hilfe des Wohlordnungssatzes zeigt man leicht, daß es zu jedem $\bar{a} \neq \bar{0}$ aus $\bar{A}$ eine größte $\mathfrak{R}_p$-zulässige Untergruppe $\bar{A}_\alpha < \bar{A}$ mit $\bar{a} \notin \bar{A}_\alpha$ gibt. In der Restklassengruppe $\bar{A}/\bar{A}_\alpha$ muß dann jede (zulässige) Untergruppe die zu $\bar{a} \in \bar{A}$ gehörige Restklasse $\bar{\bar{a}}$ aus $\bar{A}/\bar{A}_\alpha$ enthalten und hieraus folgt in bekannter Weise, daß alle Elemente von $\bar{A}$ von endlicher Ordnung mod $\bar{A}_\alpha$ sind. Ist A_α das vollständige Urbild von $\bar{A}_\alpha$ in A, so ergibt sich: Zu jedem $a \in A$ mit $a \notin B$ gibt es eine $\mathfrak{R}_p$-zulässige Untergruppe $A_\alpha \leqq A$ mit $a \notin A_\alpha$ und so, daß jedes Element von A von endlicher Ordnung mod A_α ist. Aus ersterem folgt, daß der Durchschnitt aller dieser A_α gleich B sein muß und wegen der letzteren Eigenschaft sind die A_α, also auch $B = \bigcap A_\alpha$ abgeschlossen in A w. z. z. w.

Korollar. Ist A eine S-topologische Gruppe mit $\mathfrak{R}_p$ als natürlichem Operatorenbereich, so ist A darstellbar als (topologische) Restklassengruppe einer (gewöhnlichen) direkten Summe $G = \sum \oplus Z_\alpha$ von Gruppen Z_α, die zur Additionsgruppe $\mathfrak{R}_p^+$ topologisch isomorph sind, genommen mit der zum natürlichen Operatorenbereich $\mathfrak{R}_p$ gehörigen S-Topologie, nach einer $\mathfrak{R}_p$-zulässigen (und daher nach Satz 10 abgeschlossenen) Untergruppe $G' \leqq G$.

Denn die Darstellung $A = G/G'$ ist, wenn man G, G', A als gewöhnliche Operatorgruppen auffaßt, bekannt. Daß dabei die S-Topologie von A als Restklassengruppentopologie richtig herauskommt, folgt wegen der Abgeschlossenheit von G' sofort aus Satz 8.

8. Sei A wieder eine zyklovollständige torsionstopologische Gruppe. Unter „Untergruppen" sollen in dieser Nummer stets abgeschlossene Untergruppen von A verstanden sein.

Eine Gruppe $E \leqq A$ heißt einrangig, wenn für zwei Untergruppen E_1 und E_2 aus E stets entweder $E_1 \leqq E_2$ oder $E_2 \leqq E_1$ gilt. Eine einrangige Gruppe ist stets primär. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}_p^*$ bzw. $\mathfrak{R}_p^+$ wieder die Additionsgruppe der p-adischen bzw. der ganzen-p-adischen Zahlen, so sind genau die Gruppen einrangig, die zu $\mathfrak{R}_p^*$, $\mathfrak{R}_p^+$ oder der Restklassengruppe $\mathfrak{R}_p^*/\mathfrak{R}_p^+$ oder schließlich zu einer gewöhnlichen endlichen zyklischen primären Gruppe isomorph sind[24]). — Eine Gruppe heißt vom Rang $\varkappa$ ($\varkappa$ beliebige Kardinalzahl), wenn sie sich als abgeschlossene Hülle der gewöhnlichen Vereinigungsgruppe von $\varkappa$, aber nicht weniger, einrangigen Gruppen darstellen läßt. — Eine endlichrangige primäre Gruppe ist, wie wohlbekannt, im wesentlichen einfach eine gewöhnliche p-adische Operatorgruppe und ihre (zu $\mathfrak{R}_p$ gehörige) Topologienklasse besteht aus einer einzigen Topologie, die also mit der S-Topologie identisch ist. — Gruppen, die nur Elemente von endlicher (bzw. unendlicher) Ordnung enthalten, bezeichnen wir wie üblich als Torsionsgruppen (bzw. als torsionsfrei). — Eine Untergruppe $B \leqq A$ heißt eine „große Untergruppe"[25]), wenn A/B eine endlichrangige Torsionsgruppe ist. Die Vereinigungsgruppe beliebig vieler und der Durchschnitt endlich vieler großer Untergruppen ist eine große

[24]) Prüfer, H.: Theorie der Abelschen Gruppen. II. Math. Z. **22**, 222—249 (1925).

[25]) Siehe Prüfer, H.: Theorie der Abelschen Gruppen. I. Math. Z. **20**, 165—187 (1924).

Untergruppe. Ist $B=\bigcap A_\beta$ eine große Untergruppe (A_β Untergruppen), so gibt es bereits endlich viele A_β, deren Durchschnitt gleich B ist. Ist C irgendeine Untergruppe von A, $a\notin C$ ($a\in A$), so gibt es eine große Untergruppe $B<A$ mit $C\leqq B$ und $a\notin B$[26]).

9. Sei nun A eine (nicht notwendig primäre) torsionstopologische Gruppe (s. Satz 2). Wir fragen nach den gröbsten Topologien von A und bemerken zunächst:

Satz 12. Ist τ^* eine (absolut) gröbste Topologie[27]) von A, $\mathfrak{S}^*$ der zugehörige charakteristische Filter, so besteht $\mathfrak{S}^*$ aus großen Untergruppen von A.

Beweis. Sei $a\in A$, A_α eine charakteristische Untergruppe von A mit $a\notin A_\alpha$. Dann gibt es eine große Untergruppe $B_a\geqq A_\alpha$ mit $a\notin B_a$. Wegen $B_a\geqq A_\alpha$ ist B_a eine charakteristische Untergruppe von A. Lassen wir nun a alle Elemente $\neq 0$ von A durchlaufen, so gilt für die zugehörigen B_a: $\bigcap B_a=0$ und die B_a erzeugen offenbar einen aus großen Untergruppen bestehenden Teilfilter von $\mathfrak{S}^*$, der eine gröbere Topologie von A definieren würde, wenn er von $\mathfrak{S}^*$ verschieden wäre.

Definition. Die Topologie τ^* von A heiße eine „*totalgröbste*", wenn für jede Restklassengruppe $\bar{A}$ von A nach einer abgeschlossenen Untergruppe die durch τ^* in $\bar{A}$ induzierte Topologie $\bar{\tau}^*$ eine (absolut) gröbste Topologie von $\bar{A}$ ist. —

Wie früher bemerkt, sind die abgeschlossenen Untergruppen B von $\mathfrak{N}$ genau diejenigen, die sich als Durchschnitt von charakteristischen Untergruppen A_α darstellen lassen. Die Gesamtheit der B umfassenden charakteristischen Untergruppen von A bildet einen Teilfilter des charakteristischen Filters $\mathfrak{S}$ von A und man sieht leicht:

Die Topologie τ^* von A mit dem charakteristischen Filter $\mathfrak{S}^*$ ist genau dann eine totalgröbste, wenn verschiedene Teilfilter von $\mathfrak{S}^*$ stets verschiedene Durchschnitte haben.

Denn ist $B=\bigcap A_\alpha$ eine abgeschlossene Untergruppe von A, wo die A_{α_B} alle B umfassenden charakteristischen Untergruppen von A durchlaufen und also einen Filter $\mathfrak{S}_B$ bilden und ist $\bar{A}=A/B$, so besteht der charakteristische Filter $\bar{\mathfrak{S}}_B$ von $\bar{A}$ aus den Bildern $\bar{A}_{\alpha_B}$ der A_{α_B}. Gäbe es einen echten Teilfilter $\bar{\mathfrak{S}}'_B$ von $\bar{\mathfrak{S}}_B$, dessen Durchschnitt $\bar{0}$ ist, der also eine gröbere Topologie von $\bar{A}$ definiert als $\bar{\mathfrak{S}}_B$ und ist $\mathfrak{S}'_B$ der aus den vollständigen Urbildern der Gruppen aus $\bar{\mathfrak{S}}'_B$ bestehende Filter in A, so wäre $\mathfrak{S}'_B<\mathfrak{S}_B$ und hätte den gleichen Durchschnitt B. Entsprechend umgekehrt.

Definition. Die Gruppe A heißt „*totalvollständig*", wenn jede Restklassengruppe $\bar{A}$ von A nach einer abgeschlossenen Untergruppe hinsichtlich der durch die Topologie von A in $\bar{A}$ induzierten Topologie vollständig ist.

[26]) Siehe PIETRKOWSKI, St.: [19]), Satz 5.

[27]) Wir unterscheiden „absolut gröbste" Topologie und „gröbste Topologie einer Topologienklasse T". Wie später bemerkt wird, fallen im primären Falle beide Begriffe zusammen.

Die Eigenschaft der Totalvollständigkeit von A ist gleichwertig zu der folgenden:

Ist B irgendeine abgeschlossene Untergruppe von A, $\mathfrak{S}_B$ der Filter aller charakteristischen Untergruppen $A_{\alpha_\beta} \geq B$ von A, so besitzt jeder aus Nebenscharen der A_{α_β} bestehende Filter $\mathfrak{U}_B$ einen nicht leeren Durchschnitt.

Denn der Bildfilter $\overline{\mathfrak{S}}_B$ von $\mathfrak{S}_B$ in $\bar{A} = A/B$ ist genau der charakteristische Filter von $\bar{A}$. Ist A totalvollständig, also $\bar{A}$ vollständig, so besitzt jeder aus Restklassen von $\overline{\mathfrak{S}}_B$ bestehende CAUCHY-Filter $\overline{\mathfrak{U}}_B$ in $\bar{A}$ einen nicht leeren Durchschnitt und also auch der vollständige Urbildfilter $\mathfrak{U}_B$ von $\overline{\mathfrak{U}}_B$ in A. Entsprechend umgekehrt. Hieraus folgt *nicht*, daß in einer totalvollständigen Gruppe A jeder aus Nebenscharen der charakteristischen Untergruppen bestehende Filter einen nicht leeren Durchschnitt hat, denn ist z.B. $\mathfrak{S}'$ ein Teilfilter des charakteristischen Filters $\mathfrak{S}$ von A mit dem Durchschnitt (0), so lassen sich die obigen Schlüsse auf einen aus Nebenscharen nach den zu $\mathfrak{S}'$ gehörenden Gruppen bestehenden Filter nicht anwenden. Indessen gilt:

Ist die Topologie der totalvollständigen Gruppe A eine totalgröbste, so besitzt jeder aus Nebenscharen irgendwelcher charakteristischen Untergruppen $A_{\alpha'}$ bestehende Filter $\mathfrak{U}'$ einen nicht leeren Durchschnitt.

Dies folgt unmittelbar daraus, daß die $A_{\alpha'}$ hier den *vollständigen* $B' = \bigcap A_{\alpha'}$ umfassenden Filter bilden.

Schließlich bemerken wir noch:

Ist $\mathfrak{U}$ irgendein aus Mengen U_α bestehender Filter, so sagen wir, *der Filter $\mathfrak{U}'$ entstehe aus $\mathfrak{U}$ durch Verfeinerung*, wenn $\mathfrak{U}'$ erzeugt wird von den Mengen $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ und gewissen (nicht leeren und nicht endlichen) Durchschnitten $\bigcap U_{\alpha_\varrho}$ ($U_{\alpha_\varrho} \in \mathfrak{U}$). $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}'$ haben dann ersichtlich den gleichen Durchschnitt. Ist nun ein System von abgeschlossenen Untergruppen B_β der Gruppe A und ein aus Nebenscharen U'_β der B_β bestehender Filter $\mathfrak{U}'$ gegeben, so gibt es einen aus Nebenscharen gewisser charakteristischer Untergruppen A_{α_ϱ} bestehenden Filter $\mathfrak{U}$, so daß $\mathfrak{U}'$ aus $\mathfrak{U}$ durch Verfeinerung hervorgeht. Denn man braucht für $\mathfrak{U}$ nur die Menge aller mindestens ein U'_β umfassenden Nebenscharen der charakteristischen Untergruppen zu wählen.

Satz 13. *A sei eine Gruppe mit der Topologie τ^*. A ist dann und nur dann totalvollständig und die Topologie τ^* eine totalgröbste, wenn A linear kompakt ist.*

Beweis. Das „nur dann" folgt unmittelbar aus den vorangegangenen Bemerkungen. Sei nun A linear kompakt mit der Topologie τ^*, A^*_α eine charakteristische Untergruppe von A. Die Restklassengruppe $\bar{A} = A/A^*_\alpha$ ist dann diskret und linear kompakt. Ist $\bar{a} \in \bar{A}$, so ist die von $\bar{a}$ erzeugte gewöhnliche zyklische Gruppe $\langle \bar{a} \rangle$ abgeschlossen in $\bar{A}$ und also auch linear kompakt. Wäre aber $\langle \bar{a} \rangle$ von unendlicher Ordnung, so hätte sicherlich nicht jeder aus Restklassen nach den Untergruppen von endlichem Index in $\langle \bar{a} \rangle$ bestehende Filter einen nicht leeren Durchschnitt — Widerspruch. Mithin ist $\bar{A}$ eine Torsionsgruppe. Angenommen, $\bar{A}$ wäre von unendlichem Range. Dann gäbe es eine

Untergruppe $\bar{A}_1 \subseteq \bar{A}$, die direkte Summe von unendlich vielen zyklischen Gruppen $(\bar{a}_\alpha)$ wäre: $\bar{A}_1 = \sum \oplus (\bar{a}_\alpha)$. Jedes Element $\bar{a} \in \bar{A}_1$ ist dann als endliche Summe $\sum n_\alpha \bar{a}_\alpha$ darstellbar, wo die n_α modulo der Ordnung von $\bar{a}_\alpha$ eindeutig bestimmt sind. Für irgendein festes α_0 wähle man $n_{\alpha_0} \not\equiv 0$ (mod der Ordnung von $\bar{a}_{\alpha_0}$) und bilde die Menge U_{α_0} aller Elemente der Form $n_{\alpha_0} \cdot \bar{a}_{\alpha_0} + \sum_{\alpha' \neq \alpha_0} n_{\alpha'} \cdot \bar{a}_{\alpha'}$. U_{α_0} ist eine Restklasse aus $\bar{A}_1$. Bildet man so das System aller U_{α_0}, indem man α_0 alle α durchlaufen läßt, so haben je endlich viele U_{α_0} einen nicht leeren Durchschnitt und die U_{α_0} erzeugen einen Filter $\mathfrak{U}$ in $\bar{A}_1$. Aber kein $\bar{a} = \sum n_\alpha \bar{a}_\alpha \in \bar{A}_1$ (endliche Summe!) kann in allen U_{α_0} liegen und der Durchschnitt von $\mathfrak{U}$ ist leer. $\bar{A}_1$ und damit $\bar{A}$ wäre also nicht linear kompakt — Widerspruch. $\bar{A}$ ist also eine endlichrangige Torsionsgruppe und der charakteristische Filter von A besteht aus großen Untergruppen. — Sei nun $\tau < \tau^*$ eine gröbere Topologie von A als τ^*, $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{S}^*$ die charakteristischen Filter von A bezüglich τ bzw. τ^*, $A_\alpha^* \in \mathfrak{S}^*$. Der charakteristische Filter $\mathfrak{S}_\alpha$ der von τ in A_α^* induzierten Relativtopologie besteht aus den Gruppen $A_\beta \cap A_\alpha^*$ $(A_\beta \in \mathfrak{S})$. Sei $\mathfrak{U}_\alpha$ ein aus Nebenscharen der $A_\beta \cap A_\alpha^*$ bestehender CAUCHY-Filter in A_α^* bezüglich der durch τ induzierten Topologie. Die in $\mathfrak{U}_\alpha$ liegenden Scharen sind aber hinsichtlich der Topologie τ^* abgeschlossen und wegen der linearen Kompaktheit besitzt $\mathfrak{U}_\alpha$ einen nicht leeren Durchschnitt. Daher ist A_α^* auch bezüglich τ abgeschlossen und also Durchschnitt von charakteristischen τ-Untergruppen A_β. Da aber A_α^* eine große Untergruppe ist, ist A_α^* bereits Durchschnitt endlich vieler A_β, d.h. A_α^* ist eine charakteristische τ-Untergruppe. Hieraus folgt $\mathfrak{S}^* \subseteq \mathfrak{S}$, also $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{S}$, $\tau^* = \tau$ und τ^* ist eine gröbste Topologie. Da mit A auch jede Restklassengruppe linear kompakt ist, ist τ^* sogar eine totalgröbste Topologie. Daß die linear kompakte Gruppe A totalvollständig ist, ist unmittelbar klar. Damit ist alles bewiesen.

10. Wir wenden uns nun wieder den zyklovollständigen primären Gruppen, d.h. also den Gruppen mit dem Ring $\mathfrak{R}_p$ der ganz-p-adischen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich zu und bemerken zunächst:

Ist T die durch den natürlichen Operatorenbereich von A festgelegte Topologienklasse, $\tau_1 \in T$, so gehört auch jede gröbere Topologie τ_2 von A zu T. Ist τ^* also eine gröbste Topologie von T, so ist τ^* sogar eine absolut gröbste Topologie.

Ist nämlich $\mathfrak{S}_1$ bzw. $\mathfrak{S}_2$ der charakteristische Filter von A bezüglich der Topologie τ_1 bzw. τ_2, $\tau_1 \in T$ und ist τ_2 gröber als τ_1, also $\mathfrak{S}_2$ ein Teilfilter von $\mathfrak{S}_1$ mit der Eigenschaft, daß der Durchschnitt der zu $\mathfrak{S}_2$ gehörigen Gruppen die Nullgruppe ist, dann induziert τ_2 in jeder abgeschlossenen zyklischen Gruppe (a) die gleiche Topologie wie τ_1, also $\tau_2 \sim \tau_1$ und $\tau_2 \in T$.

Satz 14. *A habe den ganz-p-adischen Zahlenring $\mathfrak{R}_p$ als natürlichen Operatorenbereich und einen aus großen Untergruppen bestehenden charakteristischen Filter. Dann gibt es eine zu A topologisch isomorphe Untergruppe A' der Gruppe $W = \sum^T \oplus Z_\alpha$, wo die (in geeigneter Anzahl zu wählenden) Gruppen Z_α zur (diskreten) Restklassengruppe $\mathfrak{R}_p^+/\mathfrak{R}_p^*$ isomorph sind.*

Beweis. Sei $Z = \mathfrak{R}_p^+/\mathfrak{R}_p^+$. $\{f_\alpha\}$ sei die Menge aller topologischen (Operator-) Homomorphismen von A in Z. Zu jedem α bilden wir die zu Z isomorphe Gruppe Z_α und daraus die direkte TYCHONOFF-Summe $W = \sum^T \oplus Z_\alpha$. Ordnen wir jedem $a \in A$ das Element $a' = \sum_\alpha f_\alpha(a) \in W$ zu, so ist die erhaltene Abbildung φ zunächst ein gewöhnlicher (Operator-) Homomorphismus von A in W. Denn aus $a_1' = \sum f_\alpha(a_1) = \varphi(a_1)$, $a_2' = \sum f_\alpha(a_2) = \varphi(a_2)$ folgt

$$\varphi(a_1 + a_2) = \sum f_\alpha(a_1 + a_2) = \sum f_\alpha(a_1) + \sum f_\alpha(a_2)$$
$$= \varphi(a_1) + \varphi(a_2)$$

und entsprechend bei der Operatormultiplikation. — φ ist sogar ein gewöhnlicher Isomorphismus von A auf die Bildgruppe $A' \subseteq W$. Denn zu jedem f_α gehört als Kern eine charakteristische Untergruppe P_α mit einrangiger Restklassengruppe A/P_α und umgekehrt bestimmt jede derartige charakteristische Untergruppe P_α mindestens einen Homomorphismus von A in Z mit P_α als Kern. Da sich aber offenbar jede charakteristische Untergruppe von A als Durchschnitt von endlich vielen P_α darstellen läßt, folgt $\bigcap P_\alpha = 0$. Ist also $\varphi(a) = 0$, also $f_\alpha(a) = 0$ für jedes α, so folgt $a \in \bigcap P_\alpha = 0$ und hieraus die Isomorphie. — φ ist umkehrbar stetig. Denn sei W_α die Menge aller Elemente $\sum_{\beta \neq \alpha} a_\beta$ mit $a_\beta \in Z_\beta$ von W. Die W_α bilden dann ein Erzeugendensystem des charakteristischen Filters von W und die $A_\alpha' = A' \cap W_\alpha$ erzeugen den charakteristischen Filter von $A' \subseteq W$. Das Urbild von W_α bzw. A_α' in A vermöge φ ist aber dann gerade P_α, also offen in A und umgekehrt sind die Bilder A_α' der P_α offen in A'. Da die P_α bzw. A_α' ein Erzeugendensystem des charakteristischen Filters von A bzw. A' bilden, folgt die Behauptung.

Eine vollständige Gruppe, deren charakteristischer Filter aus großen Untergruppen besteht wollen wir eine „*K-topologische Gruppe*" nennen[28]).

Dann folgt aus Satz 14 und 13:

Satz 15. *A* sei eine primäre Gruppe. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) *A* ist *K*-topologisch.

(b) *A* ist linear kompakt.

(c) *A* ist totalvollständig und ihre Topologie eine totalgröbste[29]).

Beweis. Aus (a) folgt (b): Da die Eigenschaft der Vollständigkeit bei topologischer Isomorphie erhalten bleibt, ist *A* auf Grund der Voraussetzung (a) nach Satz 14 einer abgeschlossenen Untergruppe der linear kompakten Gruppe *W* topologisch isomorph und da auch lineare Kompaktheit gegenüber topologischer Isomorphie invariant ist, folgt (b). (c) folgt aus (b) nach Satz 13 und (a) ist nach Satz 12 eine Folge von (c).

[28]) Die abzählbar-rangigen *K*-topologischen Gruppen sind identisch mit den von KRULL [1a]) eingehend untersuchten „abgeschlossenen separabeln Gruppen".

[29]) Vgl. KRULL [1a]) Satz 2. Unser Satz 15 beantwortet die dort (Anm. 21) aufgeworfene Frage.

Bonn, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 15. August 1953.)

CARLITZ, L.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 474—483 (1954)

Congruence properties of the polynomials of Hermite, Laguerre and Legendre.

By
LEONARD CARLITZ.

1. *Introduction.* Congruence properties of the classical orthogonal polynomials have not received much attention. The congruence of Schur:

$$P_m \equiv P_{a_0} P_{a_1}^{p} \dots P_{a_r}^{p^r} \pmod{p}, \tag{1.1}$$

where p is an odd prime,

$$m = a_0 + a_1 p + \cdots + a_r p^r \qquad (0 \le a_i < p),$$

and $P_m = P_m(x)$ denotes the Legendre polynomial of degree m, may be cited. For a proof of (1.1) see [5, Theorem 6.1].

In the present paper we show first that for the Hermite polynomial $H_n(x)$ we have

$$H_{n+m}(x) = (2x)^m H_n(x) \pmod{m}, \tag{1.2}$$

where m is an arbitrary integer. Moreover if we put

$$\Delta^r H_n(x) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} H_{n+sm}(x) H_{(r-s)m}, \tag{1.3}$$

then we have

$$\Delta^{2r} H_n(x) \equiv \Delta^{2r-1} H_n(x) \equiv 0 \pmod{m^r} \tag{1.4}$$

for all $r \ge 1$. In the next place if $L_n^{(\alpha)}(x)$ denotes the Laguerre polynomial of degree n, we put $\Lambda_n^{(\alpha)}(x) = n!\, L_n^{(\alpha)}(x)$ and show that

$$\Lambda_{n+m}^{(\alpha)}(x) \equiv \Lambda_m^{(\alpha)}(x)\, \Lambda_n^{(\alpha)}(x) \pmod{m}, \tag{1.5}$$

where the parameter α is an indeterminate or a rational number that is integral (mod m). Indeed in the latter case we have the more explicit result

$$\Lambda_{n+m}^{(\alpha)}(x) \equiv (-x)^m \Lambda_n^{(\alpha)}(x) \pmod{m}. \tag{1.6}$$

Corresponding to (1.3) we put

$$\Delta^r \Lambda_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} \Lambda_{n+sm}^{(\alpha)}(x)\, \Lambda_{(r-s)m}^{(\alpha)}(x) \tag{1.7}$$

and show that

$$\Delta^{2r} \Lambda_n^{(\alpha)}(x) \equiv \Delta^{2r-1} \Lambda_n^{(\alpha)}(x) \equiv 0 \pmod{m^r} \tag{1.8}$$

for all $r \ge 1$.

These results for the Hermite and Laguerre polynomials are proved in a uniform manner by means of a theorem on difference equations of the second order (see § 2 below).

The situation for Legendre polynomials seems somewhat less favorable. We show that

$$n!\, P_{n+m}(x) \equiv n!\, P_n(x)\, P_m(x) \pmod{m}, \tag{1.9}$$

$$n!\, P_{m-n-1}(x) \equiv n!\, P_n(x)\, P_{m-1}(x) \pmod{m} \quad (m > n), \tag{1.10}$$

where m is an arbitrary odd integer. However no result of the form (1.4) or (1.8) is obtained. Indeed it is easy to show for example that

$$P_{2p}(x) - P_p^2(x) \not\equiv 0 \pmod{p},$$

where p is an arbitrary odd prime.

For congruences like (1.9) and (1.10) for the ultraspherical polynomials see § 6.

It may be of interest to remark that the formulas (1.4) and (1.8) are similar to congruences satisfied by g_n, the number of n-gons formed by n lines [1]; the number g_n also satisfies [3]

$$g_{n+1} = n\, g_n + \tfrac{1}{2} n(n-1)\, g_{n-2} \qquad (g_1 = g_2 = 0,\ g_3 = 1).$$

Throughout the paper the symbol x is an indeterminate or a rational number that is integral (mod m).

2. *Difference equations of the second order.* Consider the recurrence

$$u_{n+1} = f(n)\, u_n + g(n)\, u_{n-1}, \tag{2.1}$$

where $f(n)$ and $g(n)$ are polynomials in n with integral coefficients; moreover we assume that

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = f(0), \qquad g(0) = 0. \tag{2.2}$$

Clearly u_n is uniquely determined by (2.1) and (2.2).

Now for $m \geq 1$, we have first

$$u_{m+1} \equiv f(m)\, u_m + g(m)\, u_{m-1} \equiv f(0)\, u_m \equiv u_1\, u_m \pmod{m}.$$

Next it is clear that

$$\begin{aligned} u_{m+2} &= f(m+1)\, u_{m+1} + g(m+1)\, u_m \equiv f(1)\, u_{m+1} + g(1)\, u_m \\ &\equiv \big(f(1)\, u_1 + g(1)\big)\, u_m \equiv u_2\, u_m \pmod{m}. \end{aligned}$$

We now prove that generally

$$u_{n+m} \equiv u_n\, u_m \pmod{m} \tag{2.3}$$

for $n \geq 0$. Since (2.3) is true for $n = 0, 1, 2$ we assume that it holds for the value n. Then using (2.1) we get

$$\begin{aligned} u_{n+m+1} &= f(n+m)\, u_{n+m} + g(n+m)\, u_{n+m-1} \\ &\equiv f(n)\, u_{n+m} + g(n)\, u_{n+m-1} \\ &\equiv \big(f(n)\, u_n + g(n)\, u_{n-1}\big)\, u_m \\ &\equiv u_{n+1}\, u_m \qquad (\mathrm{mod}\ m), \end{aligned}$$

thus completing the induction.

If we next define

$$\Delta^r u_n = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} u_{n+sm}\, u_{(r-s)m}, \tag{2.4}$$

where m is fixed, then (2.1) and (2.4) yield

$$\begin{cases} \Delta^r u_{n+1} = \displaystyle\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} u_{(r-s)m} \{f(n+sm)\, u_{n+sm} + g(n+sm)\, u_{n+sm-1}\} \\ \qquad = \displaystyle\sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \Delta^s u_{n+(r-s)m}\, \delta^{r-s} f(n) + \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \Delta^s u_{n+(r-s)m-1}\, \delta^{r-s} g(n), \end{cases} \tag{2.5}$$

where $\delta^r f(n)$ and $\delta^r g(n)$ are defined by

$$\delta^r h(n) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} h(n+sm). \tag{2.6}$$

We now prove that

$$\Delta^{2r} u_n \equiv 0 \equiv \Delta^{2r-1} u_n \qquad (\mathrm{mod}\ m^r) \tag{2.7}$$

for all $r \geq 1$. For $r = 1$, the second half of (2.7) is identical with (2.3). As for the first half of (2.7), we have

$$\begin{aligned} \Delta^2 u_n &= u_{n+2m} - 2u_{n+m}\, u_m + u_n\, u_{2m} \\ &\equiv 2u_n (u_{2m} - u_m^2) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ m). \end{aligned}$$

Thus it is clear that (2.7) holds for $r = 1$. We now assume that (2.7) holds up to and including the value $r-1$. Then since it follows from (2.6) that

$$\delta^r f(n) \equiv \delta^r g(n) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ m^r), \tag{2.8}$$

it is seen that (2.5) implies

$$\Delta^{2r-1} u_{n+1} \equiv f(n)\, \Delta^{2r-1} u_n + g(n)\, \Delta^{2r-1} u_{n-1} \qquad (\mathrm{mod}\ m^r). \tag{2.9}$$

It therefore suffices to examine $\Delta^{2r-1} u_0$ and $\Delta^{2r-1} u_1$. But by (2.4)

$$\Delta^{2r-1} u_0 = \sum_{s=0}^{2r-1} (-1)^{s-1} \binom{2r-1}{s} u_{sm}\, u_{(2r-1-s)m} = 0$$

and in particular

$$\Delta^{2r-1} u_0 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ m^r). \tag{2.10}$$

Secondly as in the proof of (2.5),

$$\Delta^{2r-1}u_1 = \sum_{s=0}^{2r-1}\binom{2r-1}{s}\Delta^s u_{(2r-1-s)m}\,\delta^{2r-1-s}f(0) + \\ + \sum_{s=0}^{2r-2}\binom{2r-1}{s}\Delta^s u_{(2r-1-s)m-1}\,\delta^{2r-1-s}g(0),$$

and therefore

$$\Delta^{2r-1}u_1 \equiv 0 \pmod{m^r} \tag{2.11}$$

by (2.8), (2.10) and the inductive hypothesis. Combining (2.10) and (2.11) with (2.9) we get

$$\Delta^{2r-1}u_n \equiv 0 \pmod{m^r} \tag{2.12}$$

for all $n \geq 0$.

The proof of

$$\Delta^{2r}u_n \equiv 0 \pmod{m^r} \tag{2.13}$$

is similar to that of (2.12). To begin with

$$\Delta^2 u_n = u_{n+2m} - u_{n+m}u_m + u_n u_{2m} \equiv 0 \pmod{m}$$

in view of (2.3). Thus (2.13) holds for $r=1$. Assuming the truth of (2.13) up to and including the value $r-1$, we get by means of (2.5) and (2.8)

$$\Delta^{2r}u_{n+1} \equiv f(n)\,\Delta^{2r}u_n + g(n)\,\Delta^{2r}u_{n-1} \pmod{m^r}. \tag{2.14}$$

In the next place it is easily proved using (2.4) that $\Delta^{2r}u_0 = 2\Delta^{2r-1}u_m$, so that

$$\Delta^{2r}u_0 \equiv 0 \pmod{m^r}. \tag{2.15}$$

We then prove

$$\Delta^{2r}u_1 \equiv 0 \pmod{m^r} \tag{2.16}$$

exactly as in the proof of (2.11). Clearly (2.14), (2.15) and (2.16) imply (2.13).

We may state

Theorem 1. *Let $f(n)$, $g(n)$ denote polynomials in n with coefficients that are integral* (mod m), *where m is a fixed integer. Define u_n by means of* (2.1) *and* (2.2). *Then u_n satisfies*

$$\Delta^{2r}u_n \equiv \Delta^{2r-1}u_n \equiv 0 \pmod{m^r} \tag{2.17}$$

for all $n \geq 0$, $r \geq 1$, where $\Delta^r u_n$ is defined by (2.4).

We remark that (2.17) holds if $f(n)$, $g(n)$ contain additional indeterminates.

3. *The Hermite polynomials.* The Hermite polynomial [4, p. 102]

$$H_n(x) = \sum_{2s \leq n}(-1)^s (2x)^{n-2s}\frac{n!}{s!(n-2s)!} \tag{3.1}$$

satisfies the recurrence

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x) \qquad (n \geq 1), \tag{3.2}$$

$H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$. Comparing (3.2) with (2.1) and (2.2) it is clear that Theorem 1 applies. However the result for $\Delta H_n(x)$ can be made more explicit. Indeed if we write (3.1) in the form

$$H_n(x) = \sum_{2s \leq n} (-1)^s (2x)^{n-2s} \binom{n-s}{s} (n)_s, \tag{3.3}$$

where $(n)_s = n(n-1)\dots(n-s+1)$, $(n)_0 = 1$, it is evident that

$$H_m(x) \equiv (2x)^m \pmod{m}. \tag{3.4}$$

We may state

Theorem 2. *The polynomial $H_n(x)$ satisfies*

$$H_{n+m}(x) \equiv (2x)^m H_n(x) \pmod{m} \tag{3.5}$$

for all $n \geq 0$; also for $r \geq 1$

$$\Delta^{2r} H_n(x) \equiv 0 \equiv \Delta^{2r-1} H_n(x) \pmod{m^r}, \tag{3.6}$$

where

$$\Delta^r H_n(x) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} H_{n+sm}(x) H_{(r-s)m}(x).$$

The congruence (3.5) is evidently equivalent to

$$\frac{(m+n)_{2s}}{s!} \equiv \frac{(n)_{2s}}{s!} \pmod{m}. \tag{3.5}'$$

It may be of interest to remark that the following formula of FELDHEIM [2]:

$$H_m(x) H_n(x) \equiv \sum_{r=0}^{\min(m,n)} \binom{n}{r} (m)_r 2^r H_{m+n-2r}(x) \tag{3.7}$$

implies

$$H_m(x) H_n(x) \equiv H_{m+n}(x) \pmod{m}. \tag{3.8}$$

In view of (3.4), (3.8) is equivalent to (3.5). We also note that for $m = p$, $n = kp$, (3.7) yields

$$H_p(x) H_{kp}(x) \equiv H_{(k+1)p}(x) - 2kp H_{(k-1)p}(x) \pmod{p^2}. \tag{3.9}$$

Somewhat more generally we may state

$$H_{hp}(x) H_{kp}(x) \equiv H_{(h+k)p}(x) - 2hkp H_{(h+k-2)p}(x) \pmod{p^2}. \tag{3.10}$$

Since (3.4) implies

$$H_{np}(x) \equiv (2x)^{np} \pmod{p},$$

it follows from (3.10) that

$$H_{hp}(x) H_{kp}(x) \equiv H_{(h+k)p}(x) - 2hkp(2x)^{(h+k-2)p} \pmod{p^2}. \tag{3.11}$$

4. *The Laguerre polynomials.* The general Laguerre polynomial [4, p. 97]

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-s} \frac{(-x)^s}{s!} \tag{4.1}$$

satisfies the recurrence

$$(n+1)\,L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (-x+2n+\alpha+1)\,L_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)\,L_{n-1}^{(\alpha)}(x) \quad (n \geq 1), \tag{4.2}$$

$L_0^{(\alpha)}(x) = 1$, $L_1^{(\alpha)}(x) = -x+\alpha+1$. If we define

$$\Lambda_n^{(\alpha)}(x) = n!\,L_n^{(\alpha)}(x), \tag{4.3}$$

then (4.2) becomes

$$\Lambda_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (-x+2n+\alpha+1)\,\Lambda_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)\,n\,\Lambda_{n-1}^{(\alpha)}(x). \tag{4.4}$$

We have also, using (4.1) the formulas

$$\begin{cases} \Lambda_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n+\alpha}{s} (n)_s (-x)^{n-s} \\ \qquad\quad = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} (n+\alpha)_s (-x)^{n-s}, \end{cases} \tag{4.5}$$

where as above $(n)_s = n(n-1)\ldots(n-s+1)$. It is clear from the latter expression that $\Lambda_n^{(\alpha)}(x)$ is a polynomial in α and x with integral coefficients. Hence in particular, if α is integral (mod m), then $\Lambda_n^{(\alpha)}(x)$ is a polynomial in x with coefficients that are integral (mod m). In the latter case it follows from the first half of (4.5) that

$$\Lambda_m^{(\alpha)}(x) \equiv (-x)^m \pmod{m}. \tag{4.6}$$

If we define $\Delta^r \Lambda_n^{(\alpha)}(x)$ by means of (1.7), we may apply Theorem 1 to get

Theorem 3. *The polynomial $\Lambda_n^{(\alpha)}(x)$ satisfies*

$$\Delta^{2r}\Lambda_n^{(\alpha)}(x) \equiv 0 \equiv \Delta^{2r-1}\Lambda_n^{(\alpha)}(x) \pmod{m} \tag{4.7}$$

for all $n \geq 0$ and $r \geq 1$, where the parameter α may either be an indeterminate or a rational number that is integral (mod m). *In particular when α is integral* (mod m) *then*

$$\Lambda_{n+m}^{(\alpha)}(x) \equiv (-x)^m \Lambda_n^{(\alpha)}(x) \pmod{m}. \tag{4.8}$$

The congruence (4.8) is equivalent to

$$\binom{m+n+\alpha}{s} (m+n)_s \equiv \binom{n+\alpha}{s} (n)_s \pmod{m}, \tag{4.8}'$$

which may be compared with (3.5)'.

A few special results may be mentioned. If $m \mid n+\alpha$ then it follows from (4.5) that

$$\Lambda_n^{(\alpha)}(x) \equiv (-x)^n \pmod{m}. \tag{4.9}$$

If $m=kp$, $\alpha=hp$, where p is a prime, then

$$\Lambda_{kp}^{(hp)}(x) \equiv (-x)^{kp} - k(h+k)p(-x)^{(k-1)p} \pmod{p^2}. \tag{4.10}$$

In particular the polynomial $\Lambda_n(x)=\Lambda_n^{(0)}(x)$ satisfies

$$\Lambda_{kp}(x) \equiv (-x)^{kp} - k^2 p(-x)^{(k-1)p} \pmod{p^2}, \tag{4.11}$$

which implies

$$\Lambda_{hp}(x)\Lambda_{kp}(x) \equiv \Lambda_{(h+k)p}(x) + 2hkp(-x)^{(h+k-1)p} \pmod{p^2}, \tag{4.12}$$

analogous to (3.11). Indeed (4.10) implies

$$\Lambda_{hp}^{(ip)}(x)\Lambda_{kp}^{(ip)}(x) \equiv \Lambda_{(h+k)p}^{(ip)}(x) + 2hkp(-x)^{(h+k-1)p} \pmod{p^2}. \tag{4.13}$$

5. *The Legendre polynomials.* The Legendre polynomial $P_n(x)$ satisfies the recurrence [4, p. 82]

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \quad (n \geq 1), \tag{5.1}$$

$P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$; also it is familiar [see (5.4)] that the coefficients of $2^n P_n(x)$ are integral. Comparing (5.1) with (2.1) it is clear that Theorem 1 is not immediately applicable. However the same method of proof may be applied. Thus (5.1) implies

$$P_{m+1}(x) \equiv xP_m(x), \quad 2P_{m+2}(x) \equiv 2P_2(x)P_m(x) \pmod{m}$$

and it is easy to prove that

$$n!\,P_{n+m}(x) \equiv n!\,P_n(x)P_m(x) \pmod{m} \quad (n \geq 0), \tag{5.2}$$

where m is odd. Indeed, assuming that (5.2) holds for the value n, we have

$$\begin{aligned}(n+1)!\,P_{n+m+1}(x) &\equiv n!(n+m+1)P_{n+m+1}(x)\\ &\equiv n!\{(2n+1)P_{n+m}(x) - nP_{n+m-1}\}\\ &\equiv n!\{(2n+1)P_n(x) - nP_{n-1}(x)\}P_m(x)\\ &\equiv (n+1)!\,P_{n+1}(x)P_m(x) \pmod{m}.\end{aligned}$$

On the other hand (5.1) also implies

$$P_{m-2}(x) \equiv xP_{m-1}(x), \quad 2P_{m-3}(x) \equiv 2P_2(x)P_{m-1}(x) \pmod{m}.$$

We shall now prove that

$$n!\,P_{m-n-1}(x) \equiv n!\,P_n(x)P_{m-1}(x) \pmod{m} \quad (m > n). \tag{5.3}$$

Since (5.3) is true for $n=1$ and 2, we assume it holds for the value n; then

$$\begin{aligned}(n+1)!\,P_{m-n-2}(x) &\equiv -n!(m-n-1)P_{m-n-2}(x)\\ &\equiv n!\{(m-n)P_{m-n}(x) - (2m-2n-1)xP_{m-n-1}(x)\}\\ &\equiv -n!\{nP_{n-1}(x) - (2n+1)xP_n(x)\}P_{m-1}(x)\\ &\equiv (n+1)!\,P_{n+1}(x)P_{m-1}(x) \pmod{m}.\end{aligned}$$

This completes the proof of (5.3).

We may state

Theorem 4. *The Legendre polynomial* $P_n(x)$ *satisfies* (5.2) *and* (5.3) *where* m *is odd.*

For $m=p$, (5.2) implies (p prime)

$$P_{n+p}(x) \equiv P_p(x)\,P_n(x) \equiv x^p P_n(x) \pmod p,$$

which is in agreement with (1.1). Note that Theorem 4 does not include an analog of (3.6) and (4.7).

We now consider in more detail the special case $m=p$, an odd prime. The formulas [3, p. 67]

$$P_n(x) = 2^{-n}\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}^2 (x-1)^s (x+1)^{n-s} \tag{5.4}$$

and [3, p. 80]

$$P_n(x) = F\left(-n, n+1; 1; \tfrac{1}{2}(1-x)\right), \tag{5.5}$$

where F denotes the hypergeometric function, will be required. In the first place it is evident from (5.4) that

$$P_p(x) \equiv 2^{-p}\{(x-1)^p + (x+1)^p\} \pmod{p^2}. \tag{5.6}$$

Also (5.5) implies

$$P_{p-1}(x) \equiv 1 + p\sum_{s=1}^{p-1}\frac{(-1)^s}{s}\left(\frac{x-1}{2}\right)^s \pmod{p^2}; \tag{5.7}$$

but since

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^p \equiv 1 + \left(\frac{x-1}{2}\right)^p + p\sum_{s=1}^{p-1}\frac{(-1)^{s-1}}{s}\left(\frac{x-1}{2}\right)^s \pmod{p^2},$$

(5.7) reduces to

$$P_{p-1}(x) \equiv 2 + \left(\frac{x-1}{2}\right)^p - \left(\frac{x+1}{2}\right)^p \pmod{p^2}. \tag{5.8}$$

The weaker results [5, Lemma 6.2]

$$P_{p-1}(x) \equiv 1, \quad P_{p-1-n}(x) \equiv P_n(x) \pmod p \quad (0 \le n \le p-1) \tag{5.9}$$

are implicit in (5.3). We may also write (5.8) in the form

$$P_{p-1}(x) \equiv 2 - 2^{1-p} + p\sum_{s=1}^{\frac{1}{2}(p-1)}\frac{1}{2s}x^{2s} \pmod{p^2}. \tag{5.10}$$

It is easy to show that (5.4) implies

$$P_{2p}(x) \equiv 2^{-2p}\left\{(x-1)^{2p} + \binom{2p}{p}^2 (x^2-1)^p + (x+1)^{2p}\right\} \pmod{p^2};$$

but since

$$\binom{2p}{p} = 2\binom{2p-1}{p-1} \equiv 2 \pmod{p^2},$$

it follows that

$$(5.11)\quad P_{2p}(x) \equiv 2^{-2p}\{(x-1)^{2p} + 4(x^2-1)^p + (x+1)^{2p}\} \pmod{p^2}.$$

Comparing (5.11) with (5.6) we get

$$(5.12)\quad P_{2p}(x) - P_p^2(x) \equiv 2^{1-2p}(x^2-1)^p \pmod{p^2}.$$

In particular then

$$(5.13)\quad P_{2p} - P_p^2(x) \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

In the next place we have from (5.4)

$$(5.14)\quad \begin{cases} P_{p+1}(x) \equiv 2^{-p-1}\{(x-1)^{p+1} + (2p+1)(x-1)^p(x+1) + \\ \qquad + (2p+1)(x-1)(x+1)^p + (x+1)^{p+1}\} \pmod{p^2} \end{cases}$$

and

$$(5.15)\quad \begin{cases} P_{2p+1}(x) \equiv 2^{-2p-1}\{(x-1)^{2p+1} + (x+1)^{2p+1} + \\ \qquad + (4p+1)\big((x-1)^{2p}(x+1) + (x-1)(x+1)^{2p}\big) + \\ \qquad + 4(2p+1)(x^2-1)^p(2x)\} \pmod{p^2}. \end{cases}$$

It follows that (5.6), (5.14) and (5.15) that

$$(5.16)\quad \begin{cases} P_{2p+1}(x) - P_p(x)P_{p+1}(x) \equiv 2^{-2p}\{p\big((x-1)^{2p}(x+1) + \\ \qquad + (x-1)(x+1)^{2p}\big) + 3(2p+1)x(x^2-1)^p\} \pmod{p^2}, \end{cases}$$

and in particular

$$(5.17)\quad P_{2p+1}(x) - P_p(x)P_{p+1} \equiv \tfrac{3}{4}x(x^2-1)^p \pmod{p}.$$

In view of (5.13) and (5.17) it does not seem possible to improve (5.2) even in the case $m = p$, $n \geq p$.

6. *Ultraspherical polynomials.* The ultraspherical polynomial $P_n^{(\lambda)}(x)$ may be defined by means of [4, p. 80]

$$(6.1)\quad (1 - 2xw + w^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x)\, w^n.$$

It is clear from (6.1) that if λ is integral (mod m) then the coefficients of $P_n^{(\lambda)}(x)$ are integral (mod m). Also we have the recurrence

$$(6.2)\quad (n+1)P_{n+1}^{(\lambda)}(x) = 2(n+\lambda)xP_n^{(\lambda)}(x) - (n+2\lambda-1)P_{n-1}^{(\lambda)}(x) \quad (n \geq 1),$$

$P_0^{(\lambda)}(x) = 1$, $P_1^{(\lambda)}(x) = 2\lambda x$. Put $\alpha = \lambda - \frac{1}{2}$ and assume that

$$(6.3)\quad \alpha \equiv 0 \pmod{m},$$

where m is odd. Then (6.2) reduces to

$$(6.4)\quad (n+1)P_{n+1}^{(\lambda)}(x) \equiv (2n+1)xP_n^{(\lambda)} - nP_{n-1}^{(\lambda)}(x) \pmod{m}.$$

Comparing (6.4) with (5.1) it is clear that the proof of Theorem 4 applies. We conclude that, if (6.3) holds, then

$$n!\,P^{(\lambda)}_{n+m}(x) \equiv n!\,P^{(\lambda)}_{n}(x)\,P^{(\lambda)}_{m}(x) \qquad (\mathrm{mod}\, m) \tag{6.5}$$

and

$$n!\,P^{(\lambda)}_{m-n-1}(x) \equiv n!\,P^{(\lambda)}_{n}(x)\,P^{(\lambda)}_{m-1}(x) \qquad (\mathrm{mod}\, m) \qquad (m > n). \tag{6.6}$$

Finally we note that the formula

$$P^{(\lambda)}_{n}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\,\frac{\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\,2^{-n}\sum_{s=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-s}\binom{n+\alpha}{s}(x-1)^{s}(x+1)^{n-s}$$

implies

$$P^{(\alpha p+\frac{1}{2})}_{np}(x) \equiv \{P^{(\alpha+\frac{1}{2})}_{n}(x)\}^{p} \qquad (\mathrm{mod}\, p). \tag{6.7}$$

References.

[1] Carlitz, L.: Congruences for the number of n-gons formed by n lines. Amer. Math. Monthly, to appear. — [2] Feldheim, E.: Quelques nouvelles relations pour les polynomes d Hermite. J. London Math. Soc. **13**, 22—29 (1938). — [3] Robinson, R.: A new absolute geometric constant? Amer. Math. Monthly **58**, 462—469 (1951). — [4] Szegö, G.: Orthogonal polynomials. Amer. Math. Soc., Colloquium Publ. New York **23** (1938). — [5] Wahab, J.: New cases of irreducibility for Legendre polynomials. Duke Math. J. **19**, 165—176 (1952).

Dept. of Math., Duke University, Durham N. C. (USA.).

(Eingegangen am 9. November 1953.).

RINGEL, G.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 484—495 (1954)

Lokal-reguläre Zerlegungen geschlossener orientierbarer Flächen.

Von
GERHARD RINGEL.

Auf jeder geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ mit positiver EULERscher Charakteristik gibt es höchstens endlich viele topologisch reguläre Polyeder. Man pflegt[1]) dies aus der Tatsache zu folgern, daß sogar nur endlich viele lokal-reguläre Polyeder auf $\mathfrak{F}$ möglich sind. Im folgenden soll versucht werden, alle lokal-regulären Zerlegungen einer geschlossenen Fläche aufzuzählen und zu konstruieren.

Es seien m, r, s natürliche Zahlen. Eine Zerlegung (Polyeder) einer geschlossenen Fläche heißt *lokal-regulär vom Typ* (m, r, s), wenn sie aus m Flächenstücken besteht, die lauter r-Ecke sind, wobei nur lauter s-kantige Eckpunkte auftreten. Einen Eckpunkt nennt man *s-kantig*, wenn er mit s Kanten inzidiert, wobei eine Kante mit zusammenfallenden Endpunkten doppelt zu zählen ist. Es wird zugelassen, daß zwei r-Ecke mehrmals aneinandergrenzen, oder auch, daß ein r-Eck zu sich selbst benachbart ist.

Die EULERsche Charakteristik $N = -\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2$ der durch ein lokal-reguläres Polyeder vom Typ (m, r, s) definierten geschlossenen Fläche ist

$$N = -\frac{m r}{s} + \frac{m r}{2} - m = \frac{m}{2s}(r s - 2r - 2s).$$

Da für jede geschlossene Fläche $N \geq -2$ gilt, ist für die Existenz eines lokal-regulären Polyeders vom Typ (m, r, s) notwendig, daß

(E) $\qquad \frac{m}{2s}(r s - 2r - 2s)$ ganzzahlig und ≥ -2

ist. Überdies ist

(G) $\qquad m r$ geradzahlig,

weil die Anzahl α_1 der Kanten in dem betreffenden Polyeder gleich $\frac{m r}{2}$ ist. Die Ganzzahligkeit der Eckenanzahl $\alpha_0 = \frac{m r}{s}$ folgt bereits aus (E) und (G), wie man leicht nachrechnet. Trotzdem sind die beiden Bedingungen (E) und (G) zusammen noch nicht hinreichend für die Existenz eines lokal-regulären Polyeders vom Typ (m, r, s). Als Gegenbeispiel sei ohne Beweis mitgeteilt, daß kein lokal-reguläres Polyeder vom Typ (2,9,3) existiert. Wenn man

[1]) HEESCH, H.: Über topologisch reguläre Teilungen geschlossener Flächen. Nachr. Göttingen **1932**, 268—273. — EFRÄMOVIČ, V. A.: Regelmäßige Vielflache. Dokl. Akad. Nauk SSSR., II. s. **57**, 223—226 (1947).

nämlich die 18 Kanten von zwei gegebenen Neunecken paarweise identifiziert, was nur auf endlich viele Arten möglich ist, so erhält man in keinem Falle lauter dreikantige Eckpunkte.

Hingegen scheinen bei Beschränkung auf orientierbare Flächen die beiden natürlichen Bedingungen (E) und (G) auch hinzureichen. Es sei hingewiesen auf die sehr allgemeine

Vermutung. *Auf der geschlossenen orientierbaren Fläche* $\mathfrak{F}_p$ *vom Geschlechte* p *existiert dann und nur dann ein lokal-reguläres Polyeder vom Typ* (m, r, s), *wenn die* EULERsche *Gleichung* $m(rs-2r-2s)=4s(p-1)$ *zutrifft und* mr *eine gerade Zahl ist.*

Mit Hilfe von verhältnismäßig einfachen kombinatorischen Konstruktionsmethoden gelingt es im folgenden, die obige Vermutung in den drei wichtigen Spezialfällen $p=2$, $s=3$ und $m=1$ zu beweisen. Somit ist ein Überblick gewonnen

a) über alle lokal-regulären Polyedertypen auf der orientierbaren Fläche vom Geschlechte $p=2$ (Satz 1, § 1),

b) über alle Typen orientierbarer lokal-regulärer Polyeder mit lauter dreikantigen Eckpunkten (Satz 5, § 2) und

c) über alle orientierbaren Monoedertypen (Satz 6, § 3).

Auf der Kugel ($p=0$) ist übrigens die Gültigkeit der genannten Vermutung bekannt. Sie liefert für $r \geq 3$ die 5 Platonischen Körper. — Mit Absicht werden in § 1 die Zerlegungen der speziellen Fläche $\mathfrak{F}_2$ ausführlich aufgezählt. Sie bilden nämlich die Grundlage für die Auffindung von Zerlegungen einer orientierbaren Fläche beliebigen Geschlechtes p. Die Fläche $\mathfrak{F}_p$ läßt sich ja als $(p-1)$-blättrige Überlagerungsfläche über $\mathfrak{F}_2$ repräsentieren. — An Stelle von „orientierbares lokal-reguläres Polyeder vom Typ (m, r, s)" schreiben wir kurz „o.r.P. (m, r, s)".

§ 1. Zerlegungen der Brezelfläche vom Geschlechte 2.

Satz 1. *Notwendig und hinreichend für die Existenz eines lokal-regulären Polyeders vom Typ* (m, r, s) *auf der Fläche* $\mathfrak{F}_2$ *ist die gleichzeitige Gültigkeit der beiden Bedingungen* (E) *und* (G).

(E) $$m(rs-2r-2s)=4s,$$

(G) mr ist gerade.

Ihre Notwendigkeit ist klar. Es ist nur umgekehrt zu zeigen, daß zu jedem Tripel (m, r, s), für welches (E) und (G) zutrifft, ein o.r.P. (m, r, s) existiert. Dies können nur endlich viele Tripel sein, was wir nachstehend bereits aus (E) allein folgern wollen. Weil m, r, s natürliche Zahlen sind, folgen aus (E) sofort die Ungleichungen

(U) $$r \geq 3,\ s \geq 3,\ rs-2r-2s \geq 1.$$

Wir schreiben (E) in den beiden Gestalten (E') und (E'').

$$(E') \qquad m = \frac{4}{r-2} + \frac{8+\frac{16}{r-2}}{rs-2r-2s},$$

$$(E'') \qquad (s-2)(mr-2m-4) = 4m+8.$$

Aus (E') und (U) folgt

$$m \leq 4+8+16 = 28.$$

Nach (E'') ist $s-2$ ein Teiler von $4m+8$, daher

$$s \leq 118.$$

Zu (E) gibt es also nur endlich viele Lösungstripel (m, r, s). Durch Probieren kann man leicht feststellen, daß für *beide* Bedingungen (E) und (G) genau die folgenden 25 Lösungstripel vorhanden sind.

(1,18,3) ↔ (6,3,18)	(1,12,4) ↔ (3,4,12)	(1,8,8)
(2,12,3) ↔ (8,3,12)	(2, 8,4) ↔ (4,4, 8)	(2,6,6)
(3,10,3) ↔ (10,3,10)	(4, 6,4) ↔ (6,4, 6)	(4,5,5)
(4, 9,3) ↔ (12,3, 9)	(8, 5,4) ↔ (10,4, 5)	
(6, 8,3) ↔ (16,3, 8)		
(12, 7,3) ↔ (28,3, 7)	(1,10,5) ↔ (2,5,10)	

Mit jedem o.r.P. (m, r, s) existiert gleichzeitig auch das duale o.r.P. $(mr/s, s, r)$. Solche durch duale Polyeder darstellbare Lösungstripel sind oben durch Doppelpfeil verbunden. Zum Beweis zu Satz 1 genügt es daher, nur für diejenigen 14 Tripel, die in der ersten, dritten und letzten Kolonne aufgeführt sind, ein zugehöriges o.r.P. anzugeben.

Bei der Beschreibung der folgenden Polyeder bedienen wir uns der bekannten *Kantendarstellung*, d.h. alle Kanten sind durch Buchstaben $a_1, b_3, \ldots$ bezeichnet, während jede zyklisch zu lesende Zeile den orientierten Randweg eines Polygons (Land) vorstellt. Gleichbezeichnete Kanten sind zu identifizieren, und zwar mit entgegengesetzter Orientierung, weil jeder Buchstabe einmal mit dem Exponenten $+1$ und einmal mit -1 auftritt. Damit wird auch garantiert, daß die entstehende geschlossene Fläche orientierbar ist. Man kann sich bei jedem der beschriebenen Polyeder überzeugen, daß tatsächlich jeweils s von den mr Polygonecken zu einem einzigen (s-kantigen) Eckpunkt des Polyeders (m, r, s) identifiziert werden. Beim nachfolgenden o.r.P. (1,18,3) fallen z.B. die drei Eckpunkte

$$\ldots a_1^{-1} b_1 \ldots c_1^{-1} a_1 \ldots b_1^{-1} c_1 \ldots$$

des 18-Eckes zu einem einzigen Eckpunkt des Polyeders zusammen.

(1,18,3) $a_1\ b_1^{-1}\ b_2\ c_2^{-1}\ c_1\ a_1^{-1}\ a_2\ b_2^{-1}\ b_3\ c_3^{-1}\ c_2\ a_2^{-1}\ a_3\ b_3^{-1}\ b_1\ c_1^{-1}\ c_3\ a_3^{-1}$

(2,12,3) $\left\{\begin{array}{cccccccccccc} a_1 & b_1 & a_2 & a_3 & b_2 & a_4 & a_5 & b_1^{-1} & a_6 & a_7 & b_2^{-1} & a_8 \\ a_3^{-1} & c_1 & a_6^{-1} & a_1^{-1} & c_2 & a_4^{-1} & a_7^{-1} & c_1^{-1} & a_2^{-1} & a_5^{-1} & c_2^{-1} & a_8^{-1} \end{array}\right.$

(3,10,3) $\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_1^{-1} & b_2 & a_3^{-1} & b_4 & a_5^{-1} & b_5 & a_4^{-1} & b_3 & a_2^{-1} & b_1 \\ b_1^{-1} & c_1 & b_2^{-1} & c_2 & b_3^{-1} & c_3 & b_4^{-1} & c_4 & b_5^{-1} & c_5 \\ c_5^{-1} & a_5 & c_3^{-1} & a_4 & c_4^{-1} & a_3 & c_1^{-1} & a_2 & c_2^{-1} & a_1 \end{array}\right.$

(4,9,3) $\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_2 & b_2 & c_2 & a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1^{-1} & d_1 & e_1 & a_2^{-1} & d_2 & e_2 & a_3^{-1} & d_3 & e_3 \\ e_3^{-1} & f_3 & b_3^{-1} & e_2^{-1} & f_2 & b_2^{-1} & e_1^{-1} & f_1 & b_1^{-1} \\ c_3^{-1} & f_3^{-1} & d_3^{-1} & c_2^{-1} & f_2^{-1} & d_2^{-1} & c_1^{-1} & f_1^{-1} & d_1^{-1} \end{array}\right.$

(1,12,4) $a_1\ c_1\ a_2\ b_1\ c_2\ b_2\ a_2^{-1}\ c_2^{-1}\ a_1^{-1}\ b_2^{-1}\ c_1^{-1}\ b_1^{-1}$

(2,8,4) $\left\{\begin{array}{cccccccc} a_1 & a_2 & b_2 & b_3 & a_3 & a_4 & b_4 & b_1 \\ a_4^{-1} & a_1^{-1} & b_3^{-1} & b_4^{-1} & a_2^{-1} & a_3^{-1} & b_1^{-1} & b_2^{-1} \end{array}\right.$

(4,6,4) $\left\{\begin{array}{cccccc} b_3^{-1} & a_2^{-1} & c_2^{-1} & b_4 & c_3 & a_4 \\ c_4 & a_1 & b_3 & a_3^{-1} & c_1^{-1} & b_4^{-1} \\ b_2^{-1} & a_4^{-1} & c_4^{-1} & b_1 & c_1 & a_2 \\ c_2 & a_3 & b_2 & a_1^{-1} & c_3^{-1} & b_1^{-1} \end{array}\right.$

(1,10,5) $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_1^{-1}\ a_2^{-1}\ a_3^{-1}\ a_4^{-1}\ a_5^{-1}$

(1,8,8) $a_1\ b_1\ a_1^{-1}\ b_1^{-1}\ a_2\ b_2\ a_2^{-1}\ b_2^{-1}$

(2,6,6) $\left\{\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_1^{-1} & a_2^{-1} & a_3^{-1} & a_4^{-1} & a_5^{-1} & a_6^{-1} \end{array}\right.$

(4,5,5) $\left\{\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & b_2 & a_3 & c_2 \\ a_4^{-1} & a_5^{-1} & b_2^{-1} & a_6^{-1} & c_1^{-1} \\ a_1^{-1} & a_2^{-1} & b_1^{-1} & a_3^{-1} & c_1 \\ a_4 & a_5 & b_1 & a_6 & c_2^{-1}. \end{array}\right.$

Um auch die folgenden drei Polyeder mitzuteilen, ist es vorteilhaft, nicht die Kantendarstellung sondern die *Länderdarstellung* zu wählen. Letztere hat der Verfasser in früheren Arbeiten[2]) ausführlich beschrieben und will sie hier nur kurz erläutern.

Es sei für den Augenblick die Existenz eines o.r.P. (12,7,3) vorausgesetzt. Diese 12 Siebenecke werden mit den Nummern 1, 2, ..., 12 bezeichnet. Für jedes Siebeneck wird sodann gemäß seiner Orientierung die zyklische Reihenfolge seiner 7 Nachbargebiete notiert. Es entsteht dabei etwa folgendes Schema.

[2]) Ringel, G.: Farbensatz für nichtorientierbare Flächen beliebigen Geschlechtes. J. reine angew. Math. **190**, 129—147 (1952). — Farbensatz für orientierbare Flächen vom Geschlechte $p > 0$. Erscheint demnächst ebenda.

(12,7,3)

1.	5	6	9	8	4	2	3
2.	6	5	10	7	3	1	4
3.	1	2	7	12	6	4	5
4.	2	1	8	11	5	3	6
5.	3	4	11	10	2	6	1
6.	4	3	12	9	1	5	2
7.	11	12	3	2	10	8	9
8.	12	11	4	1	9	7	10
9.	7	8	1	6	12	10	11
10.	8	7	2	5	11	9	12
11.	9	10	5	4	8	12	7
12.	10	9	6	3	7	11	8.

Weil alle Eckpunkte dreikantig sind, gilt in diesem Schema notwendig die

Regel R*. *Wenn in der i-ten Zeile i. . . . a k b . . . steht, so steht in der k-ten Zeile k. . . . b i a . . . .*

Nun läßt sich auch umgekehrt sagen: Wenn in einem derartigen Schema Regel R* und die unten genannte Regel V* erfüllt ist, so gibt es auch ein zugehöriges orientierbares Polyeder.

Regel V*. *In jeder Zeile kommt jedes geordnete Paar von aufeinanderfolgenden Nummern höchstens einmal vor.*

Beide Regeln sind im vorstehenden Schema und in den beiden nächsten Schemata erfüllt und somit zunächst je ein orientierbares reguläres Polyeder vom Typ (12,7,3) und (6,8,3) beschrieben.

(6,8,3)

1.	5	6	2	5	3	4	2	3
2.	6	5	1	6	4	3	1	4
3.	1	2	4	1	5	6	4	5
4.	2	1	3	2	6	5	3	6
5.	3	4	6	3	1	2	6	1
6.	4	3	5	4	2	1	5	2.

Das folgende Schema stellt ein aus 8 Zehnecken, 10 Vierecken und lauter dreikantigen Eckpunkten bestehendes, orientierbares Polyeder dar.

1.	10	4	12	3	16	8	17	5	18	2
2.	10	1	18	4	14	7	15	8	16	3
3.	10	2	16	1	12	6	13	7	14	4
4.	10	3	14	2	18	5	11	6	12	1
5.	9	8	11	4	18	1	17	7	13	6
6.	9	5	13	3	12	4	11	8	15	7
7.	9	6	15	2	14	3	13	5	17	8
8.	9	7	17	1	16	2	15	6	11	5
9.	5	6	7	8						

10.	1	2	3	4
11.	4	5	8	6
12.	6	3	1	4
13.	3	6	5	7
14.	7	2	4	3
15.	2	7	6	8
16.	8	1	3	2
17.	1	8	7	5
18.	5	4	2	1

Man kann hierin gleichzeitig jedes Viereck auf einen Punkt zusammenziehen. Weil die Vierecke vorher untereinander nicht benachbart waren, entsteht dabei ein o.r.P. $(8,5,4)$. Hiermit ist Satz 1 bewiesen.

§ 2. Reguläre Polyeder mit lauter dreikantigen Eckpunkten.

Satz 2. *Wenn ein o.r.P. (m, r, s) existiert, n eine natürliche Zahl und $rs-2r-2s \geq 0$ ist, so gibt es auch ein o.r.P. $(n\,m, r, s)$.*

Beweis. Die durch das reguläre Polyeder (m, r, s) definierte orientierbare Fläche $\mathfrak{F}$ hat die Charakteristik $N=\frac{m}{2s}(rs-2r-2s) \geq 0$. Es sei C eine auf $\mathfrak{F}$ verlaufende einfach geschlossene Kurve, welche $\mathfrak{F}$ nicht in zwei getrennte Teile zerlegt. (Bei $N>-2$ gibt es stets eine solche Kurve.) Das Polyeder (m, r, s) sei in n übereinanderliegenden Exemplaren gegeben und jedes Exemplar sei längs C durchschnitten. Die dabei entstehenden $2n$ geschlossenen Randkurven wollen wir dann in anderer Reihenfolge wieder miteinander identifizieren. Dies kann stets so geschehen (etwa nach Fig. 1), daß eine einzige geschlossene orientierbare Fläche (mit der Charakteristik nN) entsteht.

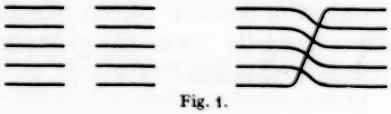

Fig. 1.

Beispiel. Wir nehmen das in § 1 genannte Polyeder $(1,8,8)$ in zwei Exemplaren, schneiden dann etwa längs der geschlossenen Kurve b_1 auf und identifizieren wieder mit vertauschten Rollen. Das Ergebnis ist tatsächlich ein o.r.P. $(2,8,8)$ auf der Fläche $\mathfrak{F}_3$:

$$a_1\ b_1'\ a_1^{-1}\ \ b_1^{-1}\ \ a_2\ b_2\ a_2^{-1}\ \ b_2^{-1}$$
$$a_1'\ b_1\ a_1'^{-1}\ b_1'^{-1}\ a_2'\ b_2'\ a_2'^{-1}\ b_2'^{-1}.$$

Satz 3. *Für die sechs Werte $r=7, 8, 9, 10, 12, 18$ und nur für diese gilt: Es gibt auf jeder geschlossenen orientierbaren Fläche mit positiver Charakteristik ein lokal-reguläres Polyeder mit lauter dreikantigen Eckpunkten und lauter r-Ecken als Flächenstücken.*

Satz 4. *Für die sechs Werte $m=1, 2, 3, 4, 6, 12$ und nur für diese gilt: Es gibt auf jeder geschlossenen orientierbaren Fläche mit positiver Charakteristik ein aus m Polygonen bestehendes lokal-reguläres Polyeder mit lauter dreikantigen Eckpunkten.*

Die Eulersche Formel für ein reguläres Polyeder vom Typ $(m, r, 3)$ auf der orientierbaren Fläche $\mathfrak{F}_p$ vom Geschlechte p lautet

$$m(r-6)=12(p-1).$$

Wenn diese Gleichung für ein bestimmtes r (bzw. für ein bestimmtes m) und für *jedes* Geschlecht $p>1$ lösbar sein soll, so muß $r-6$ (bzw. m) ein Teiler von 12 sein. Die Sätze 3 und 4 gelten also höchstens für die dort genannten sechs Werte. Satz 3 folgt mithin aus Satz 1 zunächst für $p=2$ und mit

Hilfe von Satz 2 auch für beliebiges $p > 1$. Um auch Satz 4 vollständig zu beweisen, wollen wir nun für $t = 1, 2, \ldots$ je ein reguläres, orientierbares Polyeder der Typen

$$(1, 6+12t, 3), \quad (2, 6+6t, 3), \quad (3, 6+4t, 3),$$
$$(4, 6+3t, 3), \quad (6, 6+2t, 3), \quad (12, 6+t, 3)$$

konstruieren.

1. In dem orientierbaren Monoeder $(1, 18, 3)$ von § 1 kann der folgende spezielle Ausschnitt

$$\text{(A)} \qquad \ldots b_1\ b_2^{-1} \ldots b_2\ b_3^{-1} \ldots b_3\ b_1^{-1} \ldots$$

ausgewählt werden. Wenn allgemein ein orientierbares Monoeder $(1, r, 3)$ auf diese spezielle Form (A) gebracht werden kann, so gibt es auch ein orientierbares Monoeder $(1, r+12, 3)$, welches wir nämlich durch

$$\ldots b_1\ d_1^{-1}\ d_3\ e_1^{-1}\ e_3\ b_2^{-1} \ldots b_2\ d_2^{-1}\ d_1\ e_2^{-1}\ e_1\ b_3^{-1} \ldots b_3\ d_3^{-1}\ d_2\ e_3^{-1}\ e_2\ b_1^{-1} \ldots$$

definieren können. Dieses $(1, r+12, 3)$ hat wiederum die Form (A), nämlich

$$\ldots b_1\ d_1^{-1} \ldots d_1\ e_2^{-1} \ldots e_2\ b_1^{-1} \ldots .$$

Durch vollständige Induktion erhalten wir für jedes t ein Monoeder vom Typ $(1, 6+12t, 3)$.

2. Wenn ein o.r.P. $(2, r, 3)$ existiert, welches in der Form

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \ldots b_1^{-1}\ a_1 \ldots b_2^{-1}\ c_2 \ldots a_2^{-1}\ b_2 \ldots \\ \ldots c_2^{-1}\ a_2 \ldots c_1^{-1}\ b_1 \ldots a_1^{-1}\ c_1 \ldots \end{cases}$$

geschrieben werden kann, dann gibt es auch ein o.r.P. $(2, r+6, 3)$, das wir nämlich durch

$$\begin{aligned} &\ldots b_1^{-1}\ d_2\ \ e_1^{-1}\ a_1 \ldots b_2^{-1}\ f_2^{-1}\ e_1\ \ c_2 \ldots a_2^{-1}\ e_2^{-1}\ d_1\ \ b_2 \ldots \\ &\ldots c_2^{-1}\ d_2^{-1}\ f_1\ \ a_2 \ldots c_1^{-1}\ e_2\ \ f_1^{-1}\ b_1 \ldots a_1^{-1}\ f_2\ \ d_1^{-1}\ c_1 \ldots \end{aligned}$$

definieren können. Auch dieses o.r.P. $(2, r+6, 3)$ läßt sich wiederum auf die Form (zyklisch vertauscht)

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \ldots a_2^{-1}\ e_2^{-1} \ldots e_1^{-1}\ a_1 \ldots f_2^{-1}\ e_1 \ \ \ldots \\ \ldots a_1^{-1}\ f_2 \ \ \ldots f_1 \ \ a_2 \ldots e_2 \ \ f_1^{-1} \ldots \end{cases}$$

bringen.

Als Induktionsanfang benützen wir das in § 1 angegebene o.r.P. $(2, 12, 3)$, das wir auch in der Form (B) schreiben können; etwa

$$(2, 12, 3) \qquad \begin{cases} \ldots a_2 \ \ a_3 \ \ \ldots b_2 \ \ a_4 \ \ \ldots a_7 \ \ b_2^{-1} \ldots \\ \ldots a_4^{-1}\ a_7^{-1} \ldots c_1^{-1}\ a_2^{-1} \ldots a_3^{-1}\ c_1 \ \ \ldots . \end{cases}$$

Nach vollständiger Induktion ergibt sich für jedes t ein o.r.P. $(2, 6+6t, 3)$.

3. Ein o.r.P. $(3,4r+2,3)$ können wir sogar explizite angeben:

$$(3,4r+2,3)\begin{cases} a_1^{-1} & b_2 & a_3^{-1} & b_4 & a_5^{-1}b_6 & \dots & b_{2r}a_{2r+1}^{-1}b_{2r+1}a_{2r}^{-1}\dots a_6^{-1} & b_5a_4^{-1}b_3 & a_2^{-1} & b_1 \\ b_1^{-1} & c_1 & b_2^{-1} & c_2 & b_3^{-1}c_3 & \dots & \dots\dots\dots\dots & b_{2r}^{-1}c_{2r}b_{2r+1}^{-1} & c_{2r+1} & \\ c_{2r+1}^{-1}a_{2r+1}c_{2r-1}^{-1}a_{2r}c_{2r}^{-1}a_{2r-1}\dots & & & & & & c_5^{-1}a_6c_6^{-1}a_5c_3^{-1}a_4c_4^{-1}a_3c_1^{-1}a_2 & c_2^{-1} & a_1. & \end{cases}$$

4. Noch einfacher läßt sich für $n=1, 2, \dots$ ein o.r.P. $(4,3n,3)$ beschreiben:

$$(4,3n,3)\qquad \begin{cases} a_1 & b_1 & c_1 & a_2 & b_2 & c_2 & \dots a_n & b_n & c_n \\ a_1^{-1} & d_1 & e_1 & a_2^{-1} & d_2 & e_2 & \dots a_n^{-1} & d_n & e_n \\ e_n^{-1} & f_n & b_n^{-1} & e_{n-1}^{-1} & f_{n-1} & b_{n-1}^{-1}\dots e_1^{-1} & f_1 & b_1^{-1} & \\ c_n^{-1} & f_n^{-1} & d_n^{-1} & c_{n-1}^{-1} & f_{n-1}^{-1} & d_{n-1}^{-1}\dots c_1^{-1} & f_1^{-1} & d_1^{-1}. & \end{cases}$$

6. Es möge ein o.r.P. $(6,r,3)$ existieren mit der Eigenschaft: Es lassen sich zwei Eckpunkte derart auswählen, daß jedes der sechs r-Ecke genau mit einem dieser beiden Eckpunkte inzidiert. Unter dieser Voraussetzung gibt es auch ein o.r.P. $(6,r+2,3)$ mit derselben obigen Eigenschaft.

Beweis. Das Polyeder $(6,r,3)$ muß wegen der genannten Eigenschaft die Form haben:

$$(6,r,3)\qquad \begin{cases} \dots b_1^{-1}a_1\dots \\ \dots a_1^{-1}c_1\dots \\ \dots c_1^{-1}b_1\dots \\ \dots c_2^{-1}a_2\dots \\ \dots a_2^{-1}b_2\dots \\ \dots b_2^{-1}c_2\dots. \end{cases}$$

Hieraus läßt sich das neue Polyeder

$$(6,r+2,3)\qquad \begin{cases} \dots b_1^{-1} & d_2 & e_1^{-1} & a_1\dots \\ \dots a_1^{-1} & f_2 & d_1^{-1} & c_1\dots \\ \dots c_1^{-1} & e_2 & f_1^{-1} & b_1\dots \\ \dots c_2^{-1} & d_2^{-1} & f_1 & a_2\dots \\ \dots a_2^{-1} & e_2^{-1} & d_1 & b_2\dots \\ \dots b_2^{-1} & f_2^{-1} & e_1 & c_2\dots \end{cases}$$

konstruieren, welches offenbar wieder obige Eigenschaft besitzt. Als Induktionsanfang kann man hier den Würfel $(6,4,3)$ benützen. Der Induktionsschluß liefert für jedes t ein o.r.P. $(6,6+2t,3)$.

12. Auf dieselbe Art kann man beweisen: Wenn ein o.r.P. $(12,r,3)$ existiert, in welchem sich vier Eckpunkte derart finden lassen, daß jedes 12-Eck mit einem dieser vier Eckpunkte inzidiert, so existiert auch ein o.r.P. $(12,r+2,3)$ mit derselben Eigenschaft. Der Beweis ergibt sich, indem man die beiden unter 6. angeführten sechszeiligen Ausschnitte in zwei Exemplaren übereinanderschreibt (also 12-zeilig).

Das Pentagondodekaeder $(12,5,3)$ hat die hier verlangte Eigenschaft. Also gibt es für $t=1,3,5,\ldots$ ein o.r.P. $(12,6+t,3)$. Nach 6. gibt es für $t=2,4,\ldots$ ein o.r.P. $(6,6+t,3)$. Aus Satz 2 folgt nun auch die Existenz eines o.r.P. $(12,6+t,3)$. Es gibt also für jedes t ein o.r.P. $(12,6+t,3)$. — Nun ist Satz 4 bewiesen.

Satz 5. *Dann und nur dann existiert ein orientierbares lokal-reguläres Polyeder vom Typ* $(m,r,3)$, *wenn* $\frac{m(r-6)}{12}+1$ *eine nicht negative ganze Zahl ist.*

Wenn p das Geschlecht der durch das Polyeder $(m,r,3)$ dargestellten orientierbaren Fläche bedeutet, so lautet die EULERsche Formel

$$\frac{m(r-6)}{6}=2p-2,$$

womit das „nur dann" bewiesen ist. Umgekehrt sei $\frac{m(r-6)}{12}+1=p$ eine nicht negative ganze Zahl. Wir betrachten zunächst den Fall

$p>1$. Es sei $d=(m,12)$ der größte gemeinsame Teiler von m und 12. Dann ist

$$r-6=\frac{(p-1)\,d}{m}\cdot\frac{12}{d}.$$

Nach Satz 4 gibt es für die ganze Zahl $\frac{(p-1)\,d}{m}=t$ ein o.r.P. $\left(d,6+\frac{12}{d}t,3\right)$ und nach Satz 2 auch ein o.r.P. $(m,r,3)$, w. z. b. w.

$p=0$ (Kugel). Die Gleichung $m(r-6)=-12$ hat genau vier positiv-ganzzahlige Lösungspaare, die durch Pentagondodekaeder, Würfel, Tetraeder und Trieder realisiert sind.

$p=1$ (Torus). Aus $m(r-6)=0$ folgt $r=6$. Durch

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_1^{-1}\ a_2^{-1}\ a_3^{-1}$$

ist ein o.r.P. $(1,6,3)$ definiert. Nach Satz 2 folgt hieraus die Existenz eines o.r.P. $(m,6,3)$ für $m=1,2,\ldots$.

Satz 5 ist also bewiesen.

§ 3. Orientierbare Monoeder.

Es sei auf $\mathfrak{F}_p$ ein o.r.P. $(1,r,s)$ gegeben. Die zugehörige EULERsche Formel $rs-2r-2s=4s(p-1)$ bringen wir auf die Form

$$r(s-2)=2s(2p-1).$$

Die Zahl r ist durch s teilbar, da die Anzahl der Eckpunkte im betrachteten Monoeder gleich r/s ist.

Falls s gerade ist, setzen wir $r=\beta s$ und $s-2=2\alpha$. Es wird dann $\alpha\beta=2p-1$ und das Monoeder hat die Form $(1,2\beta(\alpha+1),2(\alpha+1))$.

Falls s ungerade ist, können wir, da dann r gerade ist, $r=2\beta s$ und $s-2=\alpha$ setzen. Das Monoeder erhält somit die Form $(1,2\beta(\alpha+2),\alpha+2)$, wobei wieder $\alpha\beta=2p-1$ gilt.

Hierzu gilt auch die Umkehrung. Wir beweisen nämlich jetzt

Satz 6. *Wenn das Zahlenpaar α, β alle positiven, ganzzahligen Faktorzerlegungen der Zahl $2p-1$ durchläuft ($2p-1=\alpha\beta$), so sind durch*

$$(1, 2\beta(\alpha+1), 2(\alpha+1)) \quad \text{und} \quad (1, 2\beta(\alpha+2), \alpha+2)$$

alle auf der geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlechte $p>1$ realisierbaren Monoedertypen aufgezählt.

Beweis. α und β sind immer ungerade. Es folgt aus den folgenden beiden Abschnitten a) und b), daß die genannten Monoedertypen tatsächlich auftreten.

a) *Für $n=2, 4, \ldots$ und $h=0, 1, 2, \ldots$ existiert ein orientierbares Monoeder vom Typ $(1, 2n(2h+1), 2n)$.*

Im Sonderfall $h=0$ ist durch die Zeile

$$a_1\ a_2 \ldots a_n\ a_1^{-1}\ a_2^{-1} \ldots a_n^{-1}$$

ein orientierbares Monoeder vom Typ $(1, 2n, 2n)$ mitgeteilt. Für $h>0$ wird ein solches Monoeder durch folgendes Schema beschrieben. Diese n Zeilen sind hintereinander als eine einzige Zeile zu lesen.

$$\begin{array}{l}
a_n^{-1}\ c_{1,h}^{-1} d_{1,h-1} \ldots c_{1,3}^{-1} d_{1,2}\, c_{1,2}^{-1} d_{1,1}\, c_{1,1}^{-1} a_1\, b_1\, c_{1,1}\, d_{2,1}^{-1} c_{1,2}\, d_{2,2}^{-1} c_{1,3} \ldots d_{2,h-1}^{-1} c_{1,h}\, b_2^{-1} \\
a_1^{-1}\ c_{2,h}^{-1} d_{2,h-1} \ldots c_{2,3}^{-1} d_{2,2}\, c_{2,2}^{-1} d_{2,1}\, c_{2,1}^{-1} a_2\, b_2\, c_{2,1}\, d_{3,1}^{-1} c_{2,2}\, d_{3,2}^{-1} c_{2,3} \ldots d_{3,h-1}^{-1} c_{2,h}\, b_3^{-1} \\
a_2^{-1}\ c_{3,h}^{-1} d_{3,h-1} \ldots c_{3,3}^{-1} d_{3,2}\, c_{3,2}^{-1} d_{3,1}\, c_{3,1}^{-1} a_3\, b_3\, c_{3,1}\, d_{4,1}^{-1} c_{3,2}\, d_{4,2}^{-1} c_{3,3} \ldots d_{4,h-1}^{-1} c_{3,h}\, b_4^{-1} \\
\cdots\cdots\cdots

Beim Beweis unterscheiden wir die beiden Fälle $r \leq n$ und $r \geq n$.

α) Falls $r \leq n$ ist, wird durch die folgenden $2r+2$ Zeilen, die hintereinander als ein einziger Zyklus zu lesen sind, ein o.r.P. $(1, 2(r+1)(n+1), n+1)$ beschrieben.

$$
\begin{array}{llll}
c_1 & a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} \ldots . & . \quad . \quad a_{1n}^{-1} \; c_1^{-1} \\
c_2 & a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} \ldots . & . \quad . \quad a_{2n}^{-1} \; c_2^{-1} \\
. & . & . \quad \ldots . & . \quad . \quad . \quad . \\
. & . & . \quad \ldots . & . \quad . \quad . \quad . \\
c_r & a_{r1}^{-1} & a_{r2}^{-1} \ldots . & . \quad . \quad a_{rn}^{-1} \; c_r^{-1} \\
b_1 & b_2 & b_3 \ldots b_{n-r+1} & \\
d_1 & a_{1n-1} & a_{1n} \ldots a_{13} & a_{14} \; a_{11} \; a_{12} \; d_1^{-1} \\
d_2 & a_{2n-1} & a_{2n} \ldots a_{23} & a_{24} \; a_{21} \; a_{22} \; d_2^{-1} \\
. & . & . \quad \ldots . & . \quad . \quad . \quad . \\
. & . & . \quad \ldots . & . \quad . \quad . \quad . \\
d_r & a_{rn-1} & a_{rn} \ldots a_{r3} & a_{r4} \; a_{r1} \; a_{r2} \; d_r^{-1} \\
b_1^{-1} & b_2^{-1} & b_3^{-1} \ldots b_{n-r+1}^{-1} &
\end{array}
$$

Man kann leicht aufzählen, welche Kanten in zyklischer Reihenfolge in einem Eckpunkt des eben beschriebenen Polyeders $(1, 2(r+1)(n+1), n+1)$ zusammentreffen $(i = 1, 2, \ldots, r)$:

$$
\begin{array}{llllllllllll}
(c_i & a_{i1} & a_{i2}^{-1} & a_{i3} & a_{i4}^{-1} & . & . & . & . & . & . & a_{in}^{-1}), \\
(d_i & a_{in-1}^{-1} & a_{in} & . & . & . & . & . & a_{i3}^{-1} & a_{i4} & a_{i1}^{-1} & a_{i2}), \\
(c_1^{-1} & c_2^{-1} & . & . & c_r^{-1} & b_1 & b_2^{-1} & b_3 & b_4^{-1} & . & . & b_{n-r+1}), \\
(d_1^{-1} & d_2^{-1} & . & . & d_r^{-1} & b_1^{-1} & b_2 & b_3^{-1} & b_4 & . & . & b_{n-r+1}^{-1}).
\end{array}
$$

Mit jedem Eckpunkt inzidieren tatsächlich genau $n+1$ Kanten.

β) Für das Folgende $(r \geq n)$ ist es vorteilhaft den Spezialfall $r = n$ im eben konstruierten Polyeder besonders zu betrachten. Dieses o.r.P. $(1, 2(n+1), n+1)$ enthält den Ausschnitt

$$\ldots b_1^{-1} \; c_1 \ldots c_1^{-1} \; c_2 \ldots c_2^{-1} \; c_3 \ldots c_{n-1}^{-1} \; c_n \ldots c_n^{-1} \; b_1 \ldots .$$

Nun beweisen wir den

Hilfssatz 1. *Wenn ein orientierbares Monoeder vom Typ* $(1, 2(s+1)(n+1), n+1)$ *existiert, deren Kantendarstellung sich in der Form*

$$\text{(C)} \qquad \ldots a_1^{-1} \; a_2 \ldots a_2^{-1} \; a_3 \ldots a_3^{-1} \; a_4 \ldots a_n^{-1} \; a_{n+1} \ldots a_{n+1}^{-1} \; a_1 \ldots$$

schreiben läßt, so existiert auch ein o.r.P. $(1, 2(s+3)(n+1), n+1)$, *in welchem sich ebenfalls ein Ausschnitt von der Form* (C) *finden läßt.*

Beweis. Mit Hilfe des gegebenen Polyeders findet man durch formales Einschieben der neuen Kanten h_i, f_i das neue Polyeder

$$\dots a_1^{-1}\, f_2\, h_1^{-1}\, h_2\, f_1^{-1}\, a_2 \dots a_2^{-1}\, h_3\, f_2^{-1}\, f_3\, h_2^{-1}\, a_3 \dots a_3^{-1}\, h_4\, f_3^{-1}\, f_4\, h_3^{-1}\, a_4 \dots$$
$$\dots a_n^{-1}\, h_{n+1}\, f_n^{-1}\, f_{n+1}\, h_n^{-1}\, a_{n+1} \dots a_{n+1}^{-1}\, h_1\, h_{n+1}^{-1}\, f_1\, f_{n+1}^{-1}\, a_1 \dots .$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß dieses so definierte Polyeder lokal-regulär vom gesuchten Typ $\left(1, 2(s+3)(n+1), n+1\right)$ ist. Es läßt sich in ihm auch ein Ausschnitt

$$\dots a_1^{-1}\, f_2 \dots f_2^{-1}\, f_3 \dots f_3^{-1}\, f_4 \dots f_n^{-1}\, f_{n+1} \dots f_{n+1}^{-1}\, a_1 \dots$$

von der gewünschten Art (C) finden. Hilfssatz 1 ist bewiesen.

Die $(r-n)/2$-malige Anwendung von Hilfssatz 1 auf das oben betrachtete o.r.P. $\left(1, 2(n+1)^2, n+1\right)$ ergibt ein o.r.P. $\left(1, 2(r+1)(n+1), n+1\right)$. Hiermit ist auch im Falle $r \geq n$ die Aussage b) bewiesen.

Bonn, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 24. Oktober 1953.)